

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ УЧЕТА ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ  
НА ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ <sup>1</sup>

Е. И. Михайловский, Е. В. Тулубенская

Применяется модифицированный алгоритм Келлога к построению собственного частотного спектра жестко заземленной пластины с использованием уточненной теории типа Кáрмана-Тимошенко-Нагди.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях круглой жестко заземленной пластины по линеаризованной теории типа Кáрмана-Тимошенко-Нагди [1]. Линеаризованная система уравнений названной теории в полярных координатах имеет вид

$$\Delta^2 w = \frac{r_0^4}{D} (q_n - \frac{h_*^2}{r_0^2} \Delta q_n), \quad (1.1)_1$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \Psi_\rho) + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{r_0}{Gh} \rho q_n, \quad (1.1)_2$$

$$\Delta \Psi - \frac{12r_0^2}{h^2} \Psi = 0, \quad \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \Psi_\varphi); \quad (1.1)_3$$

$$\Delta^2 \Phi = \nu \Delta m_n. \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho = r/r_0$ ;  $r, \varphi$  – полярные координаты,  $r_0, h$  – радиус и толщина пластины;

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = \frac{1}{2} h (q_n^+ + q_n^-),$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-96431.

$q_n^+$ ,  $q_n^-$  – нагрузка, действующая на лицевые поверхности пластины;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad h_* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4-3\nu}{6(1-\nu)}} h, \quad (1.3)$$

$E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;

$$\Psi_\rho = \Psi_1 \cos \varphi + \Psi_2 \sin \varphi, \quad \Psi_\varphi = -\Psi_1 \sin \varphi + \Psi_2 \cos \varphi,$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Граничные условия жестко защемленного свободного в тангенциальном направлении края имеют вид [1]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} - r_0 \Psi_\rho = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi} - r_0 \Psi_\varphi = 0; \quad (1.4)$$

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \quad (1.5)$$

Таким образом, при рассматриваемых граничных условиях краевая задача о деформации круглой пластины распадается на две независимые краевые задачи  $\{(1.1), (1.4)\}$  и  $\{(1.2), (1.5)\}$ .

Учитывая форму пластины и используя стандартный прием аппроксимации собственных колебаний, можно записать

$$q_n(\rho, \varphi, t) = \gamma h \omega^2 e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho) \cos k\varphi, \quad (1.6)$$

где  $\gamma$  – плотность материала пластины,  $\omega$  – собственная частота колебаний.

В соответствии с формулой (1.6) естественно основные искомые функции представить в виде рядов

$$\begin{bmatrix} w \\ \Psi_\rho \\ \Psi_\varphi \end{bmatrix} (\rho, \varphi, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} u_k(\rho) \cos k\varphi \\ \Psi_{\rho,k}(\rho) \cos k\varphi \\ \Psi_{\varphi,k}(\rho) \sin k\varphi \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

На основании соотношений (1.6), (1.7) приходим к следующей разрешающей системе уравнений для  $k$ -ой гармоники собственных колебаний:

$$A u_k = \lambda B u_k, \quad (1.8)_1$$

$$\frac{d}{d\rho}(\rho\Psi_{\rho,k}) + k\Psi_{\varphi,k} = -\frac{\mu}{r_0}\rho u_k, \quad (1.8)_2$$

$$\frac{d^2\Psi_k}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Psi_k}{d\rho} - \varkappa\Psi_k = 0, \quad (1.8)_3$$

$$\Psi_k = -\frac{k}{\rho}\Psi_{\rho,k} - \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\Psi_{\varphi,k}), \quad (1.8)_4$$

где

$$A = \Delta^2, \quad \Delta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho}) - \frac{k^2}{\rho^2}, \quad B = I - \sigma\Delta, \quad \sigma = \frac{h^2}{r_0^2},$$

$$\lambda = \frac{\gamma r_0^4 h}{D}\omega^2, \quad \mu = \frac{\gamma r_0^2}{G}\omega^2, \quad \varkappa = \frac{k^2}{\rho^2} + \frac{12r_0^2}{h^2} \quad (1.9)$$

( $I$  - тождественный оператор).

Граничные условия при  $\rho = 1$  принимают вид

$$u_k = 0, \quad \frac{du_k}{d\rho} - r_0\Psi_{\rho,k} = 0, \quad ku_k + r_0\Psi_{\varphi,k} = 0. \quad (1.10)$$

## 2. Осесимметричный случай

2.1. В случае осесимметричной деформации ( $k = 0$ ) уравнения (1.8)<sub>3</sub> и (1.10)<sub>3</sub> выполняются тождественно. Из полевого уравнения (1.8)<sub>2</sub> получаем

$$\rho\Psi_{\rho} = -\frac{\mu}{r_0} \int_0^{\rho} u(t)t dt \quad (2.1)$$

и тем самым приходим к следующей краевой задаче:

$$Au = \lambda Bu \quad (\rho \in (0, 1)),$$

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\rho} + \mu \int_0^1 u(\rho)\rho d\rho = 0 \quad (\rho = 1), \quad (2.2)$$

Своеобразие задачи (2.2) в том, что собственные частоты входят как в полевое уравнение (через  $\lambda$ ), так и в одно из граничных уравнений (через  $\mu$ ). С целью исследования возможностей метода Келлога будем рассматривать граничные условия *типа* жесткого защемления, при которых подчеркнутое в (2.2) слагаемое можно не принимать во внимание.

**2.2.** Рассмотрим операторное уравнение проблемы собственных значений

$$Au = \lambda Bu \quad (2.3)$$

где  $A, B$  – положительно определенные операторы, причем  $D_A \in D_B$ .

Предположим, что уравнение (2.3) имеет простой дискретный спектр  $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  – полная В-ортонормированная последовательность собственных элементов уравнения (2.3), т.е. выполняются условия

$$(Bu_i, u_j) \triangleq (u_i, u_j)_B = \delta_{ij}.$$

Если найдены собственные пары  $\{\lambda_i, u_i\}_{i=1}^{n-1}$ , то  $n$ -ую собственную пару можно найти, решив задачу условной оптимизации [2]

$$(Au, u) \rightarrow \min_{u \in D_A},$$

$$(Bu, u) \triangleq \|u\|_B^2 = 1, (Bu_i, u) = 0, i \in 1 : n - 1. \quad (2.4)$$

Составляя функцию Лагранжа, от задачи (2.4) можно перейти к следующей:

$$(Au, u) - \lambda(Bu, u) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (Bu_i, u) \rightarrow \text{extr.}_{u \in D_A}$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$Au = \lambda Bu + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i Bu_i \quad (2.5)$$

В классическом варианте метода Келлога для уравнения  $Au = \lambda u$  рассматривается итерационная схема

$$u^{(l)} = A^{-1}u^{(l-1)} \quad (2.6)$$

и показывается, что в случае положительно определенного оператора  $A$  и вполне непрерывного оператора  $A^{-1}$  имеют место пределы [3]

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\|u^{(l-1)}\|}{\|u^{(l)}\|} = \lambda_1, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{u^{(l)}}{\|u^{(l)}\|} = u_1,$$

где  $\{\lambda_1, u_1\}$  – первая собственная пара.

По аналогии для уравнения (2.5) рассмотрим итерационную схему

$$u^{(l)} = A^{-1}Bu^{(l-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i^{(l-1)}}{\lambda_i} u_i$$

и определим множители Лагранжа  $\mu_i^{(l-1)}, i \in 1 : n - 1$  из условий  $(Bu^{(l)}, u_j) = 0$ . Окончательно получим следующую итерационную схему:

$$u^{(l)} = A^{-1}Bu^{(l-1)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} (Bu^{(l-1)}, u_i) u_i. \quad (2.7)$$

Покажем, что при сделанных предположениях имеют место пределы

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\|u^{(l-1)}\|_B}{\|u^{(l)}\|_B} = \lambda_n, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{u^{(l)}}{\|u^{(l)}\|_B} = u_n. \quad (2.8)$$

Действительно, пусть  $(u^{(0)}, u_n) \neq 0$ . Разложим  $u^{(0)}$  в ряд по элементам В-ортогональной последовательности собственных элементов

$$u^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j.$$

и в соответствии с формулой (2.7) получим

$$u^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j A^{-1} B u_j - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{\infty} c_j (u_j, u_i)_B = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j} u_j.$$

Аналогично находим

$$u^{(l)} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j^l} u_j,$$

после чего не составляет труда убедиться в справедливости формул (2.8).

### 2.3. Обращение оператора

$$A = \Delta^2, \quad D_A = \{u \in C^{(4)}[0, 1] : u(1) = 0, u'_p(1) = 0\}$$

осуществлялось с использованием функции Грина

$$4G_0(\rho, \xi) = [\xi(\xi^2 - \rho^2) + \xi(\xi^2 + \rho^2) \ln \frac{\rho}{\xi}] H(\rho - \xi) +$$

$$+ \frac{1}{2}\xi(1 - \xi^2) + \xi^3 \ln \xi + \left[ \frac{1}{2}\xi(1 - \xi^2) + \xi \ln \xi \right] \rho^2 \quad (2.9)$$

( $H(\cdot)$  – функция Хевисайда).

При реализации итерационной схемы (см.(2.7))

$$u^{(l)}(\rho) = \int_0^1 G_0(\rho, \xi) u^{(l-1)}(\xi) \xi d\xi - \sigma \int_0^1 G_0(\rho, \xi) \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{du^{(l-1)}}{d\xi} \right) d\xi -$$

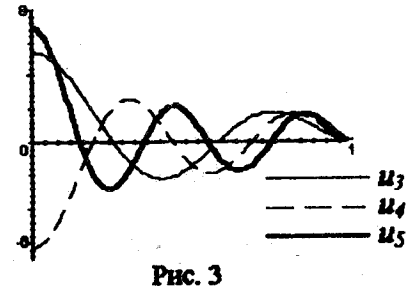
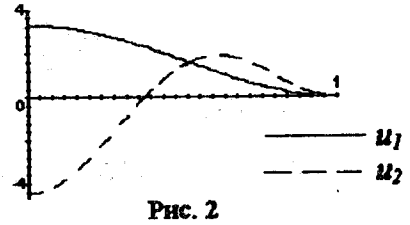
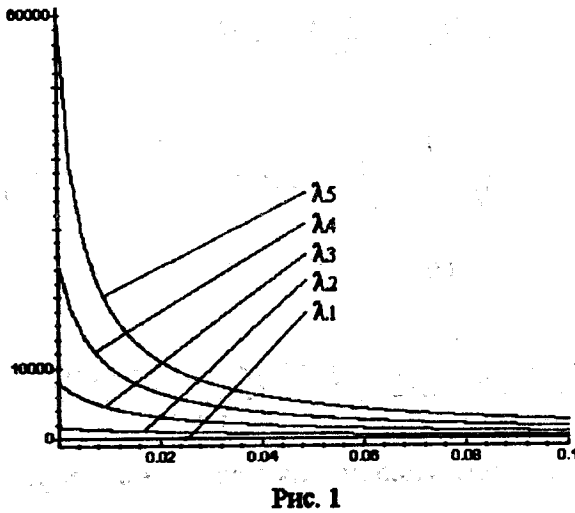
$$- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} u_i(\rho) \int_0^1 (u^{(l-1)}(\rho) - \sigma \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{du^{(l-1)}}{d\rho} \right)) u_i(\rho) \rho d\rho \quad (2.10)$$

функции  $u^{(l)}(\rho)$  задавались набором их значений на равномерной сетке, интегралы вычислялись методом прямоугольников, производные аппроксимировались конечными разностями в симметричной форме. Учитывая, что последовательность  $\{\lambda_n^{(l)}\}$  положительная и убывающая, остановка программы осуществлялась по простейшему критерию  $\lambda_n^{(l-1)} - \lambda_n^{(l)} \leq \varepsilon \lambda_n^{(l-1)}$ .

Зависимость собственных чисел от параметра  $\sigma$  усматривается из табл.1 и графиков рис.1 (при разбиении отрезка  $[0,1]$  на 180 частей с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ ). Первые пять собственных форм колебаний показаны на рис.2 и 3.

Табл.1

$\sigma$	1 с.ч.	2 с.ч.	3 с.ч.	4 с.ч.	5 с.ч.
0.00	104.37	1581.8	7940.2	25025	61020
0.01	97.597	1185.5	4423.2	10212	18494
0.02	91.639	948.10	3068.7	6427.2	10925
0.03	86.356	790.18	2351.4	4694.4	7760.3
0.04	81.640	677.58	1907.0	3699.8	6020.6
0.05	77.407	593.25	1604.6	3054.2	4919.6
0.06	73.586	527.71	1385.5	2601.1	4159.9
0.07	70.121	475.32	1219.2	2265.5	3604.0
0.08	66.963	432.46	1088.8	2006.9	3179.5
0.09	64.076	396.76	983.76	1801.4	2844.6
0.10	61.425	366.54	897.28	1634.3	2573.8



### 3. Неосесимметричные колебания

Для исследования возможностей метода Келлога, в случае неосесимметричных колебаний, будем пренебрегать в уравнении (1.10)<sub>2</sub> слагаемым, содержащим функцию  $\Psi_{\rho,k}$ . В результате, получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} Au_k &= \lambda B u_k \quad (\rho \in (0, 1)), \\ u_k &= 0, \quad \frac{du_k}{d\rho} = 0 \quad (\rho = 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

При  $k = 0$  имеем случай, рассмотренный в разделе 2.

Аналогично осесимметричному случаю для каждого  $k$  реализуем модифицированный метод Келлога, при котором справедливы следующие пределы

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\|u_k^{(l-1)}\|_B}{\|u_k^{(l)}\|_B} = \lambda_{n,k}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{u_k^{(l)}}{\|u_k^{(l)}\|_B} = u_{n,k}. \quad (3.2)$$

Обращение оператора

$$A = \Delta^2, \quad D_A = \{u_k \in C^{(4)}[0, 1] : u_k(1) = (u_k)'_{\rho}(1) = 0\}$$

осуществлялось с использованием функции Грина:

- для  $k=1$

$$4G_1(\rho, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{4}(\rho^3 - \xi^4 \rho^{-1}) - \rho \xi^2 \ln\left(\frac{\rho}{\xi}\right) \right) H(\rho - \xi) + \right.$$

$$+\rho\left[\frac{1}{2}\xi^2(\xi^2-1)-\xi^2\ln\xi\right]-\frac{1}{4}\rho^3(1-\xi^2)^2];$$

• для  $k \geq 2$

$$G_k(\rho, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[ I_k(\rho, \xi) H(\rho - \xi) + \frac{\rho^k}{8k(k-1)} [(k-1)\xi^{k+3} - k\xi^{k+1} + \xi^{-k+3}] - \frac{\rho^{k+2}}{8k(k+1)} [k\xi^{k+3} - (k+1)\xi^{k+1} + \xi^{-k+1}] \right],$$

где

$$I_k(\rho, \xi) = \frac{1}{8k} \left[ \frac{\xi^{k+1}\rho^{-k+2} - \xi^{-k+3}\rho^k}{k-1} + \frac{\xi^{-k+1}\rho^{k+2} - \xi^{k+3}\rho^{-k}}{k+1} \right]$$

(Нетрудно убедиться в справедливости следующих предельных переходов:

$$\lim_{k \rightarrow 0} G_k(\rho, \xi) = G_0(\rho, \xi), \quad \lim_{k \rightarrow 1} G_k(\rho, \xi) = G_1(\rho, \xi).$$

Итерационная схема (см. (2.10)), в общем случае выглядит следующим образом:

$$u_k^{(l)}(\rho) = \int_0^1 G_k(\rho, \xi) u_k^{(l-1)}(\xi) \xi d\xi - \sigma \int_0^1 G_k(\rho, \xi) \left( \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{du_k^{(l-1)}}{d\xi} \right) - \frac{k^2}{\xi} \right) d\xi - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} u_{i,k}(\rho) \int_0^1 \left( u_k^{(l-1)}(\rho) - \sigma \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{du_k^{(l-1)}}{d\rho} \right) - \frac{k^2}{\rho^2} \right] u_{i,k}(\rho) \right) \rho d\rho.$$

Вклад первых трех гармоник по  $\varphi$  в частотный спектр жестко заземленной круглой пластины показан в таблице 2.

Табл.2

k=0	104.367			1581.85		
k=1		452.005				3700.13
k=2			1216.41			7154.22
k=3					2604.06	
k=0	7940.42				25025.9	
k=1			14419.0			39622.2
k=2				23659.1		
k=3		12325.8				36215.5
k=0		61023.3				126457
k=1				88661.1		
k=2	58913.3				123436	
k=3			83625.0			166243



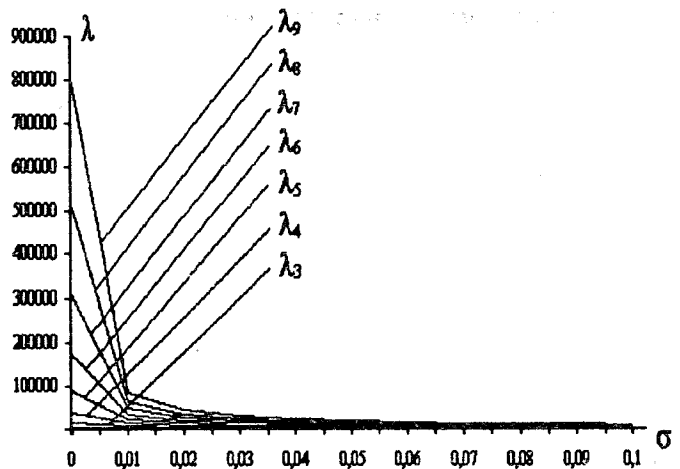
Для первой гармоники функции Грина зависимость собственных чисел от параметра  $\sigma$  усматривается из табл.3,4 и рис.4 (при разбиении отрезка  $[0,1]$  на 150 частей с точностью  $\epsilon = 10^{-6}$ ). Откуда видно, что начиная с некоторого значения параметра  $\sigma$  влияние на собственные частоты незначительно.

Табл.3

$\sigma$	1 с.ч.	2 с.ч.	3 с.ч.	4 с.ч.	5 с.ч.	6 с.ч.	7 с.ч.
0.00	452.005	3700.13	14419.0	39622.2	88661.1	173224	307339
0.01	386.868	2416.83	6901.18	13943.4	23415.5	35192.7	49196.5
0.02	337.981	1794.94	4542.16	8477.86	13521.7	19635.2	26804.0
0.03	299.974	1428.17	3388.03	6096.54	9514.22	13627.2	18432.9
0.04	296.597	1186.25	2702.99	4762.04	7342.29	10438.2	14050.4
0.05	244.772	1014.66	2249.10	3907.98	5979.13	8460.40	11353.3
0.06	224.112	886.587	1926.14	3314.29	5043.60	7113.52	9525.82
0.07	206.654	787.326	1684.52	2877.53	4361.62	6137.04	8205.57
0.08	191.708	708.122	1496.92	2542.69	3842.35	5396.55	7207.02
0.09	178.771	643.444	1347.01	2277.79	3433.73	4815.69	6425.31
0.01	167.465	589.626	1224.47	2062.96	3103.76	4347.83	5796.70

Табл.4

$\sigma$	8 с.ч.	9 с.ч.
0.00	507370	792020
0.01	65387.9	83754.6
0.02	35027.2	44311.1
0.03	23935.0	30139.9
0.04	18182.9	22841.4
0.05	14661.8	18390.5
0.06	12284.1	15392.3
0.07	10570.5	13235.2
0.08	9276.71	11608.7
0.09	8265.30	10338.4
0.01	7452.87	9318.79



## Литература

1. Михайловский Е.И. Некоторые модели и методы нелинейной механики тонких упругих оболочек // В сб.: *Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела (к 90 - летию со дня рождения акад. В.В.Новожилова)*. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. С. 42-56.
2. Михайловский Е.И. Лекции по вариационным методам механики упругих тел. Учебное пособие для ВУЗов. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та, 2002. 256 с.
3. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

## Summary

Mikhailovskii E.I., Tulubenskaya E.V. The influence of transversal deformations on the frequency spectrum of round plate

Kellog's modified method is used for the research of the influence of transversal deformations on the distribution of own frequencies of fluctuations of the round tightly squeezed plate.

*Сыктывкарский университет*

*Поступила 21.10.2002*