

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ЖЕСТКИХ
ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ¹

В.Н. Тарасов, И.Н. Логинов

Рассматривается задача об устойчивости прямоугольной пластины, нагруженной по краям нормальной и касательной силами и подкрепленной с одной стороны системой жестких ребер. На каждом краю пластины может быть задан один из двух типов граничных условий: условия жесткой заделки или условия шарнирного опирания. Задача устойчивости пластины без ограничений на перемещения в настоящее время хорошо изучена (см., например, [1]). Наличие односторонних ограничений существенно усложняет решение задачи об устойчивости. Трудности, возникающие при решении, обусловлены тем, что уравнения в окрестности точки равновесия не могут быть линеаризованы, поэтому эти уравнения обладают нелинейностью как существенным свойством. При практическом решении прогиб пластины аппроксимируется двумерными натуральными кубическими сплайнами. Результаты численных экспериментов сравниваются с аналитическими решениями.

Пусть прямоугольная пластина нагружена по краям $x = 0$, $x = a$, $0 \leq y \leq b$ нормальными усилиями σ и по всем краям касательными усилиями τ (рис. 1). Обозначим через $w(x, y)$ прогиб пластины в точке (x, y) при $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01-01-96431.

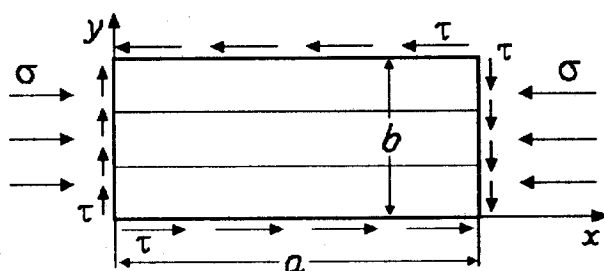


Рис. 1

Потенциальная энергия деформации пластины имеет вид [1]:

$$U = \frac{D}{2} \iint_0^a \int_0^b \left((\Delta w)^2 - (1 - \nu)L(w, w) \right) dx dy, \quad (1)$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad L(w, w) = 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины при изгибе, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$V = \frac{1}{2} \iint_0^a \int_0^b \left(\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2)$$

Будем считать, что перемещения на краях пластины отсутствуют, т. е., выполнены равенства

$$\begin{cases} w(0, y) = w(a, y) = 0, \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

и, кроме этого, прогиб пластины удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^i w}{\partial x^i}(0, y) = 0, & \frac{\partial^j w}{\partial x^j}(a, y) = 0, \\ \frac{\partial^k w}{\partial y^k}(x, 0) = 0, & \frac{\partial^l w}{\partial y^l}(x, b) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где в зависимости от вида граничных условий i, j, k, l принимают значения либо 1, либо 2. Например, если $i = j = k = l = 1$, то получаем

граничные условия жесткой заделки по всем краям пластины. Таким образом, с учетом симметрии, имеем всего 9 различных вариантов.

Можно показать, что при указанных условиях потенциальная энергия U не зависит от $L(w, w)$, т. е.

$$U = \frac{D}{2} \iint_0^a \int_0^b (\Delta w)^2 dx dy. \quad (1')$$

Задача устойчивости пластины сводится к поиску сил σ и τ таких, что вариационная задача

$$U - V \rightarrow \min_w \quad (5)$$

имеет нетривиальное решение. Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

1. Критические нагрузки без ограничений на перемещения

При отсутствии ограничений на перемещения в некоторых случаях известно аналитическое решение задачи об устойчивости пластины [1].

Рассмотрим сначала пластину, сжимаемую по краям $x = 0$ и $x = a$ нормальными усилиями σ , касательные усилия на краях пластины отсутствуют ($\tau = 0$). Считаем, что пластина шарнирно закреплена по всем краям (в условиях (4) следует положить $i = j = k = l = 2$). Дифференциальное уравнение изгиба (уравнение Эйлера-Остроградского для вариационной задачи (5)) будет иметь вид

$$D \Delta^2 w + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$w = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7)$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя (7) в уравнение (6) получаем

$$C \left[D \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - \sigma \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (8)$$

Для того, чтобы существовало нетривиальное решение последнего уравнения, необходимо чтобы множитель в квадратных скобках был равен нулю. Откуда находим

$$\sigma = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{bm}{a} + \frac{n^2 a}{bm} \right)^2. \quad (9)$$

В (9) следует положить $n = 1$, так как представляет интерес минимальное значение критической силы. Минимум в (9) достигается не обязательно при $m = 1$, а зависит от отношения a/b . Так, при $a/b > \sqrt{2}$, минимальное значение критической силы достигается при $m \geq 2$, т. е. пластина после потери устойчивости будет прогибаться в обе стороны.

Перейдем к случаю, когда нагруженные края пластины закреплены шарнирно, а ненагруженные удовлетворяют условиям жесткой заделки ($i = j = 2$, $k = l = 1$ в условиях (4)). Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$w = Y(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (10)$$

где $Y(y)$ – искомая функция, зависящая только от y . Очевидно, что последнее выражение удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания для краев $x = 0$, $x = a$. Подставляя (10) в (6) и “сокращая” на $\sin(m\pi x/a)$, получим

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2r^2 \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(r^2 - \frac{\sigma}{D} \right) r^2 Y = 0, \quad (11)$$

где $r = \pi m/a$. Таким образом, осуществлен переход от уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции Y . Корни его характеристического уравнения

$$\lambda^4 - 2r^2 \lambda^2 + \left(r^2 - \frac{\sigma}{D} \right) r^2 = 0 \quad (12)$$

определяются формулами

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{r \left(r + \sqrt{\frac{\sigma}{D}} \right)}, \quad \lambda_{3,4} = \sqrt{r \left(r - \sqrt{\frac{\sigma}{D}} \right)}. \quad (13)$$

Можно показать, что корни $\lambda_{3,4}$ являются мнимыми. Полагая

$$\alpha = \sqrt{r \left(r + \sqrt{\frac{\sigma}{D}} \right)}, \quad \beta = \sqrt{r \left(\sqrt{\frac{\sigma}{D}} - r \right)}, \quad (14)$$

получим общее решение (11) в виде

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y. \quad (15)$$

Из граничных условий жесткой заделки, накладываемых на функцию $Y(y)$ при $y = 0$ и $y = b$, находим

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0, & \alpha C_2 + \beta C_4 = 0, \\ C_1 (\operatorname{ch} \alpha b - \cos \beta b) + C_2 \left(\operatorname{sh} \alpha b - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta b \right) = 0, \\ C_1 \left(\operatorname{sh} \alpha b + \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta b \right) + C_2 (\operatorname{ch} \alpha b - \cos \beta b) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

Система уравнений (16) имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю определителя системы из двух последних уравнений в (16), откуда получаем

$$(\operatorname{ch} \alpha b - \cos \beta b)^2 - \left(\operatorname{sh} \alpha b + \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta b \right) \left(\operatorname{sh} \alpha b - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta b \right) = 0. \quad (17)$$

Из (14) имеем

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2r \sqrt{\frac{\sigma}{D}}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = 2r^2. \quad (18)$$

Используя уравнения (17), (18), определяем критическое напряжение σ .

Вследствие того, что в приведенном выше примере граничные условия имеют частный вид, эта задача допускает разделение переменных. В общем случае метод разделения переменных не подходит. При произвольных граничных условиях в случае $\sigma > 0$ и $\tau > 0$ задача устойчивости пластины может быть исследована с помощью численных методов.

Если $\sigma = 0$, критическая сдвигающая сила приближенно может быть вычислена по формуле [1]

$$\tau_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (19)$$

где $K = 5.34$ для случая шарнирного опирания по всем краям пластины и $K = 8.98$ - для случая жесткой заделки.

2. Алгоритм решения задачи при наличии односторонних ограничений на перемещения

Далее будем предполагать, что пластина расположена над двумя жесткими ребрами, направленными вдоль оси x , так что прогиб пластины удовлетворяет неравенствам

$$w(x, b_0) \geq 0, \quad w(x, b_1) \geq 0. \quad (20)$$

где $0 < b_0 < b_1 < b$.

Задача об устойчивости пластины сводится к отысканию сил σ и τ таких, что вариационная задача

$$U - V \rightarrow \min_{w \in \mathcal{P}} \quad (21)$$

имеет нетривиальное решение.

В (21) \mathcal{P} – множество функций удовлетворяющих заданным граничным условиям (3) – (4) и неравенствам (20).

Критические усилия σ^* и τ^* можно найти следующим образом. Зафиксируем какие-либо значения σ и τ и решим задачу

$$U = \frac{D}{2} \iint_0^a \int_0^b (\Delta w)^2 dx dy \rightarrow \min_{w \in \mathcal{P}} \quad (22)$$

при ограничении

$$V = \frac{1}{2} \iint_0^a \int_0^b \left(\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = 1. \quad (23)$$

Можно показать [2], что, если w^* – решение задачи (22) – (23) и $\lambda = U(w^*)$, то

$$\sigma^* = \lambda\sigma, \quad \tau^* = \lambda\tau. \quad (24)$$

Для того, чтобы свести задачу (22) – (23) к конечномерной, будем приближать прогиб пластины двумерными кубическими сплайнами. Для этого введем в области $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ сетку $T_x \times T_y$ и обозначим через N и K количество точек сетки соответственно вдоль осей x и y .

$$T_x : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a, \quad T_y : 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_K = b.$$

Интерполяционным кубическим сплайном двух переменных называется функция $S(x, y) = S(w; x, y)$, непрерывная и имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, которая на каждом из прямоугольников $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ имеет вид

$$S(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 a_{\alpha, \beta} (x - x_i)^\alpha (y - y_j)^\beta, \quad (24)$$

и удовлетворяет условиям интерполяции

$$S(x_i, y_j) = w_{ij}, \quad i \in 0 : N, \quad j \in 0 : K, \quad \text{где } w_{ij} = w(x_i, y_j). \quad (25)$$

Заметим, что $S(x, y)$ зависит только от значений интерполируемой функции в узлах сетки и от граничных условий. Алгоритм построения такого сплайна описан в монографии [2], см. также [3]. Для вычисления потенциальной энергии пластины и работы внешних сил используем следующий алгоритм. Заменим функцию $w(x, y)$ ее интерполяционным сплайном и вычислим по этому сплайну соответствующие интегралы. Обозначим через $W \in R^{(N-1)(K-1)}$ множество переменных w_{ij} . Положим

$$f(W) = \frac{D}{2} \iint_0^a \int_0^b (\Delta S)^2 dx dy, \quad (26)$$

$$g(W) = \iint_0^a \int_0^b \left(\sigma \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + 2\tau \left(\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} \right) \right) dx dy. \quad (27)$$

Очевидно, что функции $f(W)$ и $g(W)$ являются квадратичными формами от переменных w_{ij} , $i \in 1 : N - 1$, $j \in 1 : K - 1$:

$$f(W) = \frac{1}{2} \sum_{kl, ps} a_{kl, ps} w_{kl} w_{ps}, \quad g(W) = \frac{1}{2} \sum_{kl, ps} q_{kl, ps} w_{kl} w_{ps},$$

однако коэффициенты этих квадратичных форм неизвестны. Их можно найти следующим образом. Положим $w_{kl} = 1$, $w_{ij} = 0$ если $i \neq k$ и $j \neq l$ и построим интерполяционный сплайн $S(x, y)$. Вычисляя интегралы (26), (27), получим

$$a_{kl, kl} = 2f(W), \quad q_{kl, kl} = 2g(W).$$

Далее полагая $w_{kl} = 1$, $w_{ps} = 1$ и $w_{ij} = 0$ для всех остальных i, j , найдем интерполяционный сплайн $S(x, y)$ и снова вычислим интегралы

(26), (27). Тогда будем иметь

$$a_{kl,ps} = f(W) - \frac{1}{2}(a_{kl,kl} + a_{ps,ps}), \quad q_{kl,ps} = g(W) - \frac{1}{2}(q_{kl,kl} + q_{ps,ps}).$$

Сетку T_v выберем таким образом, чтобы $b_0 = y_{j_0}$, $b_1 = y_{j_1}$, и введем множество

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{W \in R^{(N-1)(K-1)} \mid w_{ij_0} \geq 0, w_{ij_1} \geq 0\}. \quad (28)$$

Таким образом, в результате конечномерной аппроксимации получаем задачу определения сил σ и τ таких, что задача квадратичного программирования

$$f(W) - g(W) \rightarrow \min_{W \in \tilde{\mathcal{P}}} \quad (29)$$

имеет нетривиальное решение.

Зафиксируем некоторые значения сил σ и τ и введем в рассмотрение задачу нелинейного программирования

$$f(W) \rightarrow \min_{W \in \tilde{\mathcal{P}}} \quad (30)$$

при ограничениях

$$g(W) = 1. \quad (31)$$

Пусть W^* решение (30) – (31). Тогда по теореме Куна-Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* , $\mu_{ij_0} \geq 0$, $\mu_{ij_1} \geq 0$, такие, что

$$\begin{cases} \frac{\partial f(W^*)}{\partial w_{ij}} - \lambda_* \frac{\partial g(W^*)}{\partial w_{ij}} = 0, & j \neq j_0, j \neq j_1, \\ \frac{\partial f(W^*)}{\partial w_{ij}} - \lambda_* \frac{\partial g(W^*)}{\partial w_{ij}} - \mu_{ij} = 0, & \text{при } j = j_0 \text{ или } j = j_1, \\ \mu_{ij} w_{ij} = 0, & j = j_0 \text{ и } j = j_1. \end{cases} \quad (32)$$

Из уравнений (32) получаем

$$\sum_{ij} \left(\frac{\partial f(W^*)}{\partial w_{ij}} - \lambda_* \frac{\partial g(W^*)}{\partial w_{ij}} \right) w_{ij} = 2f(W^*) - 2\lambda_* g(W^*) = 0,$$

откуда $f(W^*) = \lambda_*$.

Пусть $\lambda < \lambda_*$. Тогда $\forall W$ такого, что $g(W) = 1$, $f(W^*) > \lambda_* > \lambda = \lambda g(W)$, т. е., для любого $\lambda < \lambda_*$ единственным решением задачи квадратичного программирования

$$f(W) - \lambda g(W) \rightarrow \min_{W \in \tilde{\mathcal{P}}} \quad (33)$$

является $w_{ij} = 0$, $i \in 1 : N - 1$, $j \in 1 : K - 1$, и наоборот, при $\lambda = \lambda_*$, существует нетривиальное решение задачи (33) $W = W^*$.

Отсюда следует, что параметр λ_* имеет смысл критической нагрузки, т. е. если W^* — есть решение задачи нелинейного программирования (30) — (31), то силы $\sigma^* = \lambda_* \sigma$, $\tau^* = \lambda_* \tau$ являются критическими.

Задача (30) — (31) является задачей невыпуклого нелинейного программирования и может оказаться многоэкстремальной. Для ее решения необходимо применять методы глобальной оптимизации, например, метод ветвей и границ. Однако применение методов глобальной оптимизации является трудоемким. При практических расчетах оказался довольно надежным и эффективным следующий локальный метод [2] решения задачи (30) — (31).

Пусть W_0 — некоторое начальное приближение, $g(W_0) = 1$, и пусть получена точка W_k такая, что $g(W_k) = 1$. Обозначим через \widetilde{W}_k решение задачи

$$f(W) \rightarrow \min_{W \in \mathcal{P}} \quad (34)$$

при ограничениях

$$g(W_k) + \left(\frac{\partial g(W_k)}{\partial W}, W - W_k \right) = 0. \quad (35)$$

Далее полагаем $W_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{g(\widetilde{W}_k)}} \widetilde{W}_k$. Можно показать [2], что любая предельная точка последовательности $\{W_k\}$, $k = 0, 1, \dots$ является решением системы Куна-Таккера нелинейных уравнений (32).

При удачном выборе начального приближения локальный метод, как правило, дает решение задачи (30) — (31). В случаях граничных условий шарнирного опирания и жесткой заделки результаты, полученные локальным методом, были проверены методом ветвей и границ. Отметим, что задача (34) — (35) является задачей выпуклого квадратичного программирования и может быть решена за конечное число "шагов".

3. Результаты численных экспериментов

При проведении численных экспериментов рассматривалась одна и та же пластина шириной $a = 5\pi$ и высотой $b = \pi$. Различия касались лишь выбора граничных условий. С учетом симметрии пластины количество вариантов сводится к 9. Использовались следующие параметры: $N = 20$ и $K = 10$. Ниже приведем две таблицы значений критического коэффициента деформации λ_* при различных комбинациях начальных

значений нормальной и касательной сил σ и τ . Таблица 1 соответствует случаям без ограничений на прогиб. Таблица 2 - случаям с двумя подкрепляющими ребрами, расположенными на расстояниях $b/3$ и $2b/3$. Все варианты граничных условий описываются с помощью условий (4) в "ijk"- кодировке. Также, для удобства, в случаях, допускающих симметрию, мы указываем только один из вариантов возможной индексации.

Таблица 1

| τ | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 5 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| σ | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1111 | 2.2358 | 3.1473 | 5.0164 | 7.1292 | 3.3537 | 2.4796 | 1.6185 |
| 1211 | 2.2125 | 3.1226 | 4.9935 | 7.0205 | 3.3438 | 2.4734 | 1.6149 |
| 1112 | 1.7536 | 2.466 | 3.9391 | 5.5871 | 2.6381 | 1.9542 | 1.2784 |
| 2211 | 2.2102 | 3.115 | 4.9769 | 7.031 | 3.338 | 2.472 | 1.6154 |
| 1122 | 1.3101 | 1.8527 | 2.9845 | 4.1557 | 2.0124 | 1.4927 | 0.9768 |
| 2121 | 1.7249 | 2.4403 | 3.9244 | 5.4503 | 2.6335 | 1.9502 | 1.2755 |
| 2221 | 1.7117 | 2.4211 | 3.9000 | 5.4870 | 2.6296 | 1.9467 | 1.2728 |
| 1222 | 1.2810 | 1.8186 | 2.9472 | 4.0404 | 1.9898 | 1.478 | 0.9692 |
| 2222 | 1.2686 | 1.8021 | 2.9326 | 4.0006 | 1.9945 | 1.4838 | 0.973 |

Таблица 2

| τ | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 5 |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| σ | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1111 | 2.9337 | 4.1964 | 6.5755 | 9.3719 | 4.2390 | 3.1139 | 2.0259 |
| 1211 | 2.5957 | 3.7507 | 6.3531 | 8.0251 | 4.2322 | 3.1089 | 2.0227 |
| 1112 | 2.2585 | 3.1831 | 5.0191 | 7.2918 | 3.3123 | 2.4564 | 1.5775 |
| 2211 | 2.5996 | 3.7563 | 6.291 | 8.0253 | 4.2284 | 3.1047 | 2.0195 |
| 1122 | 1.6473 | 2.3222 | 3.6888 | 5.2366 | 2.4363 | 1.7971 | 1.1655 |
| 2121 | 2.005 | 2.9016 | 4.9052 | 6.1613 | 3.3127 | 2.4307 | 1.5865 |
| 2221 | 1.9747 | 2.8451 | 4.7951 | 6.1613 | 3.2856 | 2.4214 | 1.5842 |
| 1222 | 1.447 | 2.0873 | 3.5275 | 4.4885 | 2.4253 | 1.7863 | 1.1643 |
| 2222 | 1.4481 | 2.0879 | 3.5282 | 4.4893 | 2.4256 | 1.7861 | 1.1636 |

Для того, чтобы оценить точность сплайн-аппроксимации, рассматривалась задача об устойчивости пластины без ограничений на перемещения. Решение, полученное с применением сплайн-аппроксимации, сравнивалось с точным решением. В случае граничных условий шарнирного опирания (в условиях (4) $i = j = k = l = 2$) значение критической силы, найденное с помощью сплайн-аппроксимации,

$\sigma_{кр} = 4.0006$ ($\tau = 0$), а по формуле (9) получаем $\sigma_{кр} = 4.000$. В случае шарнирного опирания по краям $x = 0$, $x = a$ и жесткой заделки по краям $y = 0$, $y = b$ (в условиях (4) $i = j = 2$, $k = l = 1$) применение сплайн-аппроксимации дало следующий результат критической силы $\sigma_{кр} = 7.031$, тогда как точное значение $\sigma_{кр} = 7.09$ (см. рис. 9.23 в [1], стр. 341). Приведем еще одно сравнение для случая жесткой заделки по краю $y = 0$ и шарнирного опирания по всем остальным краям (в условиях (4) $i = j = l = 2$, $k = 1$). Значение критической силы, полученное с применением сплайн-аппроксимации, $\sigma_{кр} = 5.487$, тогда как точное значение $\sigma_{кр} = 5.45$ (см. рис. 9.23 в [1], стр. 341). Погрешности в вычислениях можно объяснить стремлением к экономии расчетного времени на компьютере, вследствие чего в практических расчетах при построении сплайнов бралась небольшая сетка с параметрами $N = 20$ и $K = 10$. Для граничных условий шарнирного опирания и жесткой заделки по всем краям пластины также было проведено сравнение с результатами, полученными методом ветвей и границ. Во всех случаях обнаружилось совпадение значений критического коэффициента деформации с точностью до трех значащих цифр.

В целом, описанный алгоритм является довольно надежным и эффективным для приближенной оценки значений критических сил как в случае отсутствия ограничений на перемещения, так и в случае с двумя ограничениями.

Графические результаты иллюстрируют возможные формы потери устойчивости пластины в случаях с ограничениями на перемещения и без ограничений.

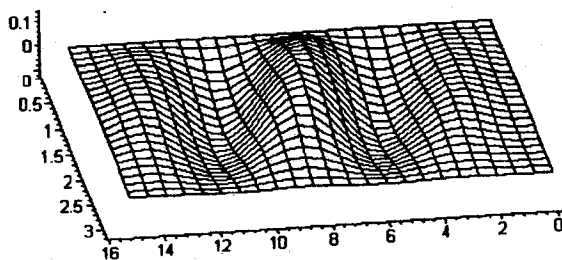


Рис.2

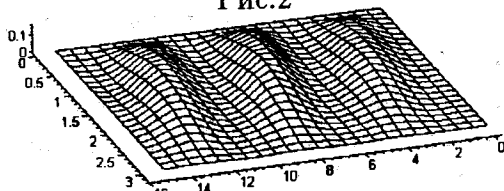


Рис.3

На рисунках 2 и 3 показаны формы потери устойчивости пластины

шириной $a = 5\pi$ и высотой $b = \pi$ с граничными условиями жесткой заделки по краям $x = 0, x = a, y = 0$ и шарнирного опирания по краю $y = b$ (в условиях (4) следует положить $i = j = k = 1, l = 2$) при начальных силах $\sigma = 1$ и $\tau = 5$. Рисунку 2 соответствует случай, когда ограничения на прогиб отсутствуют, а рисунку 3 - случай, когда пластина подкреплена двумя жесткими ребрами. Ниже на рисунках 4 и 5 показаны по три сечения прогиба пластины на расстояниях $y_1 = 0.3b, y_2 = 0.5b, y_3 = 0.7b$. Рисунки 4 и 5 соответствуют случаям на рисунках 2 и 3 соответственно.

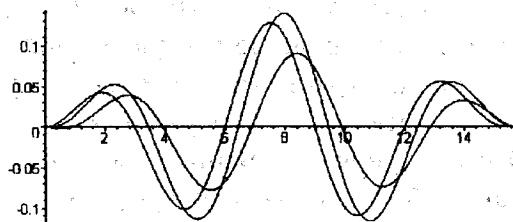


Рис.4

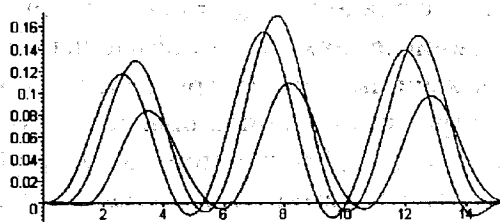


Рис.5

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Москва, 1980. 352 с.
3. Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В. Некоторые задачи и методы конструктивно-нелинейной механики упругих систем/Под ред. проф. Е.И. Михайловского. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та, 2001. 189 с.

Summary

Tarasov V.N., Loginov I.N. The influence of boundary conditions to lamina's stability with rigid constraints on displacement.

In this work the influence of different kinds of boundary conditions to lamina's stability is investigated. The lamina can be supported by one or two inflexible ribs. To approximate lamina's flexure the natural cubic splines of two variables are used. Ultimate loads are searching by the method of successive approximations.