*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.5.2003*

**УДК 517.987**

# Системы образующих в пространстве с мерой

*А.А. Самродницкий, Н.О. Котелина*

В работе изучаются пространства Лебега-Рохлина с помощью нового определения системы образующих. Перечень аксиом системы образующих $\Sigma$ пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ дополнен требованиями измеримости всех открытых множеств наименьшей топологии $\mathfrak{T}$, в которой множества системы $\Sigma$ являются открыто-замкнутыми, и гладкости меры $\mu$ относительно $\mathfrak{T}$.

Мы используем сведения из монографий [1—4]. Рассматриваются пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ с вероятностной мерой $\mu$ и $\mu$-полной $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{F}$.[1] В [1 и 2] системой образующих пространства $\Omega$ (обозначения $\sigma$-алгебры и меры иногда опускаем, если это не вызывает недоразумений) мы называли совокупность $\Sigma \subset \mathfrak{F}$, которая: а) разделяет точки множества $\Omega$; б) обладает тем свойством, что наименьшая $\sigma$-алгебра $\sigma(\Sigma)$, содержащая $\Sigma$, пополненная по части меры $\mu$, определенной на $\sigma(\Sigma)$, совпадает с $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{F}$.

Обозначим $\mathfrak{T}(\Sigma)$ (или $\mathfrak{T}$, где это не вызовет недоразумений) наименьшую топологию, в которой множества системы $\Sigma$ являются открыто-замкнутыми. Семейство множеств $\{U_s : s \in S\} \subset \mathfrak{T}$ направлено по возрастанию, если для любых $s_1, s_2 \in S$ существует $s_3 \in S$, для которого $U_{s_1} \cup U_{s_2} \subset U_{s_3}$. Пусть $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{F}$. Мера $\mu$ называется гладкой (относительно топологии $\mathfrak{T}$), если для любого направленного по возрастанию семейства $\{U_s : s \in S\} \subset \mathfrak{T}$ справедливо равенство

$$\mu(\bigcup_{s \in S} U_s) = \sup\{\mu(U_s) : s \in S\}.$$

[1] Основные идеи настоящей работы принадлежат А.А. Самородницкому. Детальная проверка доказательств была поручена Н.О. Котелиной.

**Определение.** Система образующих $\Sigma$ пространства $\Omega$ называется борелевской системой образующих, если выполнены условия: а) $\mathfrak{T}(\Sigma) \subset \mathcal{F}$; б) мера $\mu$ является гладкой (относительно $\mathfrak{T}(\Sigma)$).

Пример борелевской системы образующих известен. Пусть $\Omega = \{0;1\}^\tau$ — произведение двоеточий (двухточечных пространств) с симметричными мерами: $\lambda(\{0\}) = \lambda(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Система образующих в этом пространстве состоит из множеств $A_t$, $t \in T$, где $A_{t_0} = \{\omega = (\omega_t : t \in T) : \omega_{t_0} = 0\}$ и $card\, T = \tau$. Если $\tau$ — счетный кардинал, то топология $\mathfrak{T}(\Sigma)$ совпадает с наименьшей $\sigma$-топологией, в которой множества из $\Sigma$ открыто-замкнуты, и $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является пространством Лебега без атомов (см. [5]). В пространстве Лебега каждая система образующих, имеющая счетный набор множеств, очевидно, является борелевской системой образующих. При несчетном $\tau$ в [1] доказано, что $\mathfrak{T}(\Sigma) \subset \mathcal{F}$ и что мера $\mu$ является радоновой (и, следовательно, гладкой относительно $\mathfrak{T}(\Sigma)$).

Будем рассматривать только те пространства, в которых имеется борелевская система образующих. При этом изменятся определения $LR$-пространства и пространства Лебега-Рохлина, данные в монографиях [1] и [2] соответственно. Точнее, указанные классы пространств с мерой могут уменьшиться. С уверенностью можно утверждать об уменьшении класса $LR$-пространств, поскольку исчезает понятие вполне однородного $LR$-пространства с 0-1-мерой. Если в несчетном произведении двоеточий $\{0;1\}^\tau$ с 0-1-мерой и системой образующих $\Sigma$, аналогичной описанной выше, продолжить меру $\mu$ до радоновой, чтобы $\Sigma$ стала борелевской системой образующих, то продолженная мера окажется сосредоточенной в одной точке, а пространство с этой мерой будет $mod\, 0$ одноточечным.

Алгебра образующих $\Sigma$ пространства $\Omega$ называется борелевской, если она является борелевской системой образующих. Поскольку классы пространств Лебега-Рохлина и $LR$-пространств лишь уменьшаются при переходе к борелевским алгебрам и системам образующих, то для новых классов сохраняются все результаты, изложенные в монографиях [1 и 2]. В уточнениях нуждаются лишь определения компактификаций.

**Определение.** Пусть $\Sigma$ — борелевская система образующих пространства $\Omega$. $\Sigma$-компактификацией пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется пространство $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu})$ с компактной борелевской системой образующих $\widetilde{\Sigma}$, удовлетворяющие условиям: а) $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ как подпространство (возможно, в смысле вложения) и $\widetilde{\mu}_e(\Omega) = 1$, где $\widetilde{\mu}_e$ — внешняя мера, порожденная мерой $\widetilde{\mu}$; б) $\widetilde{\Sigma}_\Omega = \Sigma$.

**Определение.** Пусть $\Sigma$ — борелевская алгебра образующих в $\Omega$. Тогда $\Sigma$-компактификацией $\Omega$ называется пространство $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ с компактной борелевской алгеброй образующих $\Sigma^*$, удовлетворяющие условиям: а) $\Omega \subset \Omega^*$ как подпространство (возможно, в смысле вложения) и $\mu_e^*(\Omega) = 1$, где $\mu_e^*$ — внешняя мера, порожденная мерой $\mu^*$;
б) $\Sigma_\Omega^* = \Sigma$.

Существование указанных $\Sigma$-компактификаций вытекает из существования обычных (неборелевских) $\Sigma$-компактификаций, в которых меры продолжены до радоновых мер относительно $\mathcal{T}(\widetilde{\Sigma})$ и $\mathcal{T}(\Sigma^*)$ соответственно.

Из [2] известно, что $\Omega \subset \Omega^* \subset \widetilde{\Omega}$, где для борелевской системы образующих $\Sigma$ пространство $\widetilde{\Omega}$ является $\Sigma$-компактификацией $\Omega$, а $\Omega^*$ является $\alpha(\Sigma)$-компактификацией $\Omega$. Так как $\Omega^*$ замкнуто в $\widetilde{\Omega}$ (в топологии $\mathcal{T}(\widetilde{\Sigma})$), а $\widetilde{\Sigma}$ — борелевская система образующих в $\widetilde{\Omega}$, видим, что $\Omega^*$ измеримо в $\widetilde{\Omega}$ с $\widetilde{\mu}(\Omega^*) = 1$. Этот факт решает основной вопрос, поставленный в [2]: является ли пространство Лебега-Рохлина $LR$-пространством? Теперь очевидно, что понятия $LR$-пространство и пространство Лебега-Рохлина эквивалентны.

Заметим, что из сказанного выше следует, что всякое пространство Лебега-Рохлина изоморфно (как пространство с мерой) прямой суммой

$$M \otimes \bigotimes_{n \in N_1} \Omega_n^1 \otimes \bigotimes_{n \in N_2} \Omega_n^2,$$

в которой:

1) $M$ — множество нулевой меры;
2) $\Omega_n^2 = \{0; 1\}^{\tau_n}$ — бесконечные произведения двоеточий с симметричными мерами и $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$;
3) $\Omega_n^1$ — одноточечные пространства (атомы);
4) $N_1$ и $N_2$ — отрезки натурального числового ряда.

## Литература


1. **Самородницкий А.А.** Теория пространств Лебега-Рохлина. Издание Сыктывкарск. ун-та, 1997. 288 с.

2. **Самородницкий А.А.** Теория меры. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1990. 268 с.

3. **Владимиров Д.А.** Теория булевых алгебр. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. 616 с.

4. **Владимиров Д.А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1968. 320 с.

5. **Рохлин В.А.** Об основных понятиях теории меры//*Матеем. Сборник. Т. 25. №1. С. 107–150.*

**Summary**

**Samorodnitski A.A., Kotelina N.O.** Systems of generators in measure spaces

We investigate Lebesque-Rohlin spaces with the new definition of systems of generators. As result we proov that the Lebesque- Rohlin space and the LR-space are equivalent conceptions.

*Сыктывкарский университет* *Поступила 23.09.2003*