Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.5.2003

УДК 519.613

Закритическое поведение подкрепленной пластины[1]

Д.В. Холмогоров

Рассматривается задача о закритическом поведении прямоугольной пластины, нагруженной по краям нормальными и касательными усилиями и подкрепленной системой упругих ребер. Предложена схема численного решения задачи, основанная на аппроксимации прогиба пластины и функции напряжений натуральными кубическими сплайнами двух переменных. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами a и b, нагруженную по краям $x = 0$, $x = a$ нормальными усилиями σ_x и по всем краям касательными усилиями τ (рис. 1).

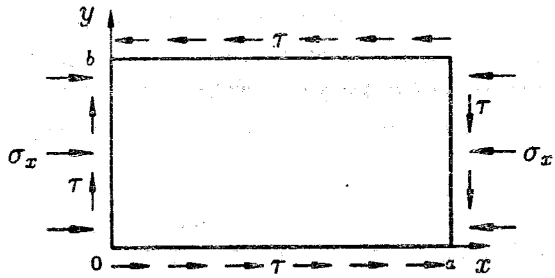

Рис. 1.

Пластина подкреплена упругими ребрами, параллельными оси x с концами в точках $[0, y_k], [a, y_k]$ $k = 1..r$, $0 < y_1 < \ldots < y_r < b$. Будем считать, что ребра реагируют на поперечное смещение точек пластины как винклеровские основания с коэффициентами жесткости β_k, $k = 1..r$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-96431.

Пусть $w(x,y)$ $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ – прогиб пластины. В качестве разрешающей системы примем уравнения равновесия и совместности деформаций для гибких пластинок [1]:

$$\frac{D}{h}\Delta^2 w = L(w,\Phi) - \sum_{k=1}^{r} \beta_k \cdot w_-(x,y)\delta(y-y_k) \tag{1}$$

$$\frac{1}{E}\Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2}L(w,w). \tag{2}$$

Здесь h – толщина пластины; E – модуль Юнга; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – цилиндрическая жесткость; ν – коэффициент Пуассона; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака; $w_- = \min\{0,w\}$ – срезка функции;

$$L(w,\Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{3}$$

Функция напряжений Φ связана с напряжениями в срединной поверхности следующими формулами [1]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

Задача исследования закритического поведения пластины сводится к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений (1), (2) относительно функций w и Φ, удовлетворяющих некоторым граничным условиям, и при заданных на контуре пластины значениях напряжений σ_x и τ, превышающих критические.

Пусть прогиб пластины удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0,a; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0,b. \tag{5}$$

Учитывая условия нагружения пластины и выражения (4), функцию напряжений Φ будем искать в виде

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\sigma_x \cdot y^2 - \tau \cdot xy + \widetilde{\Phi}(x,y). \tag{6}$$

Поскольку пластина сжимается только вдоль оси x (на краях $y = 0,b$ $\sigma_y = 0$), из формул (4) и представления (6) следует

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0,a; \quad \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0,b. \tag{7}$$

Заметим также, что на контуре пластины функция напряжений Φ может быть определена с точностью до линейной функции (см. формулы (4)), поэтому для определенности полагаем

$$\widetilde{\Phi} = 0 \text{ при } y = 0, b \text{ и при } x = 0, a. \tag{8}$$

Подставляя представление (6) функции напряжений Φ в уравнения (1), (2), для определения w и $\widetilde{\Phi}$ получим следующую задачу

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \dfrac{h}{D}\left[L(w,\widetilde{\Phi}) - \sum\limits_{k=1}^{r}\beta_k \cdot w_-(x,y)\delta(y-y_k)\right] \\ \Delta^2\widetilde{\Phi} = -\dfrac{E}{2}L(w,w) \end{cases} \tag{9}$$

при граничных условиях (5), (7) и (8).

2. Итерационная схема

Перепишем систему (9) в операторной форме

$$\begin{cases} \mathcal{A}w = \mathcal{G}_1(w,\widetilde{\Phi}) \\ \mathcal{A}\widetilde{\Phi} = \mathcal{G}_2(w) \end{cases}, \tag{10}$$

здесь $\mathcal{A}$ – бигармонический оператор Δ^2, а $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ – нелинейные дифференциальные операторы правой части системы (9).

Пусть w_k – к-е приближение, удовлетворяющее граничным условиям (5), тогда следующее к+1-е приближение строится в соответствии с итерационной схемой Ричардсона:

$$w_{k+1} = \alpha \cdot w_k + (1-\alpha)\cdot \mathcal{A}^{-1}\mathcal{G}_1(w_k, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{G}_2(w_k)) \quad \alpha \in (0,1). \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{A}^{-1}$ соответствует обращению бигармонического оператора, т.е. решению задачи вида

$$\Delta^2 u = g_0 \tag{12}$$

при фиксированной правой части g_0 и граничных условиях шарнирного опирания

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, b.$$

Из формулы (11) следует, что для построения $k+1$-го приближения задачу (12) нужно решить два раза: сначала найти функцию $\widetilde{\Phi}$ из уравнения (см. (9))

$$\Delta^2\widetilde{\Phi} = -\frac{E}{2}L(w_k, w_k), \tag{13}$$

затем – $\widetilde{w}$, как решение задачи

$$\Delta^2\widetilde{w} = \frac{h}{D}\left[L(w_k,\widetilde{\Phi}) - \sum_{l=1}^{r}\beta_l\cdot w_{k-}(x,y)\delta(y-y_l)\right], \tag{14}$$

тогда $w_{k+1} = \alpha\cdot w_k + (1-\alpha)\cdot\widetilde{w}$.

Заметим, что уравнения (13), (14) являются уравнениями Эйлера соответственно для функционалов

$$\mathcal{J}_1(\widetilde{\Phi}) \triangleq \iint_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\Delta\widetilde{\Phi}\right)^2 + \frac{E}{2}\widetilde{\Phi}\cdot L(w_k,w_k)\right]dxdy, \tag{15}$$

$$\mathcal{J}_2(\widetilde{w}) \triangleq \iint_\Omega \left[\frac{1}{2}(\Delta\widetilde{w})^2 - \frac{h}{D}\widetilde{w}\cdot L(w_k,\widetilde{\Phi})\right]dxdy +$$

$$+\frac{h}{D}\sum_{l=1}^{r}\beta_l\int_0^a \widetilde{w}(x,y_l)w_{k-}(x,y_l)\,dx, \tag{16}$$

поэтому задачи (13), (14) эквивалентны следующим вариационным проблемам

$$\mathcal{J}_1(\widetilde{\Phi}) = \mathcal{J}_{11}(\widetilde{\Phi}) + \frac{E}{2}\mathcal{J}_{12}(\widetilde{\Phi},w_k,w_k) \to \min_{\widetilde{\Phi}}, \tag{17}$$

$$\mathcal{J}_2(\widetilde{w}) = \mathcal{J}_{11}(\widetilde{w}) - \frac{h}{D}\mathcal{J}_{12}(\widetilde{w},w_k,\widetilde{\Phi}) + \frac{h}{D}\sum_{l=1}^{r}\beta_l\mathcal{J}_{23}^l(\widetilde{w},w_{k-}) \to \min_{\widetilde{w}}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{J}_{11}(\widetilde{w}) \triangleq \frac{1}{2}\iint_\Omega (\Delta\widetilde{w})^2\,dxdy,$$

$$\mathcal{J}_{12}(\widetilde{w},w_k,\widetilde{\Phi}) \triangleq \frac{1}{2}\iint_\Omega \widetilde{w}\cdot L(w_k,\widetilde{\Phi})\,dxdy,$$

$$\mathcal{J}_{23}^l(\widetilde{w},w_{k-}) \triangleq \int_0^a \widetilde{w}(x,y_l)w_{k-}(x,y_l)\,dx. \tag{19}$$

3. Сплайн аппроксимация

1. Для построения конечномерной аппроксимации задачи (9) функцию прогиба $w(x,y)$ и функцию $\widetilde{\Phi}(x,y)$ будем приближать интерполяционными кубическими сплайнами двух переменных [2].

В области $\Omega = [0,a]\times[0,b]$ введем сетку с узлами в точках

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = a, \quad 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m+1} = b$$

и пусть

$$w_{ij} = w(x_i, y_j),\ \widetilde{\Phi}_{ij} = \widetilde{\Phi}(x_i, y_j),\ i \in 0 : n+1,\ j \in 0 : m+1.$$

Интерполяционным кубическим сплайном двух переменных называется функция $S(x,y) = S(w; x, y)$, которая на каждом из прямоугольников $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ имеет вид

$$S(x,y) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_{\alpha,\beta}(x - x_i)^{\alpha}(y - y_j)^{\beta} \tag{20}$$

и удовлетворяет условиям интерполяции

$$S^{(r,s)}(x_i, y_j) = w_{i,j}^{(r,s)}, \quad r, s = 0, 1, \quad i \in 0 : n+1, \quad j \in 0 : m+1,$$

$$w_{ij}^{(k,l)} \triangleq \frac{\partial^{k+l} w(x_i, y_j)}{\partial x^k \partial y^l}, \quad k, l \in 0 : 1.$$

Подставляя в функционалы (15), (16) вместо функций $\widetilde{w}$, w_k и $\widetilde{\Phi}$ соответствующие интерполяционные сплайны S_1, S_{1k}, S_2 и интегрируя (см. [3]), получим функции

$$\mathcal{J}_1(\widetilde{\Phi}_{ij}) = \mathcal{J}_{11}(S_2) + \frac{E}{2}\mathcal{J}_{12}(S_2, S_{1k}, S_{1k}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij,ps} a_{ij,ps}\widetilde{\Phi}_{ij}\widetilde{\Phi}_{ps} - \sum_{ij} c_{ij}\widetilde{\Phi}_{ij}, \tag{21}$$

$$\mathcal{J}_2(\widetilde{w}_{ij}) = \mathcal{J}_{11}(S_1) - \frac{h}{D}\mathcal{J}_{12}(S_1, S_{1k}, S_2) + \frac{h}{D}\sum_{l=1}^{r}\beta_l \mathcal{J}_{23}^{l}(S_1, S_{1k-}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij,ps} a_{ij,ps}\widetilde{w}_{ij}\widetilde{w}_{ps} - \sum_{ij} d_{ij}\widetilde{w}_{ij}. \tag{22}$$

Заметим, что сплайн-аппроксимация срезки функции w_{k-} выполняется в следующем порядке: сначала для w_k строится сплайн S_{1k}, затем вычисляется его срезка S_{1k-}.

Учитывая, что значения функций $\widetilde{w}$ и $\widetilde{\Phi}$ на контуре пластины равны нулю, обозначим

$$\widetilde{\mathbf{w}} \triangleq (\widetilde{w}_{11}, \ldots, \widetilde{w}_{1m}, \ldots, \widetilde{w}_{n1}, \ldots, \widetilde{w}_{nm})^*,$$

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}} \triangleq (\widetilde{\Phi}_{11}, \ldots, \widetilde{\Phi}_{1m}, \ldots, \widetilde{\Phi}_{n1}, \ldots, \widetilde{\Phi}_{nm})^*, \tag{23}$$

$$\mathbf{c} \triangleq (c_{11}, \ldots, c_{1m}, \ldots, c_{n1}, \ldots, c_{nm})^*,$$
$$\mathbf{d} \triangleq (d_{11}, \ldots, d_{1m}, \ldots, d_{n1}, \ldots, d_{nm})^*, \tag{24}$$

здесь $(\cdot)^*$ – означает транспонирование. Тогда функции $\mathcal{J}_1(\widetilde{\Phi}_{ij})$, $\mathcal{J}_2(\widetilde{w}_{ij})$ можно переписать так ($(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение)

$$\mathcal{J}_1(\widetilde{\mathbf{\Phi}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{\Phi}}, \widetilde{\mathbf{\Phi}}) - (\mathbf{c}, \widetilde{\mathbf{\Phi}}), \quad \mathcal{J}_2(\widetilde{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\mathbf{w}}) - (\mathbf{d}, \widetilde{\mathbf{w}}). \tag{25}$$

Здесь матрица $\mathbf{A}$ порядка $n \times m$ с элементами $a_{ij,ps}$ положительно определена, поскольку является конечномерным аналогом бигармонического оператора Δ^2.

Таким образом, в конечномерном случае вариационные проблемы (17) и (18) (а значит и уравнения (13), (14)) сводятся к последовательному решению двух задач выпуклого квадратичного программирования

$$\mathcal{J}_1(\widetilde{\mathbf{\Phi}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{\Phi}}, \widetilde{\mathbf{\Phi}}) - (\mathbf{c}, \widetilde{\mathbf{\Phi}}) \to \min_{\widetilde{\mathbf{\Phi}}}, \tag{26}$$

$$\mathcal{J}_2(\widetilde{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\mathbf{w}}) - (\mathbf{d}, \widetilde{\mathbf{w}}) \to \min_{\widetilde{\mathbf{w}}}. \tag{27}$$

Решение этих задач единственно и имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}, \quad \widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}. \tag{28}$$

2. Аналитические представления для коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ и векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ выписать практически невозможно, поскольку даже с вычислительной точки зрения эта операция весьма трудоемка. Расчетная схема определения коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ приведена в монографии [3]. Опишем далее алгоритм вычисления векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$.

На каждом прямоугольнике сетки Ω_{ij} $i \in 0:n$, $j \in 0:m$ введем в рассмотрение матрицы

$$M^{ij}(w) \triangleq \begin{pmatrix} w_{i,j} & w_{i+1,j} & w^{(1,0)}_{i,j} & w^{(1,0)}_{i+1,j} \\ w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} & w^{(1,0)}_{i,j+1} & w^{(1,0)}_{i+1,j+1} \\ w^{(0,1)}_{i,j} & w^{(0,1)}_{i+1,j} & w^{(1,1)}_{i,j} & w^{(1,1)}_{i+1,j} \\ w^{(0,1)}_{i,j+1} & w^{(0,1)}_{i+1,j+1} & w^{(1,1)}_{i,j+1} & w^{(1,1)}_{i+1,j+1} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

И пусть

$$F^{ij} \triangleq M^{ij}(w_k), \quad G^{ij} \triangleq M^{ij}(\widetilde{\Phi}), \quad V^{ij} \triangleq M^{ij}(\widetilde{w}). \tag{30}$$

В случае равномерной сетки с шагом h_x по оси x и шагом h_y по оси y функция $\mathcal{J}_{12}(S_2, S_{1k}, S_{1k})$ (21) представима в виде

$$\mathcal{J}_{12}(S_2, S_{1k}, S_{1k}) =$$

$$= \frac{1}{h_x h_y} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{p,q=1}^{4} G_{pq}^{ij} \sum_{s,t,k,l=1}^{4} F_{st}^{ij} F_{kl}^{ij} [d_{skp} \widetilde{d}_{ltq} - c_{skp} \widetilde{c}_{ltq}], \tag{31}$$

где

$$d_{skp} = \int_0^1 \varphi_s(z) \varphi''_k(z) \varphi_p(z) dz,$$

$$c_{skp} = \int_0^1 \varphi'_s(z) \varphi'_k(z) \varphi_p(z) dz, \quad s, k, p \in 1:4; \tag{32}$$

$$\varphi_1(z) = (1 - z^2)(1 - 2z), \quad \varphi_2(z) = z^2(3 - 2z),$$

$$\varphi_3(z) = z(1 - z^2) h_y, \quad \varphi_4(z) = -z^2(1 - z) h_y. \tag{33}$$

Коэффициенты $\widetilde{d}_{ltq}$, $\widetilde{c}_{ltq}$, $l, t, q \in 1:4$ вычисляются аналогично:

$$\widetilde{d}_{ltq} = \int_0^1 \psi_l(z) \psi''_t(z) \psi_q(z) dz,$$

$$\widetilde{c}_{ltq} = \int_0^1 \psi'_l(z) \psi'_t(z) \psi_q(z) dz, \quad l, t, q \in 1:4; \tag{34}$$

$$\psi_1(z) = \varphi_1(z), \quad \psi_2(z) = \varphi_2(z),$$

$$\psi_3(z) = z(1 - z^2) h_x, \quad \psi_4(z) = -z^2(1 - z) h_x. \tag{35}$$

Поскольку коэффициентами матриц F^{ij} являются значения известной функции w_k и ее производных в точках сетки, формулу (31), с учетом (30), можно переписать так

$$\mathcal{J}_{12}(S_2, S_{1k}, S_{1k}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m+1} \left[\widetilde{\Phi}_{ij} f_{ij}^0 + \widetilde{\Phi}_{ij}^{(1,0)} f_{ij}^1 + \widetilde{\Phi}_{ij}^{(0,1)} f_{ij}^2 + \widetilde{\Phi}_{ij}^{(1,1)} f_{ij}^3 \right], \tag{36}$$

где f_{ij}^k, $k \in 0:3$ – величины постоянные.

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{W} = \{w_{ij}\}, \quad \mathbf{W}_x = \{w_{ij}^{(1,0)}\}, \quad \mathbf{W}_y = \{w_{ij}^{(0,1)}\}, \quad \mathbf{W}_{xy} = \{w_{ij}^{(1,1)}\},$$

$$i \in 1:n, \ j \in 1:m.$$

Условия непрерывности вторых производных интерполяционного сплайна во внутренних точках сетки Ω (см. например [2]), можно записать в виде

$$P\mathbf{W}_x = \frac{3}{h_x} R\mathbf{W}, \quad \widetilde{P}\mathbf{W}_y^* = \frac{3}{h_y}\widetilde{R}\mathbf{W}^*, \tag{37}$$

где квадратные матрицы P, R (порядка n) и $\widetilde{P}$, $\widetilde{R}$ (порядка m) в случае граничных условий шарнирного опирания являются трехдиагональными и имеют следующую структуру:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 4 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 4 & 1 \\ . & . & . & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & . & . & . \\ -1 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -1 & 0 & 1 \\ . & . & . & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Из формул (37) в силу невырожденности матриц P и $\widetilde{P}$ получаем

$$\mathbf{W}_x = \frac{3}{h_x} P^{-1} R\mathbf{W}, \quad \mathbf{W}_y = \frac{3}{h_y}\mathbf{W}\widetilde{R}^* \widetilde{P}^{-1},$$

$$\mathbf{W}_{xy} = \frac{9}{h_x h_y} P^{-1} R\mathbf{W}\widetilde{R}^* \widetilde{P}^{-1}. \tag{39}$$

Выпишем аналогичные (39) формулы для матриц $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}_x$, $\mathbf{W}_y$, $\mathbf{W}_{xy}$, записанных в виде вектор-столбцов $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$, $\mathbf{w}_{xy}$

$$\mathbf{w}_x = Q_x\mathbf{w}, \quad \mathbf{w}_y = Q_y\mathbf{w}, \quad \mathbf{w}_{xy} = Q_x Q_y \mathbf{w}, \tag{40}$$

здесь Q_x, Q_y – соответствующие аналоги матриц $3/h_x P^{-1} R$ и $3/h_y \widetilde{R}^* \widetilde{P}^{-1}$.

Вернемся к формуле (36), пусть

$$\mathbf{f}^k \triangleq (f_{11}^k, \ldots, f_{1m}^k, \ldots, f_{n1}^k, \ldots, f_{nm}^k)^*, \quad k \in 0:3, \tag{41}$$

используя матрицы дифференцирования (40), обозначения (41) и (23), формулу (36) можно переписать в виде

$$\mathcal{J}_{12}(S_2, S_{1k}, S_{1k}) = -\frac{2}{E}(\mathbf{c}, \widetilde{\mathbf{\Phi}}) =$$

$$= (\widetilde{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{f}^0) + (Q_x\widetilde{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{f}^1) + (Q_y\widetilde{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{f}^2) + (Q_x Q_y \widetilde{\mathbf{\Phi}}, \mathbf{f}^3), \tag{42}$$

откуда окончательно имеем

$$\mathbf{c} = -\frac{E}{2}(\mathbf{f}^0 + Q_x^*\mathbf{f}^1 + Q_y^*\mathbf{f}^2 + Q_y^*Q_x^*\mathbf{f}^3). \tag{43}$$

3. Аналогичным образом вычисляются коэффициенты линейной формы $(\mathbf{d}, \widetilde{\mathbf{w}})$ (25). Для функции $\mathcal{J}_{12}(S_1, S_{1k}, S_2)$ (22), используя введенные ранее матрицы F^{ij}, G^{ij}, V^{ij} (30), можно получить следующее выражение:

$$\mathcal{J}_{12}(S_1, S_{1k}, S_2) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{p,q=1}^{4} V_{pq}^{ij}\left[\frac{1}{h_x h_y}\sum_{s,t,k,l=1}^{4}\left(F_{st}^{ij}G_{kl}^{ij} + G_{st}^{ij}F_{kl}^{ij}\right) d_{skp}\widetilde{d}_{ltq} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{h_x h_y}\sum_{s,t,k,l=1}^{4} F_{st}^{ij}G_{kl}^{ij}c_{skp}\widetilde{c}_{ltq} + \sum_{s,t=1}^{4} F_{st}^{ij}\left(\frac{h_y}{h_x}\sigma_x b_{sp}\widetilde{b}_{tq} - 2\tau q_{sp}\widetilde{q}_{tq}\right)\right], \tag{44}$$

где

$$b_{sp} = \int_0^1 \varphi_s(z)\varphi_p(z)dz, \quad q_{sp} = \int_0^1 \varphi'_s(z)\varphi_p(z)dz, \quad s,p \in 1:4; \tag{45}$$

$$\widetilde{b}_{tq} = \int_0^1 \psi''_t(z)\psi_q(z)dz, \quad \widetilde{q}_{tq} = \int_0^1 \psi'_t(z)\psi_q(z)dz, \quad t,q \in 1:4. \tag{46}$$

А коэффициенты d_{skp}, c_{skp}, $\widetilde{d}_{ltq}$, $\widetilde{c}_{ltq}$, $s,k,p,l,t,q \in 1:4$ вычисляются по формулам (32), (34).

Рассмотрим теперь интегралы (19)

$$\mathcal{J}_{23}^{l}(S_1, S_{1k-}) = \int_0^a S_1(x, y_l)S_{1k-}(x, y_l)\,dx, \quad l \in 1:r.$$

Здесь y_l – это координата l-го ребра, параллельного оси x. Будем считать, что подкрепляющие пластину ребра проходят по линиям сетки и $\mathcal{M} \subset \{1..m\}$ – множество точек крепления ребер.

Пусть вектор U^{ij} – первая строка матрицы $M^{ij}(w_{k-})$ (см. (29)), тогда

$$\sum_{j\in\mathcal{M}} \beta_j \mathcal{J}_{23}^{j}(S_1, S_{1k-}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\mathcal{M}}\sum_{q=1}^{4} V_{1q}^{ij}\left[\beta_j h_x \sum_{p=1}^{4} U_p^{ij} b_{pq}\right], \tag{47}$$

где b_{pq}, $p,q \in 1:4$ вычисляются по формуле (45).

Далее, суммируя в выражениях (44), (47) коэффициенты при $\widetilde{w}_{ij}, \widetilde{w}_{ij}^{(1,0)}, \widetilde{w}_{ij}^{(0,1)}, \widetilde{w}_{ij}^{(1,1)}$, получаем

$$\mathcal{J}_{12}(S_1, S_{1k}, S_2) - \sum_{j\in\mathcal{M}} \beta_j \mathcal{J}_{23}^j(S_1, S_{1k}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{m+1}\left[\widetilde{w}_{ij}g_{ij}^0 + \widetilde{w}_{ij}^{(1,0)}g_{ij}^1 + \widetilde{w}_{ij}^{(0,1)}g_{ij}^2 + \widetilde{w}_{ij}^{(1,1)}g_{ij}^3\right], \tag{48}$$

где g_{ij}^k, $k \in 0:3$ – величины постоянные.

Полагая теперь

$$\mathbf{g}^k \triangleq (g_{11}^k, \ldots, g_{1m}^k, \ldots, g_{n1}^k, \ldots, g_{nm}^k)^*, \quad k \in 0:3,$$

используя матрицы дифференцирования (40) и обозначения (23), преобразуем формулу (48) к виду

$$\mathcal{J}_{12}(S_1, S_{1k}, S_2) - \sum_{j\in\mathcal{M}} \beta_j \mathcal{J}_{23}^j(S_1, S_{1k-}) = \frac{D}{h}(\mathbf{d}, \widetilde{\mathbf{w}}) =$$

$$= (\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}^0) + (Q_x\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}^1) + (Q_y\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}^2) + (Q_xQ_y\widetilde{\mathbf{w}}, \mathbf{g}^3),$$

откуда окончательно имеем

$$\mathbf{d} = \frac{h}{D}(\mathbf{g}^0 + Q_x^*\mathbf{g}^1 + Q_y^*\mathbf{g}^2 + Q_y^*Q_x^*\mathbf{g}^3). \tag{49}$$

4. Численные эксперименты

Рассмотрим пластинку с параметрами

$$a = 20 \text{ см}, \quad b = 10 \text{ см}, \quad h = 0,2 \text{ см},$$

$$E = 0,72\cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0,3, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 542,74 \text{ кг}\cdot\text{см}, \tag{50}$$

подкрепленную упругими ребрам одинаковой жесткости $\beta_j = \beta = const$. Расчеты проводились при достаточно больших значениях параметра β для случая, когда число ребер, параллельных длинной стороне пластины, совпадает с числом внутренних узлов сетки по оси y ($\mathcal{M} = \{1..m\}$), т.е. моделировалась задача о закритическом поведении пластины на жестком основании.

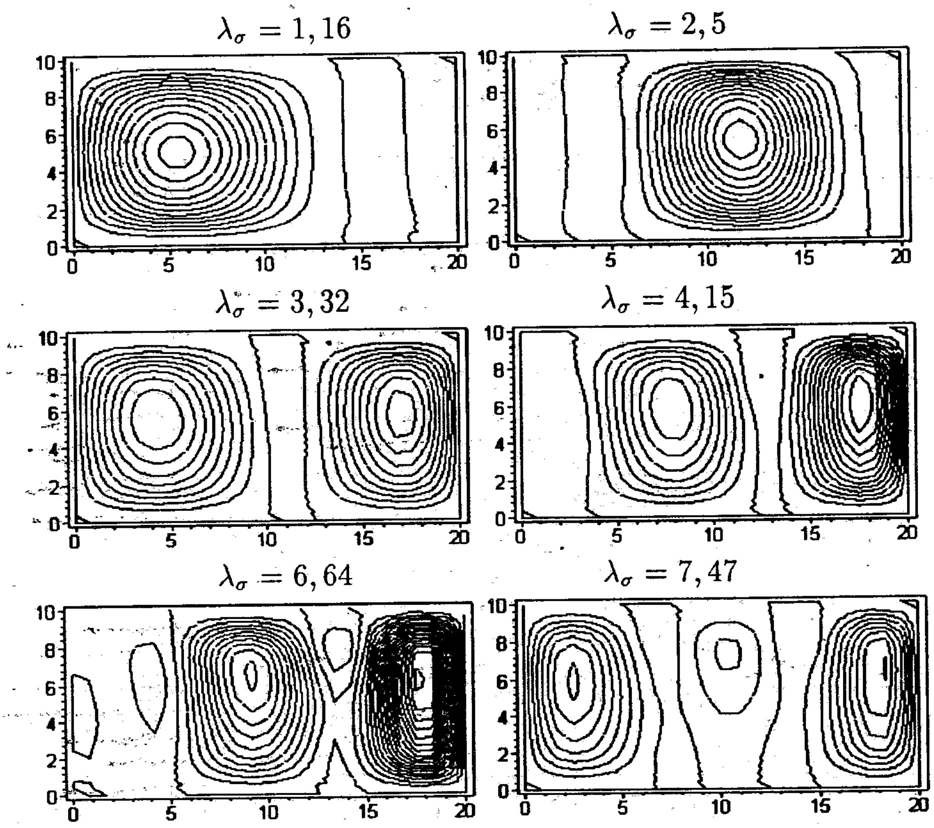

Рис. 2. Волнообразование при сжатии

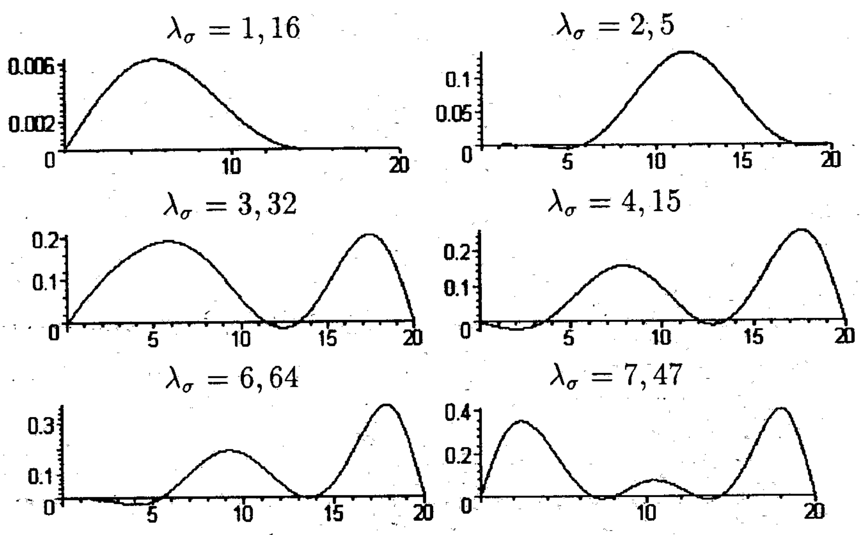

Рис. 3. Формы сечения $y = b/2$ при сжатии

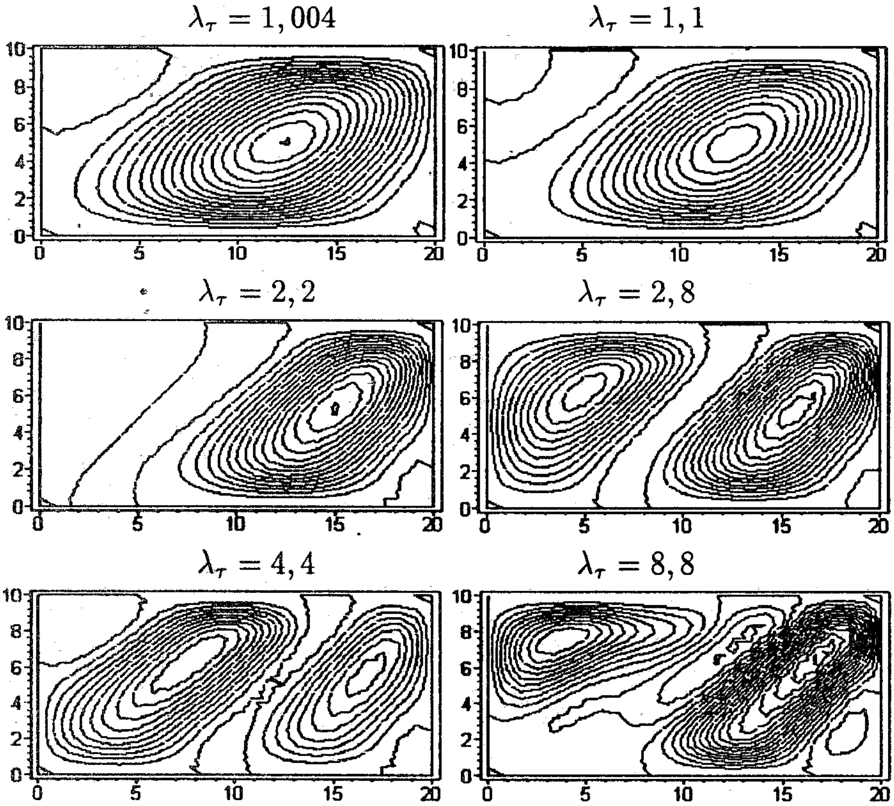

Рис. 4. Волнообразование при сдвиге

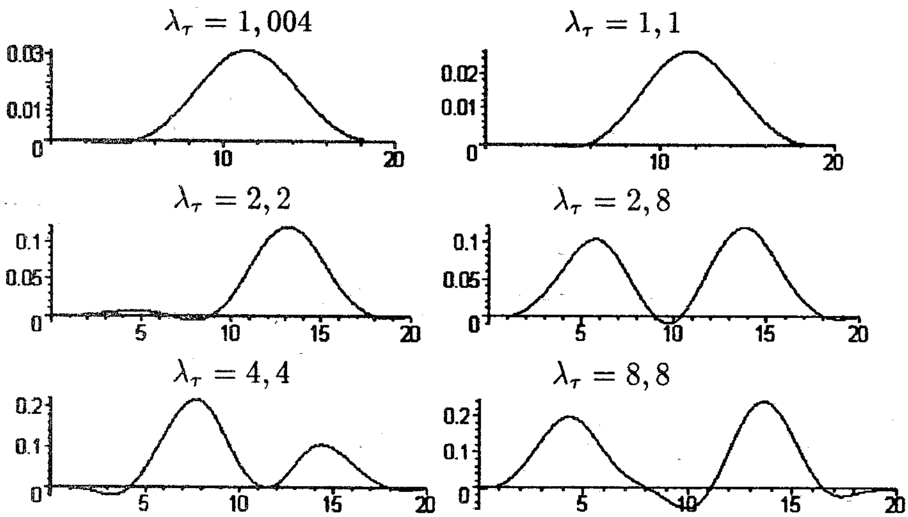

Рис. 5. Формы сечения $y = -b/a \cdot x + b$ при сдвиге

Пусть пластинка сжата вдоль оси x $(\tau = 0)$, тогда для неподкрепленной пластинки критическое напряжение может быть вычислено по формуле [1]:

$$\sigma^0_{kp} = K\frac{\pi^2 D}{b^2 h}, \tag{51}$$

где коэффициент K зависит от соотношения сторон (a/b). Для пластины с параметрами (50)

$$K = 4, \quad \sigma^0_{kp} = 1071,3\frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

а при наличии жесткого основания

$$\sigma_{kp} = 1204,6\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \tag{52}$$

При чистом сдвиге $(\sigma_x = 0)$ для неподкрепленной пластинки с параметрами (50) критическое напряжение также вычисляется по формуле (51), при этом (см. [1])

$$K = 6.47, \quad \tau^0_{kp} = 1732,87\frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

а при наличии жесткого основания

$$\tau_{kp} = 1803,26\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}. \tag{53}$$

Критические значения (52), (53) для пластины на жестком основании получены методами, рассмотренными в монографии [3].

Пусть теперь

$$\lambda_\sigma = \frac{\sigma_x}{\sigma_{kp}}, \quad \lambda_\tau = \frac{\tau}{\tau_{kp}},$$

– безразмерные параметры напряжений соответственно для пластины, сжатой вдоль оси x $(\tau = 0)$ и при чистом сдвиге $(\sigma_x = 0)$.

На рис. 2 показана одна из возможных ветвей процесса волнообразования при сжатии, на рис. 4 – при чистом сдвиге; на рис. 3 – соответствующие рис. 2 формы сечения $y = b/2$, на рис. 5 – соответствующие рис. 4 формы сечения $y = -b/a \cdot x + b$. В качестве начальных приближений используются формы потери устойчивости, соответствующие критическим напряжениям (52), (53). Расчет произведен при следующих значениях параметров сетки: $n = 20$, $m = 10$.

Литература

1. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

2. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн–функций. М.: Москва, 1980. 352 с.

3. **Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В.** Некоторые задачи и методы конструктивно-нелинейной механики упругих систем/ Под ред. проф. Е.И. Михайловского. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарск. ун-та. 2001. 189 с. ISBN 5-87237-274-4.

Summary

Kholmogorov D.V. Supercritical behaviour of a substantiated plate

The task about a supercritical behaviour of a rectangular plates loaded on edges normal and tangents by gains and substantiated with a system of elastic edges is considered. The circuit of a numerical solution of a task based on approximation of a sag of a plate and function of voltages natural cubic splines of two variables is offered. The outcomes of numerical experiments are reduced.

Сыктывкарский университет *Поступила 7.10.2002*