Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 517.987

Теорема Какутани-Окстоби в несепарабельном пространстве с мерой

А.А. Самородницкий, А.А. Муравьев

Теорема Какутани-Окстоби утверждает о существовании несепарабельного продолжения меры Лебега, инвариантного относительно сдвигов. Мы получили обобщение этой теоремы на случай, когда мера Лебега заменена на меру вполне однородного LR-пространства несчетного веса τ, группы сдвигов заменена на группу автоморфизмов исходной меры, а инвариантное относительно этой группы продолжение меры имеет вес $2^{2^{\tau}}$.

Исходным материалом настоящей работы являются статья Ш. Какутани, Дж. Окстоби [1] и доказательство упомянутой теоремы этих авторов, изложенное в [2, с. 277-289]. Мы будем использовать терминологию и результаты монографий [3,4]. [1]

Пространство Лебега без атомов (см. [5]) изоморфно произведению $\{0;1\}^{\aleph_0}$ двухточечных пространств с симметричными мерами. Оно имеет счетный вес (так как в нем существует счетная система образующих). Обозначим через μ меру в произведении двоеточий $\{0;1\}^{\aleph_0}$. Пусть G — группа всех автоморфизмов меры μ (точнее, пространства $\{0;1\}^{\aleph_0}$ с мерой μ). Рассмотрение группы всех автоморфизмов отрезка $[0;1]$ с мерой Лебега вместо группы всех сдвигов этого отрезка (по $mod\,1$) уже является обобщением теоремы Какутани-Окстоби, которая утверждает, что мера μ может быть продолжена (инвариантным образом, например, относительно группы G) до меры $\widetilde{\mu}$, причем полученное пространство с мерой $\widetilde{\mu}$ является вполне однородным (см. [3 или 4]) с весом $2^{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ мощность континуума.

---

[1]Настоящая работа публикуется по решению Государственной аттестационной комиссии на математическом факультете СыктГУ в 2003 г. Основные идеи настоящей работы принадлежат А.А. Самородницкому.

Рассмотрим пространство с мерой $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, в котором $\Omega = \{0,1\}^\tau$, где $\tau = card T$ несчетно, а $\mathfrak{F}$ и μ получаются в конструкции произведения T экземпляров двухточечных пространств с симметричными мерами. Пусть $\Sigma = \{A_t : t \in T\}$ — система образующих в $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ с характеристическими числами вида $\frac{1}{2^n}$. Пусть G — группа всех автоморфизмов пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. [2]

Теорема. При сделанных предположениях существует пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{\mu})$ при том же Ω, где $\widetilde{\mu}$ продолжает меру μ причем:
а) $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{\mu})$ является вполне однородным пространством веса (и метрического веса) 2^{2^τ}; б) если $\widetilde{G}$ — группа всех автоморфизмов пространства $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{F}}, \widetilde{\mu})$, то $\widetilde{G} = G$.

Ниже приводится схема доказательства этой теоремы. Мы опускаем подробности, не зависящие от веса исходного пространства (см. [2, с. 277-289]). Точки множества Ω можно представить в виде $\omega = (\omega_t : t \in T)$.

Пусть для $B \subset \Omega$ $\mu_e(B) = \inf\{\mu A : B \subset A \in \mathfrak{F}\}$ и $\mu_{int}(B) = \sup\{\mu C : C \subset B, C \in \mathfrak{F}\}$ — внешняя и внутренняя меры, порожденные мерой μ. Известно, что для продолжения $\widetilde{\mu}$ меры μ и для любого $B \subset \Omega$ справедливы неравенства

$$\mu_{int}(B) \leq \widetilde{\mu}_{int}(B) \leq \widetilde{\mu}_e(B) \leq \mu_e(B). \tag{1}$$

Для измеримых множеств соответствующие значения внешней и внутренней меры совпадают.

Пусть $\Sigma^c = \{A_t^c : t \in T\}$ — совокупность дополнений к множествам системы образующих Σ. Обозначим: $(\Sigma + \Sigma^c)_d$ — совокупность всех конечных пересечений множеств системы Σ или их дополнений,
$(\Sigma + \Sigma^c)_{d\sigma}$ — совокупность всех счетных объединений множеств системы $(\Sigma + \Sigma^c)_d$, $(\Sigma + \Sigma^c)_{ds}$— совокупность всех конечных объединений множеств системы $(\Sigma + \Sigma^c)_d$, $(\Sigma + \Sigma^c)_{ds\delta}$ — совокупность всех счетных пересечений множеств системы $(\Sigma + \Sigma^c)_{ds}$.

Известно, что значения внешней и внутренней мер достигаются на множествах систем $(\Sigma + \Sigma^c)_{d\sigma\delta}$ и $(\Sigma + \Sigma^c)_{ds\delta\sigma}$ соответственно, определения которых аналогичны предыдущим. Несложно доказывается, что для любого $C \in (\Sigma + \Sigma^c)_{ds\delta\sigma}$ будет $card C = 2^\tau$, так как C является ξ-множеством в разбиении ξ пространства Ω, каждый элемент которого имеет мощность 2^τ.

[2]Мы считаем, что σ-алгебра $\mathfrak{F}$ полна относительно μ. Аналогичным свойством обладают все рассматриваемые σ-алгебры.

Если $\mathcal{P}$ — класс подмножеств $P \subset \Omega$, для которых $card\, C < 2^\tau$, то для каждого $P \in \mathcal{P}$ измеримой внутренностью является пустое множество. Поэтому мы можем продолжить меру μ до меры μ^*, равной 0 на множествах класса $\mathcal{P}$. Несложно убедиться, что μ^* инвариантна относительно группы G.

В Ω имеется ровно 2^τ различных компактных подмножеств мощности 2^τ, среди которых найдется хотя бы одно, принадлежащее заранее выбранному множеству $B \subset \mu^*(B) > 0$. Из этих компактных множеств строятся множества семейства $\{X_t : t \in T\}$, для которых $\mu_e^*(X_t) = 1$, причем это семейство состоит из попарно дизъюнктивных множеств, удовлетворяющих условию абсолютной инвариантности: для любого $T' \subset T$ и $X' = \bigcup\limits_{t \in T'} X_t$ будет $\mu_e^*(\varphi(X') \triangle X') = 0$ для любого $\varphi \in G$, где $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B/A)$ — симметрическая разность множеств.

Путем разбиения семейства $\{X_t : t \in T\}$ на 2^τ подсемейств, каждое из которых содержит 2^τ множеств, можно получить семейство из 2^{2^τ} алгебраически независимых множеств, каждое из которых имеет μ_e^*-меру 1. Пологая для каждого множества A_t^* этого семейства $\widetilde{\mu}(A_t^*) = \frac{1}{2}$ и считая данное семейство $\widetilde{\mu}$-независимым, можем получить искомое продолжение. G-инвариантность $\widetilde{\mu}$ получается из того, что автоморфизмы пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ сохраняют не только меру μ, но и μ_e и μ_{int}.

Конечно, мы пропустили доказательство самых сложных моментов теоремы Какутани-Окстоби. Но все они получаются простым изменением счетности на мощность τ (с соответствующими изменениями свойств множеств).

Литература

1. **Kakutani Sh., Oxtoby J.C.** Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesque measure space//*Ann. Of Math.(2) V. 52, 1950. P. 580-590.*

2. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Том 1. М.: Наука, 1975. 656 с.

3. **Самородницкий А.А.** Теория пространств Лебега-Рохлина. Издание Сыктывкарск. ун-та, 1997. 288 с.

4. **Рохлин В.А.** Об основных понятиях теории меры//*Матеем. сборник. 1949. Т. 25. №1. С. 107–150.*

Summary

Samorodnitski A.A., Muravjev A.A. Kakutani-Oxtoby theorem in the non-separable measure space

A non-separable extension of the Lebesque measure space generalize to the product of non-separable number of two-points spaces with likeable measures.

Сыктывкарский университет *Поступила 23.09.2003*