*Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003*

УДК 513.88

К ВОПРОСУ О ПОРЯДКОВОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИОНАЛА ШОКЕ

А. Г. Порошкин

Выясняется связь между непрерывностью по направлениям нечеткой меры и порожденного ею функционала Шоке.

В работе исследуется вопрос о связи между порядковой непрерывностью функционала Шоке на K_σ-пространстве со слабой единицей и непрерывностью порождающей его нечеткой меры на базе этого пространства. Терминология, принятая в работе, в основном соответствует монографиям Б.З.Вулиха [1], Д.А.Владимирова [2], а также главе X монографии Л.В.Канторовича и Г.П.Акилова [3].

I.

Предварительно докажем два вспомогательных предложения о предельном переходе под знаком интеграла. В них речь пойдет о положительных монотонных функциях, заданных на промежутке $< a, b > \subset \mathbf{R}$, так что и предельная функция также будет монотонной в том же смысле, а поэтому интегралы от них можно понимать как в смысле Лебега, так и в смысле Римана. В особых случаях, когда интегрируемая функция f равна $+\infty$ в точках некоторого промежутка $< \alpha, \beta > \subset < a, b >$, можем считать, что интеграл $(R) \int\limits_a^b f(\lambda) d\lambda$ определен с помощью сечений [1]

$$[f]_n(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{при } \lambda \leqslant n, \\ n & \text{при } \lambda > n \end{cases}$$

[1]Учитывая принятые в теории упорядоченных пространств обозначения и наш подход к определению функционала Шоке, нам будет удобно обозначать аргумент подинтегральной функции буквой λ.

и предельного перехода $(R)\int\limits_a^b f d\lambda = \lim \int\limits_a^b [f]_n d\lambda$. Понятно, что в этом случае $(R)\int\limits_a^b f d\lambda = (L)\int\limits_a^b f d\lambda = +\infty$.

Следующая лемма обобщает (правда, с оговоркой о монотонности функций) классическую теорему Леви на случай обобщенных последовательностей (направлений).

Лемма 1. *Пусть $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ –возрастающее направление положительных монотонных (в одном и том же смысле) на промежутке $< a,b >\subset \mathbf{R}$ функций и $f(\lambda) = \lim\limits_\alpha f_\alpha(\lambda)$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda = \lim_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda. \tag{1}$$

Доказательство. Понятно, что $\int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda \geqslant \lim\limits_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda$. Установим противоположное неравенство. Будем считать все f_α и f убывающими (в случае возрастающих f_α и f рассуждения аналогичны).

А. Если $I = \int\limits_a^b f d\lambda$ – собственный интеграл (следовательно, $a,b \in \mathbf{R}$, f определена на $[a,b]$ и ограничена), то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\tau = \{a = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n = b\}$, в котором нижняя сумма Дарбу $s(f,\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k\Delta\lambda_k$ удовлетворяет неравенству $s(f,\tau) > I - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Здесь в силу убывания f $m_k = f(\lambda_{k+1})$, $k = 0,1,...,n-1$. Если положим $c_k = m_k - \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ и $g(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k K_{[\lambda_k,\lambda_{k+1})}(\lambda)$, то получим

$$\int\limits_a^b g(\lambda)d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\Delta\lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(m_k - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta\lambda_k =$$

$$= s(f,\tau) - \frac{\varepsilon}{2} > \int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda - \varepsilon. \tag{2}$$

При каждом $k = 0,1,...,n-1$ имеем $f_\alpha(\lambda_{k+1}) \uparrow f(\lambda_{k+1}) > c_k$, поэтому найдется α_k такой, что при $\alpha \geqslant \alpha_k$ будет

$$f_\alpha(\lambda_{k+1}) > c_k. \tag{3}$$

Если взять $\overline{\alpha} \geqslant \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$, то неравенства (3) будут выполняться при $\alpha \geqslant \overline{\alpha}$ уже одновременно для всех k. В силу убывания функции f

при $\alpha \geqslant \overline{\alpha}$ имеем $f_\alpha(\lambda) \geqslant f_\alpha(\lambda_{k+1}) > c_k$ для $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ и для всех k. Отсюда в силу (2) следует, что

$$\int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda \geqslant \int\limits_a^b g(\lambda)d\lambda > \int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda - \varepsilon,$$

и перейдя к пределу по α, в силу произвольности ε, получим

$$\lim_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda \geqslant \int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda.$$

Б. Пусть теперь $I = \int\limits_a^b f d\lambda$ – несобственный риманов интеграл, сходящийся или нет (особыми могут быть лишь точки a, b). Для произвольного $\xi < I$ найдем такие $c > a$, $d < b$, чтобы было

$$\xi < \int\limits_c^d f d\lambda < +\infty.$$

Для собственного интеграла $\int\limits_c^d f d\lambda$ по доказанному в п. А имеем

$$\lim_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda \geqslant \lim_\alpha \int\limits_c^d f_\alpha(\lambda)d\lambda \geqslant \int\limits_c^d f(\lambda)d\lambda > \xi,$$

что в силу произвольности $\xi < I$ означает $\lim\limits_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda \geqslant I$.

В. В особом случае, если $f(\lambda) \equiv +\infty$ при $\lambda \in <a, d] \subset <a, b>$, мы имеем $\lim\limits_\alpha f_\alpha(d) = f(d) = +\infty$, так что для любого $n \in \mathbf{N}$ найдется $\alpha_n \in A$, что при $\alpha \geqslant \alpha_n$ будем иметь $f_\alpha(\lambda) \geqslant n$ и $\int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda \geqslant n(d-a)$, откуда в силу произвольности n $\lim\limits_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda = +\infty = \int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda$.

Замечание 1. Условие монотонности функций f_α в лемме 1 является существенным: например, если $< a, b >= [0, 1]$, $A = \{\alpha\}$ – семейство конечных подмножеств $[0, 1]$, упорядоченная по включению и $f_\alpha(\lambda) = K_\alpha(\lambda)$ – индикатор множества α, то $f_\alpha \uparrow 1$, однако $\int\limits_0^1 f_\alpha(\lambda)d\lambda = 0$ $\forall\alpha$ и $\lim \int\limits_0^1 f_\alpha(\lambda)d\lambda \neq \int\limits_0^1 1 d\lambda$.

Таким образом, теорема Леви, справедливая для обычных последовательностей функций, на обобщенные последовательности не распространяется, если на функции f_α не наложить дополнительных требований (даже если предельная функция измерима).

Лемма 2. *Пусть* $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ *– убывающее направление положительных монотонных (в одном смысле) на промежутке* $< a, b > \subset \mathbf{R}$ *функций и* $f(\lambda) = \lim\limits_\alpha f_\alpha(\lambda)$. *Тогда, если* $\int\limits_a^b f_\beta(\lambda)d\lambda < +\infty$ *для некоторого* $\beta \in A$, *то*

$$\int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda = \lim_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda. \tag{1}$$

Доказательство как и выше проведем для убывающих функций f_α. Из монотонности интеграла по функциям следует

$$\int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda \leqslant \lim_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda)d\lambda\ (< +\infty), \tag{4}$$

и нам остается получить противоположное неравенство.

А. Предположим сначала, что интеграл $\int\limits_a^b f_{\alpha_0}(\lambda)d\lambda$ (а, значит, и $\int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda$) – собственный, так что $a, b \in \mathbf{R}$ и можем считать $< a, b > = [a, b]$. Взяв произвольно $\varepsilon > 0$, найдем такое разбиение $\tau = \{a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b\}$ сегмента $[a, b]$, в котором верхняя сумма Дарбу $S(f,\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ удовлетворяла бы неравенству

$$S(f,\tau) < \int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Заметим, что здесь $M_k = f(\lambda_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Положим теперь $c_k = M_k + \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ и введем функцию

$$h(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k K_{[\lambda_k, \lambda_{k+1})}(\lambda).$$

Ясно, что $h(\lambda) > f(\lambda)\ \forall \lambda \in [a, b)$, причем в силу (5)

$$\int\limits_a^b h(\lambda)d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \left(M_k + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta\lambda_k = S(f,\tau) + \frac{\varepsilon}{2} < \int\limits_a^b f(\lambda)d\lambda + \varepsilon.$$

При каждом $k = 0, 1, ..., n-1$ имеем $f_\alpha(\lambda_k) \downarrow f(\lambda_k) < c_k$, поэтому для каждого k найдется $\alpha_k \geqslant \beta$ такой, что при $\alpha \geqslant \alpha_k$ будет $f_\alpha(\lambda_k) < c_k$.В силу убывания функции f_α неравенство $f_\alpha(\lambda) < c_k$ будет выполняться при $\alpha \geqslant \alpha_k$ и при $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Поэтому если взять $\overline{\alpha} \geqslant \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$, то при $\alpha \geqslant \overline{\alpha}$ и любом $\lambda \in [a, b)$ будет выполняться неравенство $f_\alpha(\lambda) < h(\lambda)$. Значит,

$$\lim_\alpha \int_a^b f_\alpha(\lambda) d\lambda \leqslant \int_a^b h(\lambda) < \int_a^b f(\lambda) d\lambda + \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности ε, $\lim\limits_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda) d\lambda \leqslant \int\limits_a^b f(\lambda) d\lambda,$, что вместе с противоположным неравенством дает равенство (1).

Б. Пусть теперь все интегралы $\int\limits_a^b f_\alpha(\lambda) d\lambda$ несобственные. Для $\varepsilon > 0$ подберем $[a', b'] \subset < a, b >$ так, чтобы

$$\int_a^{a'} f_\beta(\lambda) d\lambda + \int_{b'}^b f_\beta(\lambda) d\lambda < \varepsilon.$$

Тогда, тем более для функций f и f_α, $\alpha \geqslant \beta$, имеем

$$\int_a^{a'} f(\lambda) d\lambda + \int_{b'}^{b} f(\lambda) d\lambda < \varepsilon \text{ и } \int_a^{a'} f_\alpha(\lambda) d\lambda + \int_{b'}^b f_\alpha(\lambda) d\lambda < \varepsilon.$$

Последние неравенства равносильны следующим

$$\int_a^b f(\lambda) d\lambda < \int_{a'}^{b'} f(\lambda) d\lambda + \varepsilon \text{ и } \int_a^b f_\alpha(\lambda) d\lambda < \int_{a'}^{b'} f_\alpha(\lambda) d\lambda + \varepsilon.$$

Переходя к пределу по α в последнем неравенстве и учитывая справедливость равенства (1) для собственных интегралов, получим

$$\lim_\alpha \int_a^b f_\alpha(\lambda) d\lambda \leqslant \lim_\alpha \int_{a'}^{b'} f_\alpha(\lambda) d\lambda + \varepsilon = \int_{a'}^{b'} f(\lambda) d\lambda + \varepsilon \leqslant \int_a^b f(\lambda) d\lambda + \varepsilon,$$

или, в силу произвольности ε, $\lim\limits_\alpha \int\limits_a^b f_\alpha(\lambda) d\lambda \leqslant \int\limits_a^b f(\lambda) d\lambda$, что вместе с (4) дает равенство (1).

Замечание 2. Без предположения монотонности функций f_α на $< a, b >$ лемма 2 также неверна. Так, если $A = \{\alpha\}$ – совокупность всех подмножеств сегмента $[0,1]$ меры 0, упорядоченная по включению, то направление функций $f_\alpha = 1 - K_\alpha \downarrow 0 = f$, однако, $\int\limits_0^1 f_\alpha d\lambda = 1$ не $\to 0 = \int\limits_0^1 d\lambda$.

В общем случае предельная функция f может оказаться и неизмеримой.

II.

Кратко напомним определение функционала Шоке (см. [4, 5, 6]).

Пусть X – K_σ-пространство со слабой единицей $\mathbf{1}$ [3], [2] E – база X [1], μ – нечеткая мера на E (т.е. функция $\mu : E \to \overline{\mathbf{R}}^+$ со свойствами: а) $\mu\mathbf{0} = 0$; б) $\mu e_1 \leqslant \mu e_2$ при $e_1 \leqslant e_2$). [3] След элеменгта $x \in X$ обозначаем e_x, а характеристику x – $(e_\lambda^x)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ ([1], с. 119), $\Big(x\Big)$ означает оператор проектирования на компоненту, порожденную элементом x.

Для каждого $x \in X$ введем два семейства единичных элементов [4-6]:

$$a_\lambda^x := (e_\lambda^x)' = \mathbf{1} - e_\lambda^x, \quad b_\lambda^x := e_{(\lambda 1 - x)_-} = \Big((\lambda\mathbf{1} - x)_-\Big)\mathbf{1}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Ввиду того, что для любого $u \in X$ имеем $u_- = (-u) \vee \mathbf{0} = (-u)_+$, b_λ^x можем выразить иначе, используя характеритику элемента $(-x)$:

$$b_\lambda^x = e_{(\lambda 1 - x)_-} = e_{(-\lambda 1 - (-x))_+} = e_{-\lambda}^{-x}.$$

Семейства $(a_\lambda^x), (b_\lambda^x)$ убывают от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{0}$, причем для $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ имеем $a_{\lambda_1}^x \leqslant b_\lambda^x \leqslant a_\lambda^x \leqslant b_{\lambda_2}^x$ ([4-6]). Кроме того, они удовлетворяют следующим условиям (подробные доказательства см. в [6]):

а) если $x_\xi \in X$, $\xi \in \Xi$, и $x = \inf\limits_\xi x_\xi$, то $a_\lambda^x = \inf\limits_\xi a_\lambda^{x_\xi}$ $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, отсюда, в частности, следует

б) если $x_\alpha \downarrow x$, то $a_\lambda^{x_\alpha} \downarrow a_\lambda^x$ (непрерывность a_λ^x по убывающим направлениям;

в) если $x_\xi \in X$, $\xi \in \Xi$, и $x = \sup\limits_\xi x_\xi$, то $b_\lambda^x = \sup\limits_\xi b_\lambda^{x_\xi}$ $\forall \lambda \in \mathbf{R}$; в частности, отсюда получаем непрерывность b_λ^x по возрастающим направлениям при любом $\lambda \in \mathbf{R}$:

---

[2]В [1] – K_σ-пространство с единицей. Слабая единица – это элемент $u \in X$, удовлетворяющий условию $u \wedge |x| > \mathbf{0}$ $\forall$ $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$.

[3]В определении нечеткой меры из [7] мы оставили лишь два основных свойства, опустив свойства непрерывности. В необходимых случаях мы их будем особо оговаривать.

г) если $x_\alpha \uparrow x$, то $b_\lambda^{x_\alpha} \uparrow_\alpha b_\lambda^x$.

Кроме того, из а) и б) следует монотонность a_λ^x и b_λ^x по x при фиксированном λ:

д) если $x \leqslant x_1$, то $a_\lambda^x \leqslant a_\lambda^{x_1}$, $b_\lambda^x \leqslant b_\lambda^{x_1}$.

Имея нечеткую меру $\mu : E \to \overline{\mathbf{R}}^+$, определим для каждого $x \in X^+$ две положительные убывающие числовые функции на $[0, +\infty)$:

$$f_x(\lambda) = \mu a_\lambda^x,\ g_x(\lambda) = \mu b_\lambda^x.$$

Из указанных выше свойств a_λ^x, b_λ^x и монотонности μ следует, что при $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ выполнены неравенства

$$g_x(\lambda_1) \leqslant f_x(\lambda_1) \leqslant g_x(\lambda) \leqslant f_x(\lambda) \leqslant g_x(\lambda_2) \leqslant f_x(\lambda_2),$$

откуда, в свою очередь, следует, что в точках непрерывности (т.е. почти всюду на $[0, +\infty)$ относительно меры Лебега) функции g_x и f_x совпадают, а поэтому

$$\int_0^{+\infty} g_x(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} f_x(\lambda)d\lambda.$$

Эти два интеграла и определяют **функционал Шоке** на X^+, порожденный нечеткой мерой μ:

$$\varphi_\mu(x) = \int_0^{+\infty} g_x(\lambda)d\lambda = \int_0^{+\infty} f_x(\lambda)d\lambda. \tag{6}$$

Понятно, что $\varphi_\mu(\mathbf{0}) = 0$ и $0 \leqslant \varphi_\mu(x) \leqslant +\infty\ \forall x \in X^+$. Кроме того, в случае непрерывности μ по последовательностям (снизу, сверху, *оσ*-непрерывности) аналогичным свойством обладает и φ_μ ([5], с. 70; [6], с. 28).

Ниже мы усилим последнее утверждение; покажем, что в случае непрерывности μ по направлениям в том или ином смысле этим же свойством обладает функционал φ_μ.

III.

Теорема 1. *Функционал φ_μ непрерывен на X^+ по возрастающим направлениям тогда и только тогда, когда непрерывна на E по возрастающим направлениям нечеткая мера μ.*

Доказательство. Пусть μ непрерывна по возрастающим направлениям, $x_\alpha \in X^+$ и $x_\alpha \uparrow x$. Тогда в силу предложения г) из п. II $b_\lambda^{x_\alpha} \uparrow_\alpha b_\lambda^x$, а поэтому

$$g_{x_\alpha}(\lambda) = \mu b_\lambda^x \uparrow_\alpha \mu b_\lambda^x = g_x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

По лемме 1

$$\varphi_\mu(x_\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} g_{x_\alpha}(\lambda) d\lambda \uparrow_\alpha \int\limits_0^{+\infty} g_x(\lambda) d\lambda = \varphi_\mu(x).$$

Если же φ_μ непрерывна по возрастающим направлениям, то такова же и $\mu = \varphi_\mu|_E$ (см. [5], с. 70; [6], с. 25).

Теорема 2. *Функционал φ_μ условно непрерывен по убывающим направлениям (т.е. $x_\alpha \in X^+$, $x_\alpha \downarrow x$ и $\varphi_\mu(x_{\alpha_0}) < +\infty$ для некоторого $\alpha_0 \in A \Rightarrow \varphi_\mu(x_\alpha) \downarrow \varphi_\mu(x)$), тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает нечеткая мера μ на E.*

Доказательство. Пусть μ условно непрерывна по убывающим направлениям: $e_\alpha \in X_0$, $e_\alpha \downarrow e$ и $\mu e_{\alpha_0} < +\infty$ для некоторого $\alpha_0 \in A \Rightarrow \mu e_\alpha \downarrow \mu e$. Пусть $x_\alpha \in X^+$ и $x_\alpha \downarrow x$, причем $\varphi_\mu(x_{\alpha_0}) = \int\limits_0^{+\infty} f_{x_{\alpha_0}}(\lambda) d\lambda < +\infty$ для некоторого α_0. Значит, $f_{x_{\alpha_0}}(\lambda) = \mu a_\lambda^{x_{\alpha_0}} < +\infty$ при любом $\lambda > 0$. Так как по предложению б) из п. II $a_\lambda^{x_\alpha} \downarrow a_\lambda^x$ при любом $\lambda > 0$ и μ условно непрерывна по убывающим направлениям, то $\mu a_\lambda^{x_\alpha} \downarrow \mu a_\lambda^x$ ($\lambda > 0$), или $f_{x_\alpha}(\lambda) \downarrow f_x(\lambda), \lambda > 0$. Значит по лемме 2

$$\varphi_\mu(x_\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} f_{x_\alpha}(\lambda) d\lambda \downarrow \int\limits_0^{+\infty} f_x(\lambda) d\lambda = \varphi_\mu(x).$$

В свою очередь непрерывность μ из непрерывности φ_μ снова следует в силу равенства $\varphi_\mu|_E = \mu$.

Определение 1. Элемент $x \in X$ назовем **μ-суммируемым**, если $\varphi_\mu(|x|) < +\infty$.

Класс всех μ-суммируемых элементов X обозначим $X(\mu)$, а всех положительных μ-суммируемых элементов – $X^+(\mu)$.

Поскольку функционал φ_μ положительно однороден на X^+ ([5], с. 70; [6], с. 25), то множество $X(\mu)$ будет **однородным подмножеством** ($\alpha X(\mu) = X(\mu)$, $\alpha \in \mathbf{R}$), а $X^+(\mu)$ – **положительно однородным подмножеством** ($\alpha X^+(\mu) = X^+(\mu)$, $\alpha \geqslant 0$) пространства X. Кроме того из монотонности φ_μ следует, что $X(\mu)$ является **солидным** ($x \in X$, $y \in X(\mu)$, $|x| \leqslant |y| \Longrightarrow x \in X(\mu)$, см. [3], с. 364). Поэтому для любой нечеткой меры $X(\mu)$ есть солидное однородное подмножество X.

Далее из $\varphi_\mu|_E = \mu$ следует, что для единичного элемента $e \in E$ условия $e \in X^+(\mu)$ и $\mu e < +\infty$ равносильны.

Теорема 3. *Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ – направление в $X^+(\mu)$, $x \in X^+$ и пусть μ – непрерывная снизу и условно непрерывная сверху нечеткая мера. Тогда если $x_\alpha \xrightarrow{o} x$, то $\varphi_\mu(x_\alpha) \to \varphi_\mu(x)$.*

Доказательство. Пусть $(u_\beta)_{\beta\in B}$ и $(v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ – направления в $X^+(\mu)$, сжимающие x_α к x соответственно снизу и сверху. Для любых фиксированных β и γ найдется индекс $\alpha_0 := \alpha(\beta,\gamma) \in A$ такой, что $u_\beta \leqslant x_\alpha \leqslant v_\gamma$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Тогда и $x, \in [u_\beta, v_\gamma]$. В силу предположений о нечеткой мере μ по теоремам 1 и 2 получаем $\varphi_\mu(u_\beta) \uparrow \varphi_\mu(x)$, $\varphi_\mu(v_\gamma) \downarrow \varphi_\mu(x)$. Значит и $\varphi_\mu(x_\alpha) \to \varphi_\mu(x)$.

IV.

Рассмотрим следующие два возможных продолжения φ_μ с $X^+(\mu)$ на $X(\mu)$:

$$\varphi'_\mu(x) = \varphi_\mu(|x|) \quad \text{и} \quad \varphi''_\mu(x) = \varphi_\mu(x_+) - \varphi_\mu(x_-).$$

Понятно, что $|\varphi''_\mu(x)| \leqslant \varphi'_\mu(x)$ для любого $x \in X(\mu)$.

На основе теоремы 3 можем доказать, что справедлива следующая

Теорема 4. *Если μ непрерывна по возрастающим и условно непрерывна по убывающим направлениям, то φ'_μ и φ''_μ о-непрерывны на $X(\mu)$.*

Действительно, если $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ в $X(\mu)$, то и $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$, $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$, $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$ в $X(\mu)$. По теореме 3 $\varphi_\mu(|x_\alpha|) \to \varphi_\mu(|x|)$, $\varphi_\mu(x_\alpha^+) \to \varphi_\mu(x^+)$ и $\varphi_\mu(x_\alpha^-) \to \varphi_\mu(x^-)$, откуда следует $\varphi'_\mu(x_\alpha) \to \varphi'_\mu(x)$ и $\varphi''_\mu(x_\alpha) \to \varphi''_\mu(x)$.

Если на μ наложить дополнительно ограничение типа субаддитивности, то можно выявить дополнительные свойства множества $X(\mu)$.

Определение 2. Нечеткую меру μ назовем **N-субаддитивной**, если существует число $N \geqslant 1$ такое, что $\mu(e_1 \vee e_2) \leqslant N(\mu e_1 + \mu e_2)$ для любых $e_1, e_2 \in E$.

Теорема 5. *Если μ N-субаддитивна на E, то φ_μ удовлетворяет условиям:*

А) $\varphi_\mu(|x| \vee |y|) \leqslant N[\varphi_\mu(|x|) + \varphi_\mu(|y|)]$

Б) $\varphi_\mu(|x| + |y|) \leqslant 2N[\varphi_\mu(|x|) + \varphi_\mu(|y|)]$.

Доказательство. По предложению в) в п. II имеем $b_\lambda^{|x|\vee|y|} = b_\lambda^{|x|} \vee b_\lambda^{|y|}$ $\forall\, \lambda \in R$, а поэтому

А) $\varphi_\mu(|x| \vee |y|) = \int\limits_0^\infty \mu b_\lambda^{|x|\vee|y|} d\lambda = \int\limits_0^\infty \mu(b_\lambda^{|x|} \vee b_\lambda^{|y|}) d\lambda \leqslant N \int\limits_0^\infty (\mu b_\lambda^{|x|} + \mu b_\lambda^{|y|}) d\lambda = N[\varphi_\mu(|x|) + \varphi_\mu(|y|)]$.

Далее из неравенств $|x|, |y| \leqslant |x| \vee |y|$, $|x| + |y| \leqslant 2(|x| \vee |y|)$, монотонности и положительной однородности φ_μ с помощью А) получаем

Б) $\varphi_\mu(|x|+|y|) \leqslant \varphi(2(|x|\vee|y|)) = 2\varphi_\mu(|x|\vee|y|) \leqslant 2N[\varphi_\mu(|x|)+\varphi_\mu(|y|)]$.

Следствие. Если μ N-субаддитивна, то $X(\mu)$ есть векторная подрешетка X и идеал (линейное солидное множество, [3], с.364).

Действительно, пусть $x, y \in X(\mu)$. Тогда по А) в силу неравенств $|x\wedge y|, |x\vee y| \leqslant |x|\vee|y|$ получаем $x\vee y, x\wedge y \in X(\mu)$ и $X(\mu)$ – векторная подрешетка X. Далее по Б) в силу неравенств $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ получаем $x+y \in X(\mu)$, а так как выше отмечено, что из $x \in X(\mu)$ следует $\lambda x \in X(\mu)\ \forall\ \lambda \in R$, то $X(\mu)$ есть линейное подпространство X.

Литература

1. **Вулих Б.З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

2. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 318 с.

3. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

4. **Порошкин А.Г.** О метризуемости порядковых топологий в K-пространствах//*Сыктывкарский ун-т. Сыктывкар, 1981. 16 с. / Деп. в ВИНИТИ № 734-81 Деп.*

5. **Порошкин А.Г.** К вопросу о метризуемости секвенциальной порядковой топологии в упорядоченных группах и векторных пространствах//*Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 1995. Вып. 1. С. 63–74.*

6. **Порошкин А.Г., Шергин Ю.В.** О функционале Шоке и одном его применении в теории меры//*Вестник Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1: мат., мех., инф. 2001. Вып. 4. С. 21–40.*

7. **Ralescu D., Adams G.** The fuzzy Integral//*Journal of Mathematical Analysis and Applications. 75.(1980). P. 562–570.*

Summary

Poroshkin A. G. On the problem of order continuity of Choquet functional

The problem of order continuity of Choquet functional is considered in connection with the corresponding continuity of fuzzy measure that generates this functional.

Сыктывкарский университет *Поступила 27.06.02*