Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 512.772+515.165.4

Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде. Приложение

В.И.Звонилов

Настоящая заметка является приложением к опубликованной ранее работе автора с тем же названием и содержит доказательство леммы, относящейся к теореме о жесткой изотопической классификации вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде, имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата.

В настоящем приложении к работе [1] дается обещанное в ней подробное доказательство леммы о перестановке овалов. Кроме того, как заметил автор уже после опубликования указанной работы, в [1] не хватает доказательства того, что для конфигураций, обозначенных символами[1] $\omega^{\pm}_{\mathrm{inn}}$, $\alpha^{\pm}_{\mathrm{lp}}B$ ($B = \langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle_I$, $\langle 3\rangle_{II}$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle$), любые две конфигурации, помеченные одним и тем же символом, жестко изотопны. Этот пробел восполняется в работе [2].

1. Лемма о перестановке овалов. *Жесткий изотопический тип конфигураций $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}B$, ($B = \langle 2\rangle$, $\langle 3\rangle^{\pm}_I$, $\langle 3\rangle_{II}$, $\langle 4\rangle$, $\langle 5\rangle^{\pm}$) не зависит от выбора овала, на котором расположена точка q_2 (для $B = \langle 3\rangle^{\pm}_I$, $\langle 5\rangle^{\pm}$ зависит лишь от того, на положительном или отрицательном овале она расположена).*[2]

Доказательство. Пусть (Q, q_1, q_2, ϵ) – конфигурация, обозначенная одним из символов $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}B$, указанных в формулировке леммы. Согласно [3], п.А3.2, жесткий изотопический тип квинтики Q определяется ее комлексной схемой. Так как группа $PGL(3;\mathbf{R})$ связна, любое

[1] В настоящей работе используются все обозначения, введенные в [1].

[2] В формулировку этой леммы, имеющейся в [1], ошибочно включены конфигурации $\alpha^{\pm}_{\mathrm{lp}}B$, $\tilde{\alpha}B$.

проективное преобразование плоскости индуцирует жесткую изотопию квинтики. Поэтому выбрав на квинтике Q пару овалов (одного знака, если Q принадлежит типу I) достаточно найти жестко изотопную ей квинтику, некоторое проективное преобразование которой переводит ее в себя и отображает первый из соответствующей пары овалов во второй.

Для конфигураций $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 5\rangle^{\pm}$ возьмем конику C, заданную многочленом $c = x^2 + y^2 - 25$, и точки $S(0;5)$, $M_0(-3;-4)$, $M_1(4;-3)$, $N_0(3;-4)$, $N_1(5;0)$, $M'(-4;-3)$, $N'(-5;0)$ на ней. Семейства точек $M_t(-3(1-t)+4t;-4(1-t)-3t)$, $N_t(3(1-t)+5t;-4(1-t))$ соединяют M_0 с M_1 и N_0 с N_1. Многочлены $l_0 = 2x+y-5$, $l'_0 = 2x-y+5$, $l'_1 = 3x+y+15$, $\tilde{l}_t = 6y+24-(3x+5y+35)t+26t^2$ задают прямые SM_1, SM', $N'M'$, M_tN_t. Положим $l_t = (1-t)l_0+t(y-5)$, $l'_t = (1-t)l'_0+tl'_1$. Рассмотрим семейство квинтик Q_t: $cl_tl'_t\tilde{l}_t+\lambda(x^2+(y-5)^2) = 0$. При некотором положительном λ все они входят в каждую из конфигураций $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 5\rangle^{\pm}$, причем S является их общей особой точкой. Кривая Q_0 имеет 3 положительных и 2 отрицательных овала. Симметрия $(x;y)\mapsto(-x;y)$ переставляет левую пару овалов (имеющих разные знаки) с правой. Чтобы переставить, например, левый положительный овал с центральным, надо перейти к кривой Q_1 и воспользоваться той же симметрией. Заметим, что жесткая изотопия Q_t "протаскивает" правый положительный овал кривой Q_0 сквозь особенность S, превращая его при некоторых промежуточных значениях t в "восьмерку", а при $t = 1$ – в левый отрицательный овал кривой Q_1 (см. рис.1).

Рассмотрим конфигурации $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 4\rangle$ (соответственно, $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 3\rangle_{II}$). В каждую из них входит семейство квинтик Q_t: $((1-t)(14x+9y)+17ty)((1-t)(2x+3y+12)+t(3y-2x+12))((1-t)17y+t(9y-14x))((1-t)(18x-27y-108)+t(28x+18y))((1-t)(28x-18y)+t(18x+27y+108))-\lambda(x^2+y^2) = 0$ (соответственно, $((1-t)(4x+3y)+5ty)(y+6)((1-t)(5y+20)+t(-4x-3y))(5(1-t)y+t(-4x+3y))((1-t)(4x-3y)+t(5y+20))+\lambda(x^2+y^2)=0$), где λ – некоторое положительное число. Квинтики Q_0 и Q_1 совпадают, а жесткая изотопия Q_t переводит против часовой стрелки каждый из овалов кривой $Q_0 = Q_1$ в соседний (см. рис.2 и 3).

В каждую из конфигураций $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 3\rangle^{\pm}_{I}$ входит квинтика Q: $(x^2+y^2-1)(y^2-3x^2)y+\lambda(x^2+y^2) = 0$, где λ – некоторое положительное число (см. рис.4а). Поворот кривой Q вокруг особой точки (в начале координат) на 120 градусов циклически переставляет ее овалы.

Заметим, что для квинтик из $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 3\rangle^{\pm}_{I}$ и $\alpha^{\pm}_{\rm ov}\langle 3\rangle_{II}$ принадлежность их типу I и, соответственно, типу II обеспечивается невыпуклым и, соответственно, выпуклым расположением их овалов по отношению к особой точке квинтики (ср.[4], §4).

Наконец, в каждую из конфигураций $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}\langle 2\rangle$ входит квинтика Q: $(196x^2 - 81y^2)(4x^2 - (3y+12)^2)y - \lambda(x^2+y^2)(y+5) = 0$, где λ - некоторое положительное число (см. рис.4b). Ее овалы переставляются симметрией $(x;y) \mapsto (-x;y)$.

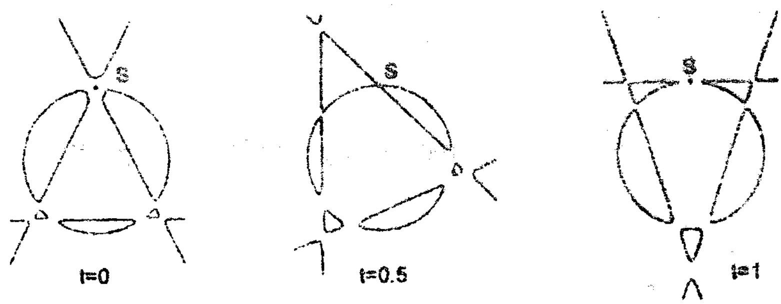

Рис. 1: Квинтики конфигураций $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}\langle 5\rangle^{\pm}$.

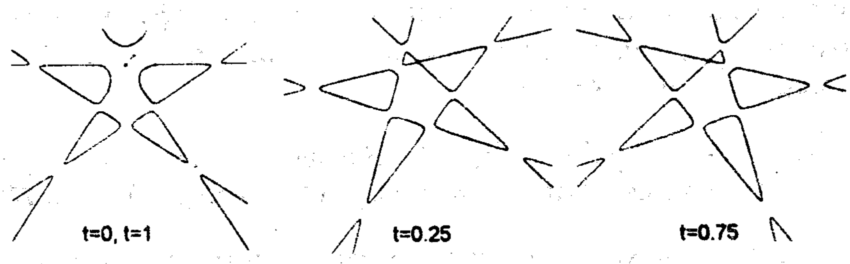

Рис. 2: Квинтики конфигураций $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}\langle 4\rangle$.

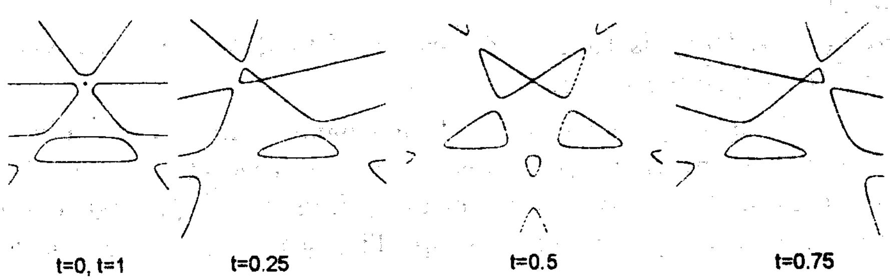

Рис. 3: Квинтики конфигураций $\alpha^{\pm}_{\mathrm{ov}}\langle 3\rangle_{II}$.

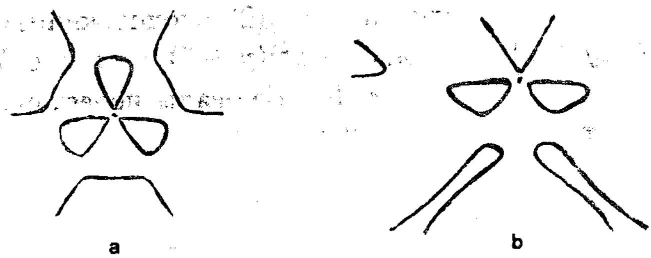

Рис. 4: Квинтики конфигураций: a) $\alpha^{\pm}_{\text{ov}}\langle 3\rangle^{\pm}_{I}$, b) $\alpha^{\pm}_{\text{ov}}\langle 2\rangle$.

Литература

1. **Звонилов В.И.** Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде// *Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер.1: мат., мех., инф. 1999. Вып. 3. С. 81–88.*

2. **Звонилов В.И.** Жесткая изотопическая классификация вещественных тригональных кривых на поверхностях Хирцебруха// *Алгебра и анализ. В печати.*

3. **Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V.** Real Enriques surfaces. Lecture Notes in Math., 2000. Vol. 1746. Springer-Verlag. 259 p.

4. **Виро О.Я.** Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет //*УМН. 1986. Т. 41. Вып.3. С. 45–67.*

Summary

Zvonilov V.I. Rigid Isotopy Classification of Real Algebraic Curves of Bidegree (4,3) on a Hyperboloid. Appendix

This notice is an appendix to the author's paper, which was published earlier and had the same title. The paper had the unproved Lemma involved in the Theorem about the rigid isotopy classification of real algebraic curves of bidegree (4,3) with a single node or cusp. The appendix is a proof of the Lemma.

Сыктывкарский университет *Поступила 29.09.2003*