Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 519.874.4

Непрерывный аналог задачи об аренде оборудования

А.А.Холопов, Н.А.Стенина

В данной работе рассматривается непрерывный вариант хорошо известной в исследовании операций задачи об аренде (замене) оборудования. Приводятся несколько возможных постановок непрерывных ЗАО, ставится проблема существования оптимального плана для них. Для ряда задач с однородной функцией стоимости мы даем достаточные условия для полного аналитического решения.

1. Дискретная задача об аренде оборудования.

В исследовании операций классической является задача об аренде или замене оборудования, сокращенно – дискретная ЗАО [2, с. 108].

Пусть $T > 0$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ - фиксированный упорядоченный набор чисел из $[0, T]$. Считается, что в любой из моментов t_k можно взять в аренду оборудование и вернуть его также в любой последующий момент $t_n > t_k$. Оборудование требуется иметь при всех $t \in [0, T]$, поэтому в некоторые промежуточные моменты $t_{i_j} \in \{t_n\}_{n=1}^{N}$ сданное оборудование тут же снова берется в аренду на очередной срок. В момент $t_{i_0} = 0$ оборудование берется в первый раз и в момент $t_{i_k} = t_N = T$ окончательно возвращается. Возрастающая подпоследовательность $0 = t_{i_0} < t_{i_1} < \ldots < t_{i_k} = T$ называется *планом аренды* (дискретной ЗАО). Стоимости аренды на сроки $[t_k, t_n]$ известны заранее и задаются набором чисел $(c_{kn}, {}_{0 \le k < n \le N})$. Стоимость плана аренды равна $F_N = c_{i_0 i_1} + c_{i_1 i_2} + \ldots + c_{i_{k-1} i_k}$. Задача состоит в нахождении оптимального плана $0 = t^*_{i_0} < t^*_{i_1} < \ldots < t^*_{i_k} = T$, имеющего среди планов наименьшую стоимость F^*_N. Для нахождения оптимального плана, который, очевидно, существует в силу конечности числа планов, применяют различные эффективные варианты метода динамического программирования (метода потенциалов и др.) [1, 2]. Существенно в дискретной ЗАО то, что число N, число возможных сроков аренды, фиксировано. Заметим, что дискретная ЗАО полностью задается числами (c_{ij}) и имеет решение при любых их значениях. Что произойдет, когда для данного T число N может быть произвольным или моментом продления аренды (моментом замены) оборудования может быть любое число t из $[0,T]$? В последнем случае соответствующие задачи можно назвать *непрерывными ЗАО*. Они естественно возникают, например, при непрерывном начислении процентов, когда капитал (электронный счет) может изменяться ежесекундно или когда число N возможных сроков аренды огромно. Для непрерывной ЗАО целевая функция (стоимость) является "плохой" функцией от аргумента (плана аренды), поэтому известные в литературе результаты, например, в [3], для непрерывных аналогов задач потокового типа неприменимы.

2. Постановка упрощенной непрерывной ЗАО.

Введем новые понятия функции стоимости, плана аренды и его стоимости.

Определение. *Функция $c : \Delta \to R$, определенная на замкнутом треугольнике $\Delta = \{(t,p) : 0 \leq t \leq p \leq T\}$, называется функцией стоимости аренды.*

Значение $c(t,p)$ функции стоимости трактуется как плата за аренду, заключенной с момента t до момента p. Формально можно доопределить функцию стоимости при $t > p$ равенством $c(t,p) = 0$.

Определение. *Подмножество S множества $[0,T]$ будем называть планом аренды, если оно: 1) замкнутое (в естественной топологии на прямой); 2) включает в себя точки* 0 *и* T.

Пусть Σ – множество всех планов аренды. Рассмотрим подмножество $M(S)$ *конечных* планов аренды с носителем из S:

$$M(S) = \left\{(t_i)_{i=0}^{N} : 0 = t_0 < t_1, \ldots < t_N = T,\ t_i \in S\ \forall N \in \mathbf{N}\right\}.$$

Здесь $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел. В частности, $M = M([0,T])$ – множество всех конечных планов аренды.

Определение. *Оптимальной стоимостью аренды назовем число F^*, которое находится по формуле*

$$F^* = \inf_M \left\{\sum_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1})\right\}, \qquad (1)$$

где $\sum_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1})$ – выплата за весь период $[0,T]$, которая сложена из стоимостей за отдельные периоды аренды.

Определение. *Стоимостью плана аренды S называется число*

$$F(S) = \inf_{M(S)} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}) \right\}. \tag{2}$$

В этом определении по смыслу разрешается производить аренду лишь в моменты, входящие в множество S, а в предыдущем – в любые моменты. Таким образом, оптимальная стоимость аренды это стоимость плана $[0,T] : F^* = F([0,T])$. Полезно также рассмотреть семейство задач об аренде на отрезке $[t,T]$, когда аренда начинается с момента $t \le T$. Для этого заменим в определениях, данных выше, значение $t_0 = 0$ на значение $t_0 = t$ и обозначим через

$$M_t = \left\{ (t_i)_{i=0}^N : t = t_0 < t_1, \ldots < t_N = T, \, \forall N \in \mathrm{N} \cup \{0\} \right\}$$

множество конечных планов аренды с момента t и через $f(t) = F([t,T])$ оптимальную стоимость аренды с момента t. В частности, $M = M_0$ – множество всех конечных планов аренды, $F^* = f(0)$.

Определение. *Функцию f, заданную на всем отрезке $[0,T]$, назовем функцией оптимальной стоимости аренды.*

Определение. *Нахождение функции оптимальной стоимости аренды назовем упрощенной непрерывной ЗАО.*

Функция стоимости аренды полностью определяет непрерывную ЗАО. В отличие от дискретной задачи на $c(\cdot,\cdot)$ необходимо наложить некоторые условия. Так, например, если в окрестности некоторой точки диагонали $p = t$ она принимает отрицательные значения, то инфимум в (1) и (2) будет равен $-\infty$ и задача становится бессодержательной. С прикладной точки зрения естественными являются функции стоимости аренды, обладающие следующими свойствами:

1) $c(t,p)$ непрерывна на Δ (значит, равномерно непрерывна, а также ограниченна);

2) $c(t,p) \ge 0$ при $p \ge 0, t \ge 0$;

3) $c(t,p)$ возрастает по p при фиксированном t;

4) $c(t,p)$ убывает по t при фиксированном p.

Если за оформление аренды не берется дополнительная плата, то возникает пятое условие:

5) $c(t,p) \to 0$ при $p \to t + 0$.

Условие 5) при условии непрерывности функции $c(t,p)$ совпадает с условием $c(t,t) = 0$.

В дальнейшем будем считать эти условия выполненными, если не оговорено противное, и называть соответствующие функции стоимости *стандартными.*

Теперь инфимум в (1),(2) существует из-за неотрицательности функции c (но может не достигаться на конечных планах) и упрощенная задача поставлена корректно.

Пример 1. Пусть $c(t,p) = p - t$. Тогда для любого конечного плана выполнено равенство $\sum\limits_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}) \equiv c(0,T) = T$ и $F^* = T$. Аналогично, $f(t) = T - t$. Этот пример показывает, что оптимальную стоимость могут давать все планы аренды и в этом смысле они все "оптимальны". О точных определениях оптимального плана см. ниже.

Пример 2. Пусть $c(t,p) = \sqrt{p-t}$. Несложно показать, что в силу вогнутости функции $\sqrt{x}$ для любого конечного плана выполнено $\sum\limits_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}) \geq c(0,T) = \sqrt{T}$, поэтому $F^* = \sqrt{T}$. Аналогично, $f(t) = \sqrt{T-t}$. Очевидно, что план $\{0, T\}$ (аренда сразу на весь срок) является единственно оптимальным.

Пример 3. Пусть $c(t,p) = (p-t)^2$. Рассмотрим конечные планы, соответствующие равномерному разбиению $[0,T]$ на N частей. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}) = \frac{T^2}{N}$, поэтому при $N \to \infty$ получаем $F^* = 0$. Аналогично, $f(t) \equiv 0$. Этот пример показывает необычность непрерывных ЗАО, когда при ненулевых стоимостях аренды можно получить нулевую оптимальную стоимость.

3. Понятие оптимального плана для непрерывной ЗАО.

Как и в любой задаче оптимизации, важным является понятие оптимального плана, как множества точек из отрезка $[0,T]$, которое "формирует" оптимальную стоимость F^*. Для дискретной ЗАО оптимальный план $0 = t^*_{i_0} < t^*_{i_1} < \ldots < t^*_{i_k} = T$ определяется равенством

$$F^* = c_{i_0 i_1} + c_{i_1 i_2} + \ldots + c_{i_{k-1} i_k}. \tag{3}$$

Для непрерывной ЗАО аналогичное определение не годится, так как равенство в (1) может не достигаться ни для какого конечного набора точек (пример 3 !). Ниже мы предлагаем два варианта определения оптимального плана.

Пусть $\tau = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = T\}$ конечный план аренды из $n+1 \geq 2$ точек. Рассмотрим семейство $\left(\tau^k\right)_{k=1}^{\infty}$ конечных планов, состоящих из $n_1 + 1, n_2 + 1, \ldots, n_k + 1, \ldots$ точек: $\tau^k = \{0 = t_0^k, t_1^k, \ldots, t_{n_k}^k = T\}$.

Семейство конечных планов назовем *возрастающим*, если $\tau^1 \subset \tau^2 \subset \ldots \subset \tau^k \subset \ldots$. Допускается совпадение планов в семействе, в частности, возможен случай $\tau^1 = \tau^2 = \ldots \tau^k = \tau$.

Определение А. *План S^* называется оптимальным, если существует возрастающее семейство конечных планов $\left(\tau_*^k\right)_{k=1}^{\infty}$, такое что*

$$1)\overline{\lim_{k\to\infty} \tau_*^k} = \overline{\bigcup_{k\geq 1} \tau_*^k} = S^*; \tag{4}$$

$$2) F^* = \lim_{k\to\infty} \left[c(t_0^k, t_1^k) + c(t_1^k, t_2^k) + \ldots + c(t_{n_{k-1}}^k, t_{n_k}^k)\right]. \tag{5}$$

(В первом условии черта означает замыкание множества).

По условию (4) все точки конечных планов находятся в S^* и в пределе при $k \to \infty$ они всюду плотны в S^*. Если S^* конечное множество, то, начиная с некоторого k, выполнено $\tau^k = \tau^{k+1} = \ldots = S^*$ и в формуле (5) знак предела можно убрать. Тогда получаем равенство (3), что согласуется с определением оптимального плана для дискретной ЗАО.

В рассмотренных выше примерах можно показать, что по данному определению S^*– *произвольный план* в примере 1, $S^* = \{0, T\}$ и единственен – в примере 2, $S^* = [0, T]$ и единственен – в примере 3.

Следующий вариант определения больше соответствует смыслу непрерывной задачи.

Определение В. *Оптимальным планом аренды будем называть план S^*, который удовлетворяет следующим условиям:*

1. $F(S^*) = F^*$;

2. S^* есть минимальное по включению множество со свойством 1, то есть S^* не содержит собственного подмножества $S : F(S) = F^*$.

В рассмотренных выше примерах можно показать, что по данному определению $S^* = \{0, T\}$и единственен в примерах 1 и 2, $S^* = [0, T]$ и единственен – в примере 3.

Различие определений A и B видно из примера 1, в котором множества оптимальных планов в вариантах А и В не совпадают.

Авторам не удалось доказать существование оптимального плана аренды для задач со стандартными функциями стоимости (ни для варианта А, ни для варианта В). Трудности в доказательствах связаны с тонкими свойствами функции множеств $F(S)$, определенной через инфимум. Приведем некоторые соображения, связанные с определением В. Рассмотрим множество планов, имеющих стоимость, равную оптимальной: $\Sigma^* = \{S \in \Sigma : F(S) = F^*\}$. Очевидно, что это непустое множество, так как $[0, T] \in \Sigma^*$ по определению. Введем отношение порядка в этом множестве по включению: $S_1 \prec S_2 \stackrel{df}{=} S_1 \subset S_2$ (неравенство и включение нестрогие). Таким образом, Σ^* будет частично упорядоченным множеством. Рассмотрим в Σ^* произвольную цепь $\Xi = \{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Если доказать, что для любой цепи Ξ существует миноранта, то по лемме Цорна множество Σ^* будет иметь минимальный элемент, то есть оптимальный план в смысле определения В. Естественно рассмотреть в качестве миноранты $\tilde{S} = \bigcap\limits_{\alpha \in A} s_\alpha$. Очевидно, что $\tilde{S}$ является планом аренды (благодаря условию замкнутости планов) и $\tilde{S} \prec s_\alpha$ для всех α. Теперь существование оптимального плана S^* сводится к справедливости равенства $F(\tilde{S}) = F^*$.

Определение. *Задачу нахождения оптимального плана S^* и оптимальной стоимости F^* будем называть непрерывной ЗАО в полном варианте или просто непрерывной ЗАО.*

4. Три модели упрощенной непрерывной ЗАО и их эквивалентность.

Упрощенную непрерывную ЗАО, рассмотренную в пункте 2, назовем задачей (I) или прямой моделью. По аналогии с дискретными ЗАО сформулируем следующие две оптимизационные задачи (другие модели упрощенной непрерывной ЗАО).

Задачу нахождения функции оптимальной стоимости можно рассматривать как задачу динамического программирования. Для получения функциональных отношений (уравнений Беллмана) используют принцип оптимальности (см.[1, 2]). Из-за аддитивного характера арендных выплат в ЗАО уравнение Беллмана в нашем случае имеет вид уравнения $y(t) = \inf\limits_{t<p\leq T} \{c(t,p) + y(p)\}$ относительно некоторой функции y, заданной на $[0, T]$.

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} & y \to \sup \\ & y(t) = \inf_{t<p\leq T}\{c(t,p) + y(p)\} \ \forall t \in [0, T] \\ & y(T) = 0. \end{aligned} \qquad (II)$$

Здесь и далее под неравенствами функций понимается одновременное поточечное неравенство. Функция y, удовлетворяющая двум последним условиям (уравнению Беллмана), называется *допустимым* решением (II), а допустимое решение y^*, такое что для любого другого допустимого решения y выполнено неравенство $y^*(t) \geq y(t)$ при любом

$t \in [0, T]$, называется *оптимальным* решением (II). Задачу (II) назовем *моделью динамического программирования.*

Рассмотрим также оптимизационную задачу

$$\begin{aligned} & z \to \sup \\ & z(t) - z(s) \le c(s,t) \ \forall s,t : 0 \le s \le t \le T \qquad (III) \\ & z(T) = 0. \end{aligned}$$

Функция z на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющая двум последним условиям, называется *допустимым* решением (III), а допустимое решение z^*, такое что для любого другого допустимого решения z верны неравенства $z^*(t) \ge z(t)$ при всех t из $[0, T]$, называется *оптимальным* решением (III). Задачу (III) назовем *двойственной моделью.* Названия этих задач традиционны для исследования операций. В случае дискретной ЗАО их решения являются эквивалентными. Оказывается, это верно и для непрерывной ЗАО.

Теорема 1. *Функция оптимальной стоимости аренды f является оптимальным решением задач (II), (III) и, наоборот, оптимальные решения задач (II), (III) равны функции оптимальной стоимости $f(t)$.*

Доказательство. 1) Докажем, что f – оптимальное решение задачи (II).

1А) Покажем, что функция f не меньше любого допустимого решения задачи (II). Для этого возьмем произвольное допустимое решение y задачи (II) и произвольное разбиение отрезка $[t, T]$ на N частей: $t = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$. Из уравнения Беллмана имеем:

$$y(t) \le c(t, t_1) + y(t_1) \le \ldots \le \sum_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}).$$

Так как разбиение произвольное, перейдем к инфимуму по M_t и получим

$$y(t) \le \inf_{M_t} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}) \right\} = f(t).$$

Таким образом, для любого $t \in [0, T]$ выполнено $y(t) \le f(t)$.

1В) Покажем, что функция f является допустимым решением задачи (II). Для этого фиксируем произвольное $t \in [0, T]$ и рассмотрим некоторую точку $s \in (t, T]$. Из свойства инфимума в определении f имеем: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $s = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = T$ множества $(s, T]$, что верно неравенство

$f(s)+\varepsilon \geq \sum\limits_{i=0}^{k-1} c(t_i, t_{i+1})$. Прибавив к обеим частям этого неравенства $c(t,s)$, получим неравенство $c(t,s)+f(s)+\varepsilon \geq f(t)$. Перейдя к пределу $\varepsilon \to +0$, а затем к инфимуму по $s : t < s \leq T$, получаем

$$f(t) \leq \inf_{t<p\leq T}\{c(t,p)+f(p)\}. \tag{6}$$

Докажем неравенство в другую сторону. По определению инфимума для любого $\varepsilon > 0$ существуют точки $t = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = T$ из $(t, T]$ такие, что верно

$$f(t)+\varepsilon \geq \sum_{i=0}^{k-1} c(t_i, t_{i+1}). \tag{7}$$

По определению, $\sum\limits_{i=1}^{k-1} c(t_i, t_{i+1}) \geq f(t_1)$, и после перехода в (7) к инфимуму по M_{t_1} получается $f(t)+\varepsilon \geq c(t,t_1)+f(t_1) \geq \inf\limits_{t<p\leq T}\{c(t,p)+f(p)\}$ для любого ε. Устремляя $\varepsilon \to +0$, получим неравенство, противоположное (6). Поэтому $f(t) = \inf\limits_{t<p\leq T}\{c(t,p)+f(p)\}$. Равенство $f(T)=0$ следует из определения функции f.

Итак, функция f является допустимым решением задачи (II). Отсюда и из доказанного в пункте 1A следует, что f является оптимальным решением задачи (II).

2) Докажем, что f – оптимальное решение задачи (III).

2A) Пусть z допустимое решение задачи (III). Возьмем разбиение отрезка $[t, T]$ на N частей точками $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$. Учитывая условия на допустимые решения (III), получаем

$$z(t) \leq c(t,t_1)+z(t_1) \leq \ldots \leq \sum_{i=0}^{N-1} c(t_i, t_{i+1}) + z(T).$$

После перехода к инфимуму по семейству M_t и с учетом $z(T) = 0$ получаем $z(t) \leq f(t)$ для любого t. Получили, что f не меньше произвольного допустимого решения (III).

2B) Покажем, что функция f является допустимым решением задачи (III). Пусть $t \in [0,T]$. Так как f является допустимым решением задачи (II), то справедливо неравенство $f(t) \leq f(p)+c(t,p)$. При $p = t$ неравенство также верно, следовательно, для всех $p,t : t \leq p \leq T$ выполнено $f(t)-f(p) \leq c(t,p)$. Кроме того, $f(T)=0$ из определения.

Значит, f допустимое решение задачи (III), а с учетом пункта 2А также и оптимальное ее решение.

3) Осталось показать, что f – единственное оптимальное решение для задач (II) и (III) (для задачи (I) это верно из-за однозначности определения чисел $f(t)$). Но задачи (II) и (III) не могут иметь более одного оптимального решения из-за поточечного сравнения функций согласно определению оптимального решения. Теорема 1 доказана.

Следствием из теоремы является то, что функцию оптимальной стоимости аренды можно найти, решая любую из задач (I)–(III).

Приведем здесь два общих свойства функции оптимальной стоимости аренды f. Доказательства их несложны и здесь не приводятся.

Утверждение 1. *Функция f монотонно убывает.*

Утверждение 2. *Функция f является равномерно непрерывной.*

5. Решения некоторых классов непрерывной ЗАО.

Определение. *Задачу об аренде оборудования будем называть однородной, если функция стоимости аренды зависит от разности аргументов: $c(t,p) = H(p-t)$ для некоторой функции H (арендная плата зависит лишь от длительности срока аренды).*

Пусть задача однородна. Для стандартных функций стоимости аренды выполнены условия: 1) H непрерывна на $[0,T]$; 2) H неотрицательна; 3) H возрастающая; 4) H(0)=0. Назовем такие функции H также *стандартными.*

Из определения оптимальной стоимости и однородности задачи имеем

$$F^* = \inf_{N\in\mathbf{N},(x_i)_{i=1}^N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} H(x_i) : x_1 + x_2 + \ldots + x_N = T \right\}, \quad (8)$$

где $x_i = t_i - t_{i-1} \geq 0$.

Рассмотрим случай, когда H является выпуклой или вогнутой функцией.

Теорема 2. *Пусть стандартная H обладает следующими свойствами: 1) $H(x) > 0$ при $x > 0$; 2) H – строго выпуклая функция на $[0,T]$. Тогда оптимальным решением (в смысле определения B) непрерывной ЗАО является весь отрезок: $S^* = [0,T]$. При этом $F^* = H'(0)\cdot T$, $f(t) = H'(0)\cdot(T-t)$.*

Замечание. Здесь $H'(0)$ – производная в нуле справа, существование которой следует из 2) и из стандартности H.

Доказательство. Из строгой выпуклости и положительности H нетрудно получить, что функция $G(x) = H(x) - H'(0)x$ также выпукла, положительна и возрастающая на $(0,T]$.

С учетом этого, из (8) получаем

$$F^* = \inf_{N\in\mathbf{N},(x_i)_{i=1}^N} \left\{\sum_{i=1}^N H(x_i) : x_1 + \ldots + x_N = T\right\} =$$
$$= H'(0)T + \inf_{N\in\mathbf{N},(x_i)_{i=1}^N} \left\{\sum_{i=1}^N G(x_i) : x_1 + \ldots + x_N = T\right\} \geq H'(0)T.$$

Ограничившись семейством равномерных разбиений $\left(x_i \equiv \frac{T}{N}\right)_{N\in\mathbf{N}}$, получаем $F^* \leq \inf_{N\in N}\{NH(T/N)\} \leq \lim_{N\to\infty} NH(T/N) = H'(0)T$. Следовательно, $F^* = H'(0)T$.

Покажем теперь, что $S^* = [0,T]$. Равенство $F^* = F([0,T])$ верно по определению. Допустим, что есть другой план S, имеющий ту же стоимость F^*. Это значит, что $A = [0,T] \setminus S-$ непустое открытое множество. Следовательно, A содержит хотя бы один непустой интервал (α,β). Тогда $\forall\{t_k\} \subset S\ \exists k_0 : x_{k_0} \equiv t_{k_0+1} - t_{k_0} > \beta - \alpha$, причем константа $\beta - \alpha$ не зависит от набора $\{t_k\}$. Из монотонности G следует $G(x_{k_0}) > G(\beta - \alpha) > 0$. Отсюда получаем

$$F^* = H'(0)T + \inf_{N,(x_k)_{k=1}^N} \left\{\sum_{k=1}^N G(x_k) : x_1 + x_2 + \ldots + x_N = T\right\} > H'(0)T,$$

что противоречит условию, полученному выше. Аналогично доказывается равенство $f(t) = H'(0) \cdot (T - t)$. Теорема доказана.

То, что для выпуклых H главное значение имеет число $H'(0)$, подтверждается следующей теоремой, где выпуклости H не требуется.

Теорема 3. *Пусть стандартная H обладает следующими свойствами: 1) $\exists H'(0) = 0$; 2) $H(x) > 0$ при $x > 0$.*

Тогда непрерывная ЗАО имеет решение $S^* = [0,T], f(t) \equiv 0$.

Доказательство. Покажем, что $F^* = 0$. Из неотрицательности H имеем $F^* \geq 0$. С другой стороны, как показано при доказательстве теоремы 2,

$$F^* \leq \lim_{N\to\infty} NH(T/N) = H'(0)T = 0.$$

Отсюда получаем $F^* = 0$. Равенство $f(t) = 0$ доказывается аналогично.

Покажем, что $S^* = [0,T]$. В противном случае $A = [0,T] \setminus S^*$ содержит непустой интервал (α,β), такой что в определении F^* для всех последовательностей (t_i) хотя бы одно значение $x_i = t_{i+1} - t_i$ превысит $\beta - \alpha$. Так как H непрерывна и строго положительна при $x > 0$, то по теореме Вейерштрасса $H(x) \geq m > 0$ для всех $x \in [\beta - \alpha, T]$, поэтому

$$F^* = \inf_{N\in\mathbf{N},(x_i)_{i=1}^N} \left\{\sum_{i=1}^N H(x_i) : x_1 + x_2 + \ldots + x_N = T\right\} \geq m > 0.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Решение непрерывной ЗАО для вогнутых H следует из более общего утверждения.

Теорема 4. *Если функция стоимости аренды $c(s,t)$ удовлетворяет неравенству*

$$c(t,T) < c(t,p) + c(p,T) \quad \forall t,p:\ 0 \le t < p < T \tag{9}$$

то $f(t) = c(t,T)$ – оптимальное решение упрощенной непрерывной ЗАО, а множество $\{0,T\}$ является оптимальным планом.

Доказательство. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i=0}^{N-1} c(t_i,t_{i+1})$ из определения F^* и оценим ее снизу. Применяя условие теоремы, можно последовательно исключить $t_{N-1}, t_{N-2}, \ldots, t_1$ и получить неравенство $\sum\limits_{i=0}^{N-1} c(t_i,t_{i+1}) \ge c(t_0,t_N) = c(0,T)$. Следовательно, $F^* = c(0,T)$ и план $\{0,T\}$ оптимальный, так как он минимальный по составу. Равенство $f(t) = c(t,T)$ доказывается аналогично.

Следствие. *Если стандартная H строго вогнута на $[0,T]$, то $S^* = \{0,T\}$, $F^* = c(0,T)$.*

Доказательство. Условие (9) для однородной задачи имеет вид $H(x_1+x_2) < H(x_1) + H(x_2)$ при $x_1 = p - t > 0$, $x_2 = T - p > 0$. Но это непосредственно следует из строгой вогнустости H. Следствие доказано.

Пример 5. Функция $c(t,p) = (p-t)^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ удовлетворяет условиям следствия, поэтому $f(t) = \sqrt{T-t}$, $S^* = \{0,T\}$, $F^* = \sqrt{T}$.

В общем случае, когда H не является ни выпуклой, ни вогнутой, а также для неоднородных функций стоимости, аналитическое решение непрерывной ЗАО вряд ли возможно. Ниже приводится без вывода ряд полученных результатов для некоторых задач с функциями стоимости специального вида.

Утверждение 3. *Пусть стандартная H обладает свойством вогнутости в окрестности нуля: $\exists\varepsilon > 0$ такое, что H строго вогнута на $[0,\varepsilon]$. Тогда оптимальный план S^* может быть только конечным: $S^* = 0 = t_1, \ldots, t_k = T$ с числом точек $k \le 2\,([T/\varepsilon]+1)$.*

Доказательство достаточно громоздкое, хотя идея его проста: нужно показать, что в произвольном интервале длины ε содержится не более двух точек из оптимального плана S^*.

Утверждение 4. *Все планы аренды являются оптимальными (в смысле А) тогда и только тогда, когда существует неубывающая* *непрерывная функция $G(t)$ на $[0,T]$ такая, что $c(s,t) = G(t) - G(s)$. При этом $f(t) = G(T) - G(t)$.*

Как следствие утверждения 4 получаем еще два.

Утверждение 5. *Если ЗАО является однородной и любой план аренды является оптимальным, то $c(s,t) = const \cdot (t-s)$.*

Утверждение 6. *Если $c(s,t) = \beta^s \cdot H(t-s)$, $\beta > 1$, $\exists H'(+0)$ и все планы являются оптимальными, то $c(s,t) = const \cdot (\beta^t - \beta^s)$, где $const = \dfrac{H'(+0)}{\ln \beta}$.*

Функция стоимости из последнего утверждения имеет экономическую трактовку: число β показывает уровень инфляции (коэффициент наращивания), а сомножитель β^s – стоимость в момент s денег, выплаченных в момент 0. Это соответствует сущности ЗАО, так как решение об оптимальном плане должно быть принято в начальный момент $t = 0$. Тогда смысл последнего утверждения в том, что "справедливая, безарбитражная" функция стоимости должна иметь указанный вид.

Литература

1. **Вентцель Е. С.** Исследование операций: задачи, принципы, методология// *М: Наука. 1988. 208 с.*
2. **Вагнер Г.** Основы исследования операций// *Т.2. М: Мир. 1973. 486 с.*
3. **Beckmann M.** A Continuous Model of Transportation// *Econometrica. (Journal of Economic Society). Vol. 20, №4, Oct. 1952.*

Summary

Kholopov A.A., Stenina N.A. A continuous model of equipment replacing problem

We consider continuous models of equipment replacement problem well known in operational reseach in discrete version. Possible problem statements of the continuous version are offered. We issue the challenge of the optimal schedule existence. In some cases (homogeneity, concavity of the cost functions etc.) we give sufficient conditions for the complete analytic solution of task.

Сыктывкарский университет *Поступила 18.09.2002*