

УДК 539.3

ОБ АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ¹

К.Ф. Черных

При создании предельно простой (но без потери общности) теории упругости наиболее сложным является учет нелинейности и анизотропии. В монографии [1] были рассмотрены ортотропный и трансверсально-анизотропный материалы. В статье рассматривается общий случай анизотропии (кристаллы, текстуры, ортотропный и трансверсально-анизотропный материалы). Используется модель редуцированного стандартного материала, позволяющая получать точные решения анизотропных геометрически нелинейных краевых задач.

1. Комплексные зависимости

В работах [1-6] использовались комплексные (прямоугольные декартовы) координаты материальной точки до $(\zeta, \bar{\zeta})$ и после (z, \bar{z}) деформации

$$\zeta = x_1^0 + ix_2^0, \quad \bar{\zeta} = x_1^0 - ix_2^0, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$$

дифференцирование по ним

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - i \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} + i \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right)$$

и комплексные компоненты тензора

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}),$$

¹Работа выполнена при поддержке программы "Государственная поддержка ведущих научных школ РФ" (НШ - 2180.2003.1), гранта РФФИ № 02-01-01258, гранта МО РФ Е02-4.0-75.

$$T_3 = t_{13} + it_{23}, \quad T_4 = t_{31} + it_{32}, \quad T_5 = t_{33}. \quad (1.1)$$

При рассмотрении нелинейных анизотропных проблем удобно рассматривать комплексные компоненты тензора деформации Коши-Лагранжа, связанные с комплексными компонентами тензора дисторсии соотношениями [5]:

$$C_1^{\circ} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}\right) + 4\frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial \bar{\zeta}}, \quad C_2^{\circ} = 4\left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \zeta}\right)^2\right],$$

$$C_3^{\circ} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial x_3^{\circ}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3^{\circ}} + 2\frac{\partial \bar{x}_3}{\partial \zeta} \frac{\partial x_3}{\partial x_3^{\circ}}, \quad C_5^{\circ} = \frac{\partial z}{\partial x_3^{\circ}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_3^{\circ}} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_3^{\circ}}\right)^2. \quad (1.2)$$

2. Кристаллические классы и текстуры

Известно, что существуют 32 кристаллических класса, отнесенных к 7 кристаллическим системам (сингониям). Все они сведены в табл.1. В третьем ее столбце помещены порождающие элементы симметрии, комбинации которых позволяют получить все преобразования симметрии кристаллического класса. В четвертом столбце помещены порождающие элементы, позволяющие с дополнительным преобразованием инверсии, выполняющимся для рассматриваемого тензора 4-го ранга, добиться того же. В третьем и четвертом столбцах точка сопровождается плоскостью симметрии, параллельную оси симметрии, а двоеточие – перпендикулярную ей. Косая черта сопровождается следующей за ней осью симметрии, равнонаклоненную к координатным осям. Кроме перечисленных кристаллических классов имеются 7 классов – текстур, сведенных в табл.2. При этом во второй строке приведены их порождающие элементы, а в третьей – порождающие элементы, дающие вкупе с преобразованием инверсии все преобразования текстуры. Текстуры, как видно из приведенной таблицы, имеют среди своих элементов симметрии ось симметрии бесконечного порядка (∞). Ортотропными называют материалы, имеющие три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Трансверсально-изотропные материалы характеризуются наличием оси симметрии бесконечного порядка. Согласно табл.2 трансверсальной изотропией обладают все текстуры.

Таблица 1. Кристаллические классы

Кристалло- графическая система	Номер класса по Гроту	Класс по номенкла- туре Феодоровского института	Порождающие элементы симметрии	
<i>Трехклинная</i>	1	<i>Примитивный</i>	1	2
	2	<i>Центральный</i>	2	1
<i>Моноклинная</i>	3	<i>Аксиальный</i>	2	2
	4	<i>Планальный</i>	<i>m</i>	2
	5	<i>Планаксиальный</i>	2: <i>m</i>	2:2
<i>Ромбическая</i>	6	<i>Аксиальный</i>	2:2	2:2
	7	<i>Планальный</i>	2· <i>m</i>	2:2
	8	<i>Планаксиальный</i>	<i>m</i> ·2: <i>m</i>	2:2
<i>Тетрагональная</i>	9	<i>Гидро-примитивный</i>	4	4
	10	<i>Примитивный</i>	4	4
	11	<i>Гидро-планальный</i>	4· <i>m</i>	4:2
	12	<i>Аксиальный</i>	4:2	4:2
	13	<i>Центральный</i>	4: <i>m</i>	4
	14	<i>Планальный</i>	4· <i>m</i>	4:2
	15	<i>Планаксиальный</i>	<i>m</i> ·4: <i>m</i>	4:2
<i>Ромбоэдрическая (тригональная)</i>	16	<i>Примитивный</i>	3	3
	17	<i>Центральный</i>	6	3
	18	<i>Аксиальный</i>	3:2	3:2
	19	<i>Планальный</i>	3· <i>m</i>	3:2
<i>Гексогональная</i>	20	<i>Планаксиальный</i>	6· <i>m</i>	3:2
	21	<i>Гидро-примитивный</i>	3: <i>m</i>	6
	22	<i>Гидро-планальный</i>	<i>m</i> ·3: <i>m</i>	6:2
	23	<i>Примитивный</i>	6	6
	24	<i>Аксиальный</i>	6:2	6:2
	25	<i>Центральный</i>	6: <i>m</i>	6
<i>Кубическая</i>	26	<i>Планальный</i>	6· <i>m</i>	6:2
	27	<i>Планаксиальный</i>	<i>m</i> ·6: <i>m</i>	6:2
	28	<i>Примитивный</i>	2/3	2/3
	29	<i>Аксиальный</i>	4/3	4/3
	30	<i>Центральный</i>	2/ $\bar{6}$	2/3
	31	<i>Планальный</i>	4/3	4/3
	32	<i>Планаксиальный</i>	4/ $\bar{6}$	2/6

Таблица 2. Текстуры

Текстуры	1	2	3	4	5	6	7
<i>g</i>	∞	$\infty : m$	$\infty : m$	$m \cdot \infty : m$	$\infty : 2$	∞ / ∞	$\infty / \infty \cdot m$
<i>g₀</i>	∞			$\infty : 2$		∞ / ∞	

3. Нелинейная анизотропия.

Инвариантные блоки и базисные инварианты

Приступим к рассмотрению нелинейной анизотропии. Комплексные компоненты тензора Коши-Лагранжа при повороте на угол $\omega = \omega_3$ преобразуются по формулам [5]

$$C_1^{o\omega} = C_1^o, \quad C_2^{o\omega} = e^{-i2\omega} C_2^o, \quad C_3^{o\omega} = e^{-i\omega} C_3^o, \quad C_5^{o\omega} = C_5^o, \quad (3.1)$$

так что при любом значении угла поворота вокруг главной третьей координатной оси инвариантными относительно такого поворота являются величины:

$$C_1^o, \quad C_5^o, \quad C_2^o \bar{C}_2^o, \quad C_3^o \bar{C}_3^o, \quad C_2^o \bar{C}_3^{o2}. \quad (3.2)$$

Полученные величины будем называть *инвариантными блоками*, поскольку (как выяснится ниже) они либо являются инвариантами для кристаллических классов, текстур и анизотропных материалов, либо служат их составными частями (блоками). Для конкретных классов анизотропных материалов, обладающих определенными элементами (преобразованиями) симметрии, совокупности инвариантов могут быть различными комбинациями величин C_i^o , включающими и инвариантные блоки.

Рассмотрим подробнее порождающие элементы симметрии (см. последний столбец в табл.1 и последнюю строку в табл.2).

Так для поворотной оси второго порядка (2) имеем согласно (3.1) ($\omega = 2\pi/2 = \pi$):

$$C_1^{o\omega} = C_1^o, \quad C_5^{o\omega} = C_5^o, \quad C_2^{o\omega} = C_2^o, \quad C_3^{o\omega} = -C_3^o. \quad (3.3)$$

Для поворотной оси третьего порядка (3):

$$C_1^{o\omega} = C_1^o, \quad C_5^{o\omega} = C_5^o, \quad C_2^{o\omega} = e^{-i2\pi/3} C_2^o, \quad C_3^{o\omega} = -e^{-i\pi/3} C_3^o. \quad (3.4)$$

Для поворотной оси четвертого порядка (4) имеем

$$C_1^{o\omega} = C_1^o, \quad C_5^{o\omega} = C_5^o, \quad C_2^{o\omega} = -C_2^o, \quad C_3^{o\omega} = -iC_3^o. \quad (3.5)$$

Наконец, для поворотной оси шестого порядка (6):

$$C_1^{o\omega} = C_1^o, \quad C_5^{o\omega} = C_5^o, \quad C_2^{o\omega} = e^{-i2\pi/6} C_2^o, \quad C_3^{o\omega} = -e^{-i\pi/6} C_3^o. \quad (3.6)$$

При поперечной оси поворота второго порядка (у нас второй координатной оси) (2) путем замены индексов ($1 \rightarrow -1, 3 \rightarrow -3$) и на основании формул (1.1) имеем

$$C_1^{o\omega} = C_1^o, \quad C_5^{o\omega} = C_5^o; \quad C_2^{o\omega} = \bar{C}_2^o, \quad C_3^{o\omega} = \bar{C}_3^o. \quad (3.7)$$

Для равнонаклоненной к координатным осям оси поворота третьего порядка координатные оси переходят друг в друга, что отвечает циклической перестановке индексов

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1.$$

При преобразованиях отображении в координатных плоскостях m_i ($i = 1, 2, 3$) имеем

$$(1 \rightarrow -1)$$

$$C_1^{om} = C_1^o, \quad C_5^{om} = C_5^o, \quad C_2^{om} = \bar{C}_2^o, \quad C_3^{om} = -\bar{C}_3^o. \quad (3.8)_1$$

$$(2 \rightarrow -2)$$

$$C_1^{om} = C_1^o, \quad C_5^{om} = C_5^o, \quad C_2^{om} = \bar{C}_2^o, \quad C_3^{om} = \bar{C}_3^o. \quad (3.8)_2$$

$$(3 \rightarrow -3)$$

$$C_1^{om} = C_1^o, \quad C_5^{om} = C_5^o, \quad C_2^{om} = C_2^o, \quad C_3^{om} = -C_3^o. \quad (3.8)_3$$

Комбинируя принадлежащие рассматриваемым анизотропным материалам порождающие элементы симметрии (см. последний столбец в табл. 1 и последнюю строку в табл. 2), приходим к *базовым инвариантам*:

- *моноклинной сингонии*

$$C_1^o, C_5^o, C_2^o, C_3^{o2}, C_3^o \bar{C}_3^o; \quad (3.9)$$

- *ромбической сингонии*

$$C_1^o, C_5^o, C_2^o + \bar{C}_2^o, C_2^o \bar{C}_2^o, C_3^{o2} + \bar{C}_3^{o2}, C_3^o \bar{C}_3^o; \quad (3.10)$$

- *тетрагональной сингонии кристаллических классов 9, 10, 13*

$$C_1^o, C_5^o, C_2^{o2}, C_2^o \bar{C}_2^o, C_3^o \bar{C}_3^o, C_2^o C_3^{o2}, C_2^o \bar{C}_3^{o2}; \quad (3.11)$$

- *тетрагональной сингонии кристаллических классов 11, 12, 14, 15*

$$C_1^o, C_5^o, C_2^o + \bar{C}_2^o, C_2^o \bar{C}_2^o, C_3^o \bar{C}_3^o, C_2^o C_3^{o2} + \bar{C}_2^o \bar{C}_3^{o2}, \\ C_2^o \bar{C}_3^{o2} + \bar{C}_2^o C_3^{o2}, \frac{i}{4}(C_2^o C_3^{o2} - \bar{C}_2^o \bar{C}_3^{o2}), \frac{i}{4}(C_2^o \bar{C}_3^{o2} - \bar{C}_2^o C_3^{o2}); \quad (3.12)$$

- *тригональной сингонии классов 16, 17*

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ}\bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ 3}, C_2^{\circ}\bar{C}_3^{\circ 2}; \quad (3.13)$$

- *тригональной сингонии классов 18, 19, 20*

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ}\bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ 3} + \bar{C}_2^{\circ 3}, C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ}, \\ C_2^{\circ}\bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ}C_3^{\circ 2}, \frac{i}{4}(C_2^{\circ}\bar{C}_3^{\circ 2} - \bar{C}_2^{\circ}C_3^{\circ 2}); \quad (3.14)$$

- *гексагональной сингонии классов 21, 23, 25*

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ}\bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ}\bar{C}_3^{\circ 2}; \quad (3.15)$$

- *гексагональной сингонии классов 22, 24, 26, 27*

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ}\bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ}\bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ}C_3^{\circ 2}; \quad (3.16)$$

- *кубической сингонии*

$$I_C = C_1^{\circ} + C_5^{\circ} = c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ} + c_{33}^{\circ} \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{2}C_1^{\circ 2} - \frac{1}{8}(C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ})^2 + C_5^{\circ 2} = c_{11}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ 2} + c_{33}^{\circ 2}, \quad (3.18)_1$$

$$\frac{1}{4}C_1^{\circ 2} - \frac{1}{16}(C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ})^2 + C_1^{\circ}C_5^{\circ} = c_{11}^{\circ}c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ}c_{33}^{\circ} + c_{11}^{\circ}c_{33}^{\circ}, \quad (3.18)_2$$

$$-\frac{1}{16}(C_2^{\circ} - \bar{C}_2^{\circ})^2 + C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ} = c_{12}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} + c_{13}^{\circ 2}, \quad (3.18)_3$$

$$III_C = \frac{1}{4}(C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ}\bar{C}_2^{\circ}) - C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ} + C_1^{\circ}C_5^{\circ} = \\ = (c_{11}^{\circ}c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ}c_{33}^{\circ} + c_{11}^{\circ}c_{33}^{\circ}) - (c_{12}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} + c_{13}^{\circ 2}). \quad (3.19)$$

В выражения (3.18), (3.19) входят всего три симметричные комбинации компонент. При этом две из них входят в инвариант I_C^2 . Поэтому можно сохранить лишь комбинации (3.17), (3.19). Далее, имеем четыре кубические инвариантные комбинации

$$III_C = \frac{1}{4}(C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ}\bar{C}_2^{\circ})C_5^{\circ} - \frac{1}{2}C_1^{\circ}C_3^{\circ}\bar{C}_3^{\circ} + \frac{1}{4}(C_2^{\circ}\bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ}C_3^{\circ 2}) = \\ = c_{11}^{\circ}c_{22}^{\circ}c_{33}^{\circ} + 2c_{12}^{\circ}c_{23}^{\circ}c_{13}^{\circ} - (c_{33}^{\circ}c_{12}^{\circ 2} + c_{11}^{\circ}c_{23}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ}c_{13}^{\circ 2}) = |c_{ij}^{\circ}|; \quad (3.20)$$

$$\left[\frac{1}{4} C_1^{\circ 2} - \frac{1}{16} (C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ})^2 \right] C_5^{\circ} = c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ}; \quad (3.21)$$

$$-\frac{1}{16} (C_2^{\circ} - \bar{C}_2^{\circ}) (C_3^{\circ 2} - \bar{C}_3^{\circ 2}) = c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16} (C_2^{\circ} - \bar{C}_2^{\circ})^2 C_5^{\circ} - \frac{1}{8} (C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ}) (C_3^{\circ 2} + \bar{C}_3^{\circ 2}) + \frac{1}{2} C_1^{\circ} C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} = \\ = c_{11}^{\circ} c_{23}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ} c_{13}^{\circ 2} + c_{33}^{\circ} c_{12}^{\circ 2}, \end{aligned}$$

содержащих лишь три симметричные комбинации компонент. Выберем из них первые три. Можно показать, что сказанное выше справедливо и для классов 29, 31, 32. Таким образом, инвариантами (3.17), (3.19)–(3.22) обладают *все классы* кубической сингонии.

Для *текстур* ∞ (последняя строка в табл.2), согласно соотношениям (3.2), имеют место вещественные инварианты

$$C_5^{\circ}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, \frac{i}{4} (C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} - \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2});$$

$$I_C = C_1^{\circ} + C_5^{\circ}, \quad II_C = \frac{1}{4} (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}) - C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + C_1^{\circ} C_5^{\circ},$$

$$III_C = \frac{1}{4} (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}) C_5^{\circ} + \frac{1}{2} C_1^{\circ} C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + \frac{1}{4} (C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2}), \quad (3.23)$$

равносильные набору (3.2). Этими инвариантами обладает и *трансверсально-изотропный* материал, имеющий третью координатную ось в качестве поворотной бесконечного порядка. Наличие боковой оси (:2) устраняет для текстур $\infty : 2$ третий инвариант. Для текстур же ∞ / ∞ имеют место любые поворотные оси, в том числе и равнонаклоненная ось третьего порядка. Совместность с последней приводит для них к замене инвариантов (3.23) на следующие:

$$I_C, \quad II_C, \quad III_C, \quad (3.24)$$

справедливые и для *гиротропных, и изотропных* материалов.

Для *ортотропного* материала имеют место три элемента симметрии: отображения в плоскостях m_i ($i = 1, 2, 3$), для которых имеем (см. (3.8)₁, (3.8)₂, (3.8)₃) общие инварианты

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ 2} + \bar{C}_3^{\circ 2}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, III_C, (J). \quad (3.25)$$

Из полученных ранее соотношений следует, что для *несимметричных* материалов базисными являются величины

$$C_1^{\circ}, C_2^{\circ}, C_3^{\circ}, C_5^{\circ}, (c_{11}^{\circ}, c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, c_{12}^{\circ}, c_{13}^{\circ}, c_{23}^{\circ}). \quad (3.26)$$

Эти величины инвариантны и для кристаллов *тригональной* сингонии, имеющих несущественные для рассматриваемого тензора четного порядка симметрию инверсии относительно точки.

Естественно, что нами приведены не все, а только *изначально-образующие* инварианты. Инвариантами являются любые их комбинации, со списком которых можно ознакомиться, например, в [7]. Отметим также, что для практического использования при нелинейном подходе полученных инвариантов, по-видимому, вполне достаточно.

4. Нелинейная плоская задача

Рассмотрим обобщенную плоскую задачу, отвечающую преобразованию комплексных координат

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda x_3^0,$$

где λ - (постоянная) кратность удлинения в направлении третьей координатной оси.

С учетом этих выражений выпишем *базисные инварианты плоской задачи*, присоединяя к ним кратность изменения объема $J = \lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \right)$ и заменяя на него инвариант $III_C = J^2$. При этом из соотношений (3.9)-(3.26) следуют базисные инварианты:

- *моноклинной сингонии*

$$C_1^0, C_5^0, C_2^0 (J); \quad (4.1)$$

- *ромбической сингонии и ортотропного материала*

$$C_1^0, C_5^0, C_2^0 + \bar{C}_2^0, C_2^0 \bar{C}_2^0, (J); \quad (4.2)$$

- *тетрагональной сингонии классов 9, 10, 13*

$$C_1^0, C_5^0, C_2^{02}, C_2^0 \bar{C}_2^0, (J); \quad (4.3)$$

- *тетрагональной сингонии классов 11, 12, 14, 15*

$$C_1^0, C_5^0, C_2^{02} + \bar{C}_2^{02}, C_2^0 \bar{C}_2^0, (J); \quad (4.4)$$

- *тригональной сингонии классов 16, 17*

$$C_1^0, C_5^0, C_2^{02} + \bar{C}_2^{02}, C_2^0 \bar{C}_2^0, C_2^{03}, (J); \quad (4.5)$$

- *тригональной сингонии классов 18-20*

$$C_1^\circ, C_5^\circ, C_2^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ 2}, C_2^\circ \bar{C}_2^\circ, C_2^{\circ 3} + \bar{C}_2^{\circ 3}, (J); \quad (4.6)$$

- *гексагональной сингонии*

$$C_1^\circ, C_5^\circ, C_2^\circ \bar{C}_2^\circ, (J); \quad (4.7)$$

- *кубической сингонии*

$$C_5^\circ, I_C = C_1^\circ + C_5^\circ, II_C = \frac{1}{4}(C_1^{\circ 2} - C_2^\circ \bar{C}_2^\circ) + C_1^\circ C_5^\circ, J, \\ \frac{1}{2}C_1^{\circ 2} - \frac{1}{8}(C_2^\circ + \bar{C}_2^\circ)^2 + C_5^{\circ 2}, \left[\frac{1}{4}C_1^{\circ 2} - \frac{1}{16}(C_2^\circ + \bar{C}_2^\circ)^2 \right] C_5^\circ; \quad (4.8)$$

- *текстур ∞ , $\infty : 2$ и трансверсального материала*

$$C_5^\circ, I_C = C_1^\circ + C_5^\circ, II_C = \frac{1}{4}(C_1^{\circ 2} - C_2^\circ \bar{C}_2^\circ) + C_1^\circ C_5^\circ, J; \quad (4.9)$$

- *текстуры ∞/∞ , гиротропного и изотропного материалов*

$$I_C, II_C, III_C; \quad (4.10)$$

- *несимметричных материалов и триклинной сингонии*

$$C_1^\circ, C_5^\circ, C_2^\circ (J). \quad (4.11)$$

5. Стандартный материал (общий случай)

Для стандартного материала [5] в соотношениях предыдущего раздела следует сохранить лишь квадратичные (по компонентам тензора дисторсии) инварианты, используя тем самым инварианты вида

$$\Phi = BJ + A_1 C_1^\circ + 1/2 A_2 (C_2^\circ + \bar{C}_2^\circ) + i/2 A_3 (C_2^\circ - \bar{C}_2^\circ) + A_4 C_5^\circ = \\ = B\lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \right) + 2A_1 \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right) + \\ + 2A_2 \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right) + i2A_3 \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right) + A_4 \lambda^2, \quad (5.1)$$

где B, A_1, A_2, A_3, A_4 – положительные постоянные. Подстановка этого выражения в соотношения [5]

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_1 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \zeta)}, \quad \{F^{-1} \cdot J \sum\}_2 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \bar{\zeta})},$$

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial x_3 / \partial x_3^0)},$$

где $\{F^{-1} \cdot J \sum\}_i$ – комплексные компоненты (вспомогательного) тензора номинальных напряжений, дает для рассматриваемого сжимаемого материала

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_1 = 2(B\lambda + 2A_1) \frac{\partial z}{\partial \zeta} + 4(A_2 + iA_3) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_2 = 2(-B\lambda + 2A_1) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + 4(A_2 - iA_3) \frac{\partial z}{\partial \zeta},$$

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_3 = B \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right) + 2A_4 \lambda. \quad (5.2)$$

Подстановка же полученных выражений в однородное уравнения равновесия [5]

$$\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J \sum\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J \sum\}_2}{\partial \zeta} = 0$$

приводит к разрешающему уравнению

$$(A_2 - iA_3) \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} + 2A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + (A_2 + iA_3) \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{\zeta}^2} = 0. \quad (5.3)$$

Представим его в виде

$$D_1 D_2 z = 0, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}. \quad (5.4)$$

Сопоставление уравнений (5.3) и (5.4) приводит к значениям корней

$$\alpha_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - (A_2^2 + A_3^2)}}{A_2 + iA_3}, \quad \alpha_2 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - (A_2^2 + A_3^2)}}{A_2 + iA_3}. \quad (5.5)$$

Расчленим уравнение (5.3), полагая

$$D_1 \varphi = 0, \quad D_2 z = \varphi.$$

Последовательно интегрируя эту систему, находим

$$\varphi = f_1'(\zeta + \alpha_1 \bar{\zeta}), \quad z = \frac{f_1(\zeta + \alpha_1 \bar{\zeta})}{\alpha_1 - \alpha_2} + f_2(\zeta + \alpha_2 \bar{\zeta}).$$

Вводя новые аргументы и функции

$$\zeta_1 = \zeta + \alpha_1 \bar{\zeta}, \quad \zeta_2 = \zeta + \alpha_2 \bar{\zeta},$$

$$\frac{f_1(\zeta + \alpha_1 \bar{\zeta})}{\alpha_1 - \alpha_2} = \int \Phi(\zeta_1) d\zeta_1, \quad f_2(\zeta + \alpha_2 \bar{\zeta}) = \int \overline{\Psi(\zeta_2)} d\zeta_2,$$

имеем

$$z = \int \Phi(\zeta_1) + \int \overline{\Psi(\zeta_2)} d\zeta_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta_1} = \Phi(\zeta_1), \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} = \overline{\Psi(\zeta_2)}. \quad (5.6)$$

Теперь выражения (5.2) могут быть записаны в виде

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_1 = 2(k_{11} \Phi(\zeta_1) + \overline{k_{12} \Psi(\zeta_2)}),$$

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_2 = 2(k_{21} \Phi(\zeta_1) + \overline{k_{22} \Psi(\zeta_2)}),$$

$$\{F^{-1} \cdot J \sum\}_3 = B[|\Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)}|^2 - |\alpha_1 \Phi(\zeta_1) + \overline{\alpha_2 \Psi(\zeta_2)}|^2] + 2A_3 \lambda;$$

$$k_{11} = B\lambda + 2A_1 + \alpha_1(A_2 + iA_3), \quad k_{12} = B\lambda + 2A_1 + \bar{\alpha}_1(A_2 - iA_3),$$

$$k_{21} = \alpha_1(-B\lambda + 2A_1) + A_2 - iA_3, \quad k_{22} = \bar{\alpha}_2(-B\lambda + 2A_1) + A_2 + iA_3. \quad (5.7)$$

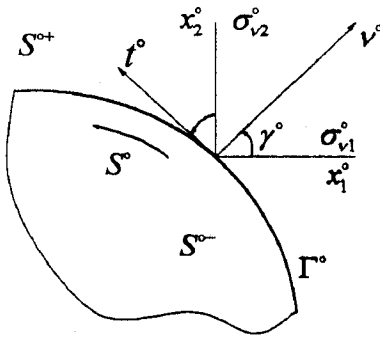


Рис. 5.1

С учетом выражений (5.6), (5.7) и рис. 5.1 находим [5]:

силовое граничное условие

$$\begin{aligned}
 & [k_{11}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{12}\Psi(\zeta_2)}]e^{i\gamma^0} + \\
 & + [k_{21}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{22}\Psi(\zeta_2)}]e^{-i\gamma^0} = \\
 & = [\sigma_{\nu^0\nu^0}(s^0) + i\sigma_{\nu^0t^0}(s^0)]e^{i\gamma^0}; \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

дисторсионное граничное условие

$$\begin{aligned}
 & [\Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)}]e^{i\gamma^0} - [\alpha_1\Phi(\zeta_1) + \alpha_2\overline{\Psi(\zeta_2)}]e^{-i\gamma^0} = \\
 & = -i\frac{\partial z(s^0)}{\partial s^0}. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Коль скоро функции Гурса-Колосова найдены, условные напряжения σ_{ij}^0 и угол поворота материальной частицы ω подсчитываются по формулам [5]

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1^0 & \equiv \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = 2\text{Re}[e^{-i\omega}(k_{11}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{12}\Psi(\zeta_2)})], \\
 \Sigma_2^0 & \equiv \sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0 + \sigma_{12}^0 = 2e^{-i\omega}(k_{21}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{22}\Psi(\zeta_2)}), \\
 e^{i\omega} & = \frac{\Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)}}{|\Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)}|}, \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

величины в правых частях которых заменяются выражениями из (5.6) и (5.7).

Рассмотрим комплексные плоскости ζ_1, ζ_2 с отверстиями, содержащими, соответственно, точки $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_2 = 0$, и примем (при больших ζ)

$$\begin{aligned}
 \Phi(\zeta_1) & = a_0 + \Phi_0(\zeta_1), \quad \Phi_0(\zeta_1) = \frac{a_{-2}}{\zeta_1^2} + \frac{a_{-3}}{\zeta_1^3} + \dots, \\
 \Psi(\zeta_2) & = b_0 + \Psi_0(\zeta_2), \quad \Psi_0(\zeta_2) = \frac{b_{-2}}{\zeta_2^2} + \frac{b_{-3}}{\zeta_2^3} + \dots, \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

обеспечивающими в рассматриваемых бесконечных областях конечность напряжений, самоуравновешенность нагрузки на контурах отверстий и однозначность смещений.

Подставляя эти выражения в соотношения (5.10) и устремляя ζ_1, ζ_2 к ∞ находим

$$\sum_1^{\infty} = e^{-i\omega\infty} (k_{11}a_o + \overline{k_{12}b_o}) + e^{i\omega\infty} (\overline{k_{11}a_o} + k_{12}b_o),$$

$$\sum_2^{\infty} = 2e^{-i\omega\infty} (k_{21}a_o + \overline{k_{22}b_o}), \quad e^{i\omega\infty} = \frac{a_o + \overline{b_o}}{|a_o + \overline{b_o}|}.$$

Отсюда и следует

$$a_o = e^{i\omega\infty} \frac{\overline{k_{22}} \sum_1^{\infty} - \overline{k_{12}} \sum_2^{\infty}}{2(k_{11}\overline{k_{22}} - \overline{k_{12}}k_{21})}, \quad b_o = e^{-i\omega\infty} \frac{-\overline{k_{21}} \sum_1^{\infty} + \overline{k_{11}} \sum_2^{\infty}}{2(k_{11}\overline{k_{22}} - \overline{k_{12}}k_{21})}. \quad (5.12)$$

6. Плоскость с отверстием. Прямолинейный разрез

Рассмотрим задачу о деформации плоскости со свободным от нагрузки контуром отверстия при заданных на бесконечности напряжениях. Подставляя выражения (5.11) в однородное граничное условие (5.8), приходим к исходному граничному условию

$$\begin{aligned} [k_{11}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{12}\Psi(\zeta_2)}]e^{i\gamma^o} + [k_{21}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{22}\Psi(\zeta_2)}]e^{-i\gamma^o} = \\ = [k_{11}a_o + \overline{k_{12}b_o}]e^{i\gamma^o} - [k_{21}a_o + \overline{k_{22}b_o}]e^{-i\gamma^o}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \zeta &= \kappa(\chi) = R(\chi^{-1} + \kappa_o(\chi)), \\ \zeta_1 &= \kappa_1(\chi_1), \quad \chi_1 = \kappa_1^{-1}(\zeta_1), \\ \zeta_2 &= \kappa_2(\chi_2), \quad \chi_2 = \kappa_2^{-1}(\zeta_2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

— функции, конформно отображающие внутренности единичных кругов $|\chi_i| \leq 1$ ($i = 0, 1, 2$) на комплексные плоскости $\zeta_o = \zeta, \zeta_1, \zeta_2$ с отверстиями, и им обратные. С учетом соотношений на единичной окружности $\sigma = e^{i\theta^o}$ [5]

$$\sigma\kappa'(\sigma) = R\left(-\frac{1}{\sigma} + \sigma\kappa'_o(\sigma)\right) = R(-\overline{\sigma} + \sigma\kappa'_o(\sigma)),$$

$$\chi\kappa'_o(\chi) = c_1\chi + \dots + nc_n\chi^n,$$

$$e^{i\gamma^o} = \frac{\sigma\kappa'(\sigma)}{|\kappa'(\sigma)|} = \frac{R(-\overline{\sigma} + \sigma\kappa'_o(\sigma))}{|\kappa'(\sigma)|}, \quad e^{-i\gamma^o} = \frac{\overline{\sigma\kappa'(\sigma)}}{|\kappa'(\sigma)|} = \frac{R(-\overline{\sigma} + \overline{\sigma\kappa'_o(\sigma)})}{|\kappa'(\sigma)|}$$

и (6.2) запишем условие (6.1) на единичной окружности

$$\Lambda_1\Phi_o[\kappa_1(\sigma)] + \overline{\Lambda_2\Psi_o[\kappa_2(\sigma)]} = R[f_1(\sigma) + \overline{f_2(\sigma)}], \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \kappa_{11}\sigma\kappa'(\sigma) + \kappa_{21}\sigma^{-1}\overline{\kappa}'(\sigma^{-1}), \quad \Lambda_2 = \kappa_{22}\sigma\kappa'(\sigma) + \kappa_{12}\sigma^{-1}\overline{\kappa}'(\sigma^{-1}); \\ f_1(\sigma) &= -(k_{11}a_0 + \overline{k_{12}b_0})\sigma\kappa'_0(\sigma) + (k_{21}a_0 + \overline{k_{22}b_0})\sigma, \\ f_2(\sigma) &= -(\overline{k_{21}a_0} + k_{22}b_0)\sigma\kappa'_0(\sigma) + (\overline{k_{11}a_0} + k_{12}b_0)\sigma.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Следуя изложенному в [5] методу расчленения граничных условий, приравняем в условии (6.3) первое слагаемое левой части первому слагаемому правой, а второе – второму. Уходя затем с контуров во внутрь областей (т.е. заменяя σ , соответственно, на χ_1 , χ_2 и используя обратные конформные отображения, получаем с учетом (5.11)

$$\Phi(\zeta_1) = a_0 + R \frac{f_1[\kappa_1^{-1}(\zeta_1)]}{\Lambda_1[\kappa_1^{-1}(\zeta_1)]}, \quad \Psi(\zeta_2) = b_0 + R \frac{f_2[\kappa_2^{-1}(\zeta_2)]}{\Lambda_2[\kappa_2^{-1}(\zeta_2)]}. \quad (6.5)$$

Для эллиптического отверстия имеем [5]

$$\begin{aligned}\zeta &= \kappa(\chi) = \frac{a+b}{2}\chi + \frac{a-b}{2}\chi^{-1} \quad (R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a-b}), \\ \chi &= \kappa^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2Rm}, \quad \chi^{-1} = \kappa^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2R}; \\ \zeta &= x_1^0 + ix_2^0, \quad x_1^0 = a \cos \theta^0, \quad x_2^0 = b \sin \theta^0.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Представим, далее, в том же виде

$$\zeta_k = x_1^{o(k)} + ix_2^{o(k)}, \quad x_1^{o(k)} = a^{(k)} \cos \theta^0, \quad x_2^{o(k)} = b^{(k)} \sin \theta^0, \quad (k = 1, 2) \quad (6.7)$$

где согласно (5.6)

$$a^{(k)} = (1 + \alpha_k)a, \quad b^{(k)} = (1 - \alpha_k)b. \quad (6.8)$$

При этом соотношения (6.6) заменяются следующими:

$$\begin{aligned}\zeta_k &= \kappa_k(\chi_k) = \frac{(1 + \alpha_k)a + (1 - \alpha_k)b}{2}\chi_k^{-1} + \frac{(1 + \alpha_k)a - (1 - \alpha_k)b}{2}\chi_k, \\ \chi_k &= \kappa_k^{-1}(\zeta_k) = \frac{\zeta_k - \sqrt{\zeta_k^2 - (1 + \alpha_k)^2a^2 + (1 - \alpha_k)^2b^2}}{(1 + \alpha_k)a + (1 - \alpha_k)b}, \\ \chi_k^{-1} &= \frac{\zeta_k + \sqrt{\zeta_k^2 - (1 + \alpha_k)^2a^2 + (1 - \alpha_k)^2b^2}}{(1 + \alpha_k)a + (1 - \alpha_k)b} \quad (k = 1, 2).\end{aligned}\quad (6.9)$$

Напомним, что постоянные a_0, b_0 подсчитываются по формулам (5.12). Затем следует найти из соотношений (6.5) $\Phi(\zeta_1), \Psi(\zeta_2)$ и воспользоваться соотношениями (5.5), (5.2), (5.6) и (5.10).

Рассмотрим подробнее плоскость с прямолинейным разрезом, для которого в предыдущих зависимостях следует положить $b = 0$. При этом из соотношений (6.6)–(6.9) следует:

$$R = \frac{a}{2}, \quad m = 1; \quad \kappa_k(\chi_k) = R\left(\frac{1}{\chi_k} + \chi_k\right), \quad \chi_k \kappa'_k(\chi_k) = \chi_k,$$

$$\chi_k \kappa'_k(\chi_k) = -\frac{1}{\chi_k} \bar{\kappa}'\left(\frac{1}{\chi_k}\right) = R\left(\chi_k - \frac{1}{\chi_k}\right);$$

$$\chi_k = \frac{\zeta_k - \sqrt{\zeta_k^2 - (1 + \alpha_k)^2 a^2}}{(1 + \alpha_k)a} \quad \chi_k^{-1} = \frac{\zeta_k + \sqrt{\zeta_k^2 - (1 + \alpha_k)^2 a^2}}{(1 + \alpha_k)a} \quad (k = 1, 2). \quad (6.10)$$

С учетом этого находим из (6.4) и (6.5)

$$\Phi(\zeta_1) = a_0 + \frac{1}{2} \left(a_0 - \frac{k_{22} - k_{12} \bar{b}_0}{k_{11} - k_{21} \bar{b}_0} \right) \left(\frac{\zeta_1}{\sqrt{\zeta_1^2 - (1 + \alpha_1)^2 a^2}} - 1 \right),$$

$$\Psi(\zeta_2) = b_0 + \frac{1}{2} \left(b_0 - \frac{k_{11} - k_{21} \bar{a}_0}{k_{22} - k_{12} \bar{a}_0} \right) \left(\frac{\zeta_1}{\sqrt{\zeta_1^2 - (1 + \alpha_1)^2 a^2}} - 1 \right). \quad (6.11)$$

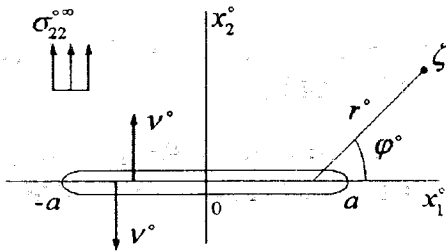


Рис. 6.1

Получим необходимые при рассмотрении трещин асимптотические формулы для условных напряжений в окрестности правого конца разреза (рис. 6.1). Имеем согласно выражениям (5.6) при $a \geq r^0$

$$\zeta_k = \zeta + \alpha_k \bar{\zeta}_k = (1 + \alpha_k)a +$$

$$+ r^0 [(1 + \alpha_k) \cos \varphi^0 + i(1 - \alpha_k) \sin \varphi^0] \sim (1 + \alpha_k)a,$$

$$\sqrt{\zeta_k^2 - (1 + \alpha_k)^2 a^2} = \sqrt{(\zeta_k + (1 + \alpha_k)a)(\zeta_k - (1 + \alpha_k)a)} \sim$$

$$\sim \sqrt{2(1 + \alpha_k)a} \sqrt{r^0 [(1 + \alpha_k) \cos \varphi^0 + i(1 - \alpha_k) \sin \varphi^0]} \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда и из выражений (6.11) следует асимптотика для функций Гурса-Колосова

$$\Phi(\zeta_1) \sim \frac{1}{2} \left(a_0 - \frac{k_{22} - k_{12} \bar{b}_0}{k_{11} - k_{21} \bar{b}_0} \right) \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi^0 + i \frac{1 - \alpha_1}{1 + \alpha_1} \sin \varphi^0}} \left(\frac{a}{2r^0} \right)^{1/2}$$

$$\Psi(\zeta_2) \sim \frac{1}{2} \left(b_0 - \frac{k_{11} - k_{21}}{k_{22} - k_{12}} \bar{a}_0 \right) \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi^0 + i \frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2} \sin \varphi^0}} \left(\frac{a}{2r^0} \right)^{1/2}. \quad (6.12)$$

Остается, подставляя величины (5.6), (5.2) в (5.10), найти асимптотические выражения условных напряжений, имеющих, как не трудно видеть, стандартную особенность $m = 1/2$. При этом входящие в полученные выражения постоянные B, A_1, A_2, A_3, A_4 определяются сопоставлением линеаризованных выражений (5.10) с законом Гука для рассматриваемого анизотропного материала.

Литература

1. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Часть 1. Теория. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1999. 276 с. ISBN 5-7997-0118-6.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
3. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
4. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996. 288 с.
5. Chernykh K.F. An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity. USA. N.Y.: Begell Publishing House. 1998. 248 p.
6. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Часть 2. Приложения. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2000. 195 с. ISBN 5-7997-0181-X.
7. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.

Summary

Chernykh K.F. On anisotropic nonlinear elasticity

In article the common case of anisotropy is considered (for example, crystal, texture, orthotropic and transversally anisotropic materials). The model of reduced standard material is used. It allows to get the exact decision of anisotropic geometrically nonlinear boundary value problem.