*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Сер.1.Вып.5.2003*

**УДК 521.1**

# Задача об оптимальном положении тройки четырехмерных ортов [1]

*С.М. Полещиков, А.А. Холопов*

Дан аналитико-геометрический метод решения минимаксной задачи, возникающей при интегрировании регулярных уравнений движения в небесной механике методом Рунге-Кутты-Фельберга. Учитываются произвольные возмущения. Рассмотрено геометрическое описание областей изменения параметров. Задача решена для большей части множества рассматриваемых параметров.

## 1. Введение и постановка задачи

В работе [1] рассматривается численное интегрирование регулярных уравнений, описывающих возмущенное движение задачи двух тел. Интегрирование выполняется методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага по Фельбергу, согласно которому величина шага интегрирования контролируется парой методов Рунге-Кутты разных порядков точности. В результате появляется так называемое неравенство Фельберга. Процесс регулирования величины шага состоит в том, что, если это неравенство не выполняется, то шаг интегрирования уменьшается. В противном случае шаг увеличивается. Используемые регулярные уравнения движения обладают свойством инвариантности относительно ортогональных преобразований регулярных координат. В [2] предлагается использовать это свойство для увеличения шага при сохранении заданной точности интегрирования. Для этого выполняется переход от неравенства Фельберга к его первому приближению

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №01-02-16918

относительно шага интегрирования. В это неравенство входит функция максимума некоторого числа относительных величин, определяемых правыми частями уравнений движения. Задача увеличения шага интегрирования сводится к задаче минимизации этой функции максимума. В [3] дано решение рассматриваемой минимаксной задачи без учета возмущающих сил. Далее, в [4], эта задача была решена с учетом произвольных возмущений для движения частицы на плоскости. В настоящей работе рассматриваемая задача решается для случая пространственного движения частицы. При этом в расчет принимаются произвольные возмущения. Напомним [1], что пространственный случай движения сводится к движению фиктивной частицы в четырехмерном пространстве регулярных координат. Поэтому рассматриваемые ниже векторы четырехмерные.

Дадим постановку минимаксной задачи в приведенной форме. Пусть

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^\top, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^\top, \quad \mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)^\top$$

единичные векторы в некоторой фиксированной прямоугольной системе координат. И пусть

$$c_0 = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}, \quad c_1 = \mathbf{b}^\top \mathbf{d}, \quad c_2 = \mathbf{a}^\top \mathbf{d} \tag{1}$$

косинусы углов между ними. Рассмотрим задачу нахождения новой декартовой системы координат, в которой выражение

$$f = \max\left\{\frac{|b_1|}{|a_1|}, \ldots, \frac{|b_4|}{|a_4|}, \omega\frac{|d_1|}{|b_1|}, \ldots, \omega\frac{|d_4|}{|b_4|}\right\}, \quad \omega > 0 \tag{2}$$

принимает наименьшее значение $f^*$. Или, по-другому, требуется найти такое положение тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ с фиксированными углами между ними, при котором (52) достигает минимума $f^*$. Такие положения тройки векторов назовем оптимальными. Всюду будем предполагать, что $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$. Фиксация углов означает, что тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ вращается как одно целое. Очевидно, что $f^*$ и искомые положения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ являются функциями от величин $c_0$, $c_1$, $c_2$, $\omega$, которые играют роль параметров. Для наших целей достаточно найти хотя бы одно оптимальное положение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ для каждого набора параметров.

Выделим необходимые для дальнейшего свойства функции (52). Значение $f$ не зависит от изменения знаков координат векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$. Следовательно, вводя операции изменения знаков векторов

$$\varphi_a : \mathbf{a} \longrightarrow -\mathbf{a}, \quad \varphi_b : \mathbf{b} \longrightarrow -\mathbf{b}, \quad \varphi_d : \mathbf{d} \longrightarrow -\mathbf{d}, \tag{3}$$

можно сказать, что функция $f$ инвариантна относительно преобразований $\varphi_a$, $\varphi_b$, $\varphi_d$.

Функция $f$ не зависит от перестановки дробей под знаком максимума. Поэтому, путем переобозначения индексов координат, можно считать, что координаты одного из трех векторов упорядочены по возрастанию или убыванию. При отмеченном переобозначении значения косинусов $c_0$, $c_1$, $c_2$, очевидно, не изменятся.

Так как $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ единичные, то $\max_i\left\{\frac{|b_i|}{|a_i|}\right\}, \max_i\left\{\frac{|d_i|}{|b_i|}\right\} \geq 1$ и, поэтому,

$$f \geq \max\{1, \omega\}. \tag{4}$$

Таким образом, для параметра $\omega$ необходимо различать два случая: $0 < \omega < 1$ и $\omega \geq 1$.

Пусть $\omega \geq 1$. Из (4) вытекает, что при решении минимаксной задачи можно рассмотреть два случая: $\mathcal{A}$) $f^* = \omega$. $\mathcal{B}$) $f^* = \rho\omega$, $\rho > 1$. Первый случай, очевидно, реализуется при

$$|b_i| \leq \omega|a_i|, \quad |b_i| = |d_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Его можно разбить на два подслучая:

$\mathcal{A}_1$) $|a_i| = |b_i| = |d_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$. $\mathcal{A}_2$) Случай $\mathcal{A}_1$ не реализуется.

В случае $\mathcal{B}$ необходимо найти наименьшее $\rho > 1$.

Пусть $0 < \omega < 1$. Тогда при решении минимаксной задачи можно рассмотреть два случая: $\mathcal{C}$) $f^* = 1$. $\mathcal{D}$) $f^* = \rho > 1$. Первый случай реализуется при

$$|b_i| = |a_i|, \quad \omega|d_i| \leq |b_i|, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Он разбивается на два подслучая:

$\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{A}_1$) $\mathcal{C}_2$) Случай $\mathcal{C}_1$ не реализуется.

В случае $\mathcal{D}$ необходимо найти наименьшее $\rho > 1$.

В данной работе дается полное аналитическое решение минимаксной задачи в случаях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$, составляющих, нестрого говоря, бóльшую часть взаимного положения векторов. Случаи $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ приводят к решениям систем нелинейных уравнений и неравенств, аналитический вид которых авторами пока не найден, поэтому случаи $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ не рассматриваются.

Отметим случаи, в которых два из трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ коллинеарные. Если $|c_0| = 1$, то $\mathbf{b} = \pm\mathbf{a}$ и

$$f = \max\left\{1, \omega\frac{|d_1|}{|b_1|}, \ldots, \omega\frac{|d_4|}{|b_4|}\right\}.$$

Если $|c_1| = 1$, то $\mathbf{b} = \pm\mathbf{d}$ и $f = \max\left\{\frac{|b_1|}{|a_1|}, \dots, \frac{|b_4|}{|a_4|}, \omega\right\}$.

Если $|c_2| = 1$, то $\mathbf{d} = \pm\mathbf{a}$ и $f = \max\left\{\frac{|b_1|}{|a_1|}, \dots, \frac{|b_4|}{|a_4|}, \omega\frac{|a_1|}{|b_1|}, \dots, \omega\frac{|a_4|}{|b_4|}\right\}$.

Во всех случаях $f^* = \max\{1, \omega\}$ и этот минимум достигается в первом случае при $|d_i| = |b_i|$ и в остальных случаях при $|a_i| = |b_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Геометрически эти решения означают, что при оптимальных положениях биссектриса угла между векторами $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ в первом случае или между $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ во втором и третьем случаях должна совпадать с одной из осей координат. Матрица поворота, приводящая к таким положениям, построена в работе [3]. В дальнейшем при нахождении оптимальных положений считаем, что $|c_i| \neq 1$, $i = 0, 1, 2$.

## 2. Вспомогательные утверждения

Ограничим сначала область изменения параметров $c_0$, $c_1$, $c_2$ для случая $\omega \geq 1$.

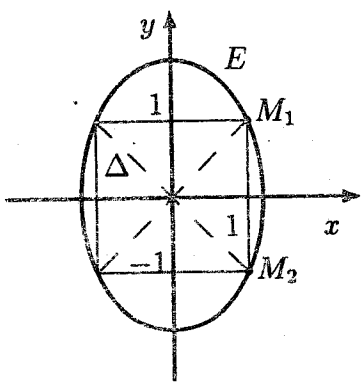


Рис. 1. Область $\Delta \cup E$.

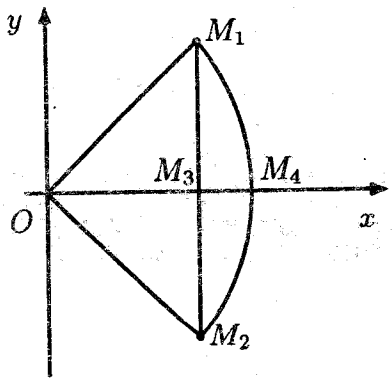


Рис. 2. Область $G$.

Обозначим через $\Delta$ внутреннюю часть эллипса

$$E = \left\{(x, y) : (1 + c_1)x^2 + (1 - c_1)y^2 = 2\right\}.$$

Точки с координатами $(\pm 1, \pm 1)$ лежат на эллипсе $E$. Поэтому квадрат с вершинами в этих точках целиком лежит в $\Delta \cup E$ (рис.1). Диагонали этого квадрата делят множество $\Delta \cup E$ на четыре эллиптических сектора, один из которых изображен на рис.2 и определяется условием

$$G = \left\{(x, y) : (x, y) \in \Delta \cup E, |y| \leq x\right\}.$$

Точки $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -1)$ определяют отрезок, разбивающий сектор $G$ на множества:

$\Delta_1 = \{(x,y) : 0 \le |y| \le x < 1\}$ — треугольник $OM_1M_2$ без отрезка $M_1M_2$;
$\Delta_2 = \{(x,y) : x = 1,\ -1 < y < 1\}$ — интервал $M_1M_2$;
$\Delta_3 = \{(x,y) : x > 1,\ (1+c_1)x^2 + (1-c_1)y^2 < 2\}$ — внутренняя часть эллиптического сегмента $M_1M_4M_2M_3M_1$;
$\Delta_4 = \{(x,y) : x > 1,\ (1+c_1)x^2 + (1-c_1)y^2 = 2\}$ — эллиптическая дуга $M_1M_4M_2$ без точек $M_1$, $M_2$.

Сектор $G$ можно представить в виде объединения

$$G = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \{M_1\} \cup \{M_2\}.$$

Обозначим через $A$, $B$ величины

$$A = \frac{c_0 + c_2}{1 + c_1}, \quad B = \frac{c_0 - c_2}{1 - c_1}. \tag{5}$$

**Утверждение 1** *Точка с координатами $(A, B)$ принадлежит множеству $\Delta \cup E$.*

**Доказательство.** Неравенство $(1+c_1)A^2+(1-c_1)B^2 \le 2$ при $|c_1| \ne 1$ эквивалентно следующему

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 \le 1 + 2c_0c_1c_2.$$

Справедливость последнего вытекает из неотрицательности определителя Грама

$$1 + 2c_0c_1c_2 - c_0^2 - c_1^2 - c_2^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & c_0 & c_2 \\ c_0 & 1 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}^\top\mathbf{a} & \mathbf{a}^\top\mathbf{b} & \mathbf{a}^\top\mathbf{d} \\ \mathbf{b}^\top\mathbf{a} & \mathbf{b}^\top\mathbf{b} & \mathbf{b}^\top\mathbf{d} \\ \mathbf{d}^\top\mathbf{a} & \mathbf{d}^\top\mathbf{b} & \mathbf{d}^\top\mathbf{d} \end{vmatrix} = \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \ge 0. \quad \blacksquare$$

**Утверждение 2** *Точка с координатами $(A, B)$ лежит на эллипсе $E$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ компланарные.*

**Доказательство.** Равенство $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ линейно зависимые. $\blacksquare$

**Утверждение 3** *Условия $c_0 = 1$, $c_0 = -1$, $c_2 = 1$, $c_2 = -1$ эквивалентны равенствам $(A, B) = (1, 1)$, $(A, B) = (-1, -1)$, $(A, B) = (1, -1)$, $(A, B) = (-1, 1)$ соответственно.*

**Доказательство.** Если $A = B = 1$, то $c_0 + c_2 = 1 + c_1$, $c_0 - c_2 = 1 - c_1$. Следовательно, $c_0 = 1$. Обратно, если $c_0 = 1$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Поэтому $c_1 = c_2$ и из (5) получаем $A = 1$, $B = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. ∎

Рассмотрим преобразования (53). Каждая из этих операций меняет знак двух из трех косинусов $c_0$, $c_1$, $c_2$. Из (5) следует, что при этих преобразованиях пара $(A, B)$ преобразуется по правилам

$$(A, B) \xrightarrow{\varphi_a} (-A, -B), \quad (A, B) \xrightarrow{\varphi_b} (-B, -A), \quad (A, B) \xrightarrow{\varphi_d} (B, A).$$

Следовательно, выбирая одну из операций (53), можно любую точку множества $\Delta \cup E$ перевести в множество $G$, если до этого точка не лежала в $G$. Поскольку предполагается, что $|c_i| \neq 1$, $i = 0, 1, 2$, то на основании утверждения 3 точки $(\pm 1, \pm 1)$ на эллипсе надо исключить из рассмотрения.

Таким образом, произвольный набор трех единичных попарно неколлинеарных векторов за счет изменения знака одного из них может быть заменен другим набором таким, что соответствующая точка с координатами $(A, B)$, вычисляемыми по формулам (5), будет попадать в построенную область $G$ без точек $M_1$, $M_2$.

Выясним геометрический смысл условий

$$(A, B) \in \Delta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Из утверждения 2 сразу вытекает, что условие $(A, B) \in \Delta_4$ означает компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$. То есть приходим к уже изученному в [4] случаю.

Условие $(A, B) \in \Delta_2$ или $A = 1$ дает равенство $c_0 - 1 = c_1 - c_2$. Поэтому скалярное произведение $(\mathbf{b} - \mathbf{a})^\top (\mathbf{d} - \mathbf{a}) = 0$, то есть векторы $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ ортогональные. Тогда треугольник $T$, образованный концами векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$, является прямоугольным. Такие же условия прямоугольности $T$ получаются из условий $A = -1$, $B = 1$, $B = -1$.

Условие $(A, B) \in \Delta_1$ означает, что треугольник $T$ остроугольный. Действительно, из $A < 1$ получаем $c_0 + c_2 < 1 + c_1$ или $(\mathbf{b} - \mathbf{a})^\top (\mathbf{d} - \mathbf{a}) > 0$. Следовательно, в треугольнике $T$ угол, образованный сторонами $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ острый. В области $\Delta_1$ выполняется неравенство $|B| \leq A < 1$. Поэтому имеем еще два условия. Первое, $B < 1$, дает $c_0 - c_2 < 1 - c_1$ или $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\top (\mathbf{d} - \mathbf{b}) > 0$. Поэтому угол между сторонами $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ и $\mathbf{d} - \mathbf{b}$ острый. Второе условие, $B > -1$, дает $c_0 - c_2 > c_1 - 1$ или $(\mathbf{a} - \mathbf{d})^\top (\mathbf{b} - \mathbf{d}) > 0$. То есть угол между сторонами $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ и $\mathbf{b} - \mathbf{d}$ также острый.

Аналогичные исследования показывают, что условие $(A, B) \in \Delta_3$ означает тупоугольность треугольника $T$.

Ограничим теперь область изменения параметров $c_0$, $c_1$, $c_2$ для случая $0 < \omega < 1$. Рассмотрим эллипс

$$\widetilde{E} = \{(x, y) : (1 + c_0)x^2 + (1 - c_0)y^2 = 2\}.$$

Пусть $\widetilde{\Delta}$ – внутренность $\widetilde{E}$ и

$$\widetilde{A} = \frac{c_1 + c_2}{1 + c_0}, \quad \widetilde{B} = \frac{c_1 - c_2}{1 - c_0}. \tag{6}$$

В отличие от (5) косинусы $c_0$ и $c_1$ поменялись ролями. Поэтому справедливы утверждения, аналогичные рассмотренным выше.

**Утверждение 4** *Точка с координатами* $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ *принадлежит множеству* $\widetilde{\Delta} \cup \widetilde{E}$, *то есть* $(1 + c_0)\widetilde{A}^2 + (1 - c_0)\widetilde{B}^2 \leq 2$.

**Утверждение 5** *Условие* $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \widetilde{E}$ *эквивалентно компланарности векторов* **a**, **b**, **d**.

**Утверждение 6** *Условия* $c_1 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_2 = -1$ *эквивалентны соответственно равенствам* $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (1, 1)$, $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (-1, -1)$, $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (1, -1)$, $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (-1, 1)$.

Рассмотрим эллиптический сектор (рис.3)

$$\widetilde{G} = \{(x, y) : (x, y) \in \widetilde{\Delta} \cup \widetilde{E}, |x| \leq -y\}.$$

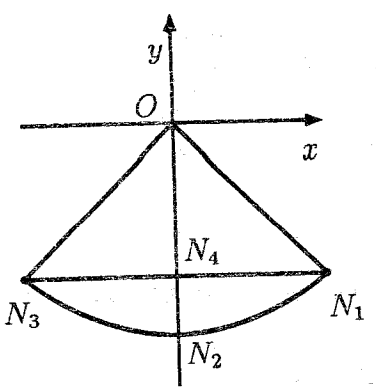


Рис. 3. Область $\widetilde{G}$.

Под действием преобразований (53) пара $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ преобразуется по правилам

$$(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \xrightarrow{\varphi_a} (\widetilde{B}, \widetilde{A}),$$
$$(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \xrightarrow{\varphi_b} (-\widetilde{B}, -\widetilde{A}),$$
$$(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \xrightarrow{\varphi_d} (-\widetilde{A}, -\widetilde{B}).$$

Поэтому, как и выше, достаточно рассматривать только точки из $\widetilde{G}$. При этом точки $N_1$, $N_3$, соответствующие коллинеарности двух из трех векторов **a**, **b**, **d**, необходимо исключить.

Точки $N_1(1, -1)$, $N_3(-1, -1)$ определяют отрезок, разбивающий сектор $\widetilde{G}$ на множества:

$\widetilde{\Delta}_1 = \{(x,y) : 0 \le |x| \le -y < 1\}$ — треугольник $ON_1N_3$ без отрезка $N_1N_3$;
$\widetilde{\Delta}_2 = \{(x,y) : y = -1,\ -1 < x < 1\}$ — интервал $N_1N_3$;
$\widetilde{\Delta}_3 = \{(x,y) : y < -1,\ (1+c_0)x^2 + (1-c_0)y^2 < 2\}$ — внутренняя часть эллиптического сегмента $N_1N_2N_3N_4N_1$;
$\widetilde{\Delta}_4 = \{(x,y) : y < -1,\ (1+c_0)x^2 + (1-c_0)y^2 = 2\}$ — эллиптическая дуга $N_1N_2N_3$ без точек $N_1$, $N_3$.

Из утверждения 5 следует, что условие $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \widetilde{\Delta}_4$ означает компланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$.

В множестве параметров $c_0$, $c_1$, $c_2$ выделим области $P$ и $\widetilde{P}$

$$P = \left\{(c_0, c_1, c_2) : \left(\frac{c_0 + c_2}{1 + c_1}, \frac{c_0 - c_2}{1 - c_1}\right) \in G,\ |c_i| \ne 1,\ i = 0,1,2\right\}.$$

$$\widetilde{P} = \left\{(c_0, c_1, c_2) : \left(\frac{c_1 + c_2}{1 + c_0}, \frac{c_1 - c_2}{1 - c_0}\right) \in \widetilde{G},\ |c_i| \ne 1,\ i = 0,1,2\right\}.$$

Таким образом, при $\omega \ge 1$ для каждого набора параметров $(c_0, c_1, c_2) \in P$ и при $0 < \omega < 1$ для каждого набора $(c_0, c_1, c_2) \in \widetilde{P}$ надо найти $f^*$ и по крайней мере одно положение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$, реализующее $f = f^*$.

Вместо $a_i$, $b_i$, $d_i$ введем новые переменные соотношениями

$$x_i = b_i^2, \quad a_i = \delta_i b_i, \quad d_i = \varepsilon_i b_i, \quad i = 1,2,3,4.$$

Тогда равенства (51) и условия $|\mathbf{b}|^2 = 1$, $|\mathbf{a}|^2 = 1$, $|\mathbf{d}|^2 = 1$ дают линейную систему

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4 & = 1, \\ \delta_1 x_1+ & \delta_2 x_2+ & \delta_3 x_3+ & \delta_4 x_4 & = c_0, \\ \varepsilon_1 x_1+ & \varepsilon_2 x_2+ & \varepsilon_3 x_3+ & \varepsilon_4 x_4 & = c_1, \\ \delta_1\varepsilon_1 x_1+ & \delta_2\varepsilon_2 x_2+ & \delta_3\varepsilon_3 x_3+ & \delta_4\varepsilon_4 x_4 & = c_2, \\ \delta_1^2 x_1+ & \delta_2^2 x_2+ & \delta_3^2 x_3+ & \delta_4^2 x_4 & = 1, \\ \varepsilon_1^2 x_1+ & \varepsilon_2^2 x_2+ & \varepsilon_3^2 x_3+ & \varepsilon_4^2 x_4 & = 1. \end{array}\right. \tag{7}$$

В новых переменных минимизируемая функция $f$ запишется в виде

$$f = \max\left\{\frac{1}{|\delta_1|}, \ldots, \frac{1}{|\delta_4|}, \omega|\varepsilon_1|, \ldots, \omega|\varepsilon_4|\right\}. \tag{8}$$

Теперь задача нахождения минимума функции (52) формулируется следующим образом. Для каждого набора параметров $(c_0, c_1, c_2) \in P$ при $\omega \ge 1$ и для каждого набора $(c_0, c_1, c_2) \in \widetilde{P}$ при $0 < \omega < 1$ надо

найти решение системы (7): $\delta_i$, $\varepsilon_i$, $x_i$ $(x_i > 0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, при котором функция (8) принимает наименьшее значение $f^*$.

После нахождения решения этой задачи искомые координаты векторов определятся по формулам

$$b_i = \pm\sqrt{x_i}, \quad a_i = \delta_i b_i, \quad d_i = \varepsilon_i b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

При решении подсистем системы (7) будет использоваться следующее утверждение.

**Утверждение 7** *При попарно различных $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ система*

$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & x_3 & = \gamma_1, \\ \delta_1 x_1 + & \delta_2 x_2 + & \delta_3 x_3 & = \gamma_2, \\ \delta_1^2 x_1 + & \delta_2^2 x_2 + & \delta_3^2 x_3 & = \gamma_2 \end{cases}$$

*имеет решение вида*

$$x_1 = \frac{\gamma_3 - \gamma_2(\delta_2 + \delta_3) + \gamma_1\delta_2\delta_3}{(\delta_3 - \delta_1)(\delta_2 - \delta_1)}, \quad x_2 = \frac{-\gamma_3 + \gamma_2(\delta_1 + \delta_3) - \gamma_1\delta_1\delta_3}{(\delta_3 - \delta_2)(\delta_2 - \delta_1)},$$

$$x_3 = \frac{\gamma_3 - \gamma_2(\delta_1 + \delta_2) + \gamma_1\delta_1\delta_2}{(\delta_3 - \delta_2)(\delta_3 - \delta_1)}.$$

Как принято в линейной алгебре, система (7) или ее подсистемы будут записываться в виде расширенной матрицы. Преобразования этих матриц, приводящие к эквивалентным системам, обозначаются значком $\sim$. При этом тождественно равные строки или уравнения-тождества в расширенной матрице будут опускаться.

Далее последовательно будут разбираться случаи $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{C}_2$.

## 3. Решение задачи в случае $\mathcal{A}_1 = \mathcal{C}_1$

В этом случае имеем $|\delta_i| = |\varepsilon_i| = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. В системе (7) два последних уравнения совпадают с первым. Поэтому они опускаются. Рассмотрим различные случаи расположения знаков величин $\delta_i$.

1) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \pm 1$.
2) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -\delta_4 = 1$.
3) $\delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = -\delta_4 = 1$.
4) $\delta_1 = -\delta_2 = -\delta_3 = -\delta_4 = 1$.

Остальные комбинации не рассматриваем, так как переобозначением индексов координат их можно привести к указанным вариантам.

В первом случае из первых двух уравнений (7) получаем $|c_0| = 1$. По предположению это невозможно.

Случай 2. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & c_0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & c_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & c_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & (1+c_0)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 & (c_1+c_2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \end{array}\right).$$

Значит, $x_4 = (1-c_0)/2$, $\varepsilon_4 = (c_1-c_2)/(1-c_0) = \pm 1$.

Если $c_1 - c_2 = 1 - c_0$, то $B = 1$ — исключенный случай ($\widetilde{B} = 1$ — невозможный случай).

Если $c_1 - c_2 = c_0 - 1$, то $A = 1$ ($\widetilde{B} = -1$), то есть пара $(A, B) \in \Delta_2$ ($(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \widetilde{\Delta}_2$). Для нахождения $x_1$, $x_2$, $x_3$ имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1+c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & (c_1+c_2)/2 \end{array}\right).$$

Достаточно указать одно решение этой системы. Возьмем, например, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$. Тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1+c_0)/2 \\ 1 & 1 & -1 & (c_1+c_2)/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & (1+c_0+c_1+c_2)/4 \\ 0 & 0 & 1 & (1+c_0-c_1-c_2)/4 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$x_3 = \frac{1+c_0-c_1-c_2}{4} = \frac{(1-c_1)(1+B)}{4} = \frac{(1-c_0)(1-\widetilde{A})}{4},$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1+c_0+c_1+c_2}{4} = \frac{(1+c_1)(1+A)}{4} = \frac{(1+c_1)(1+\widetilde{A})}{4}.$$

Можно выбрать, например, $x_1 = x_2 = (1+c_0+c_1+c_2)/8$. Тогда в областях $G$, $\widetilde{G}$ решения $x_1$, $x_2$, $x_3$ положительные.

Таким образом, в области $\Delta_2$ ($\widetilde{\Delta}_2$) имеем решение $f^* = \omega$ ($f^* = 1$) и

$$\begin{array}{l} b_1 = \pm\sqrt{\dfrac{1+c_0+c_1+c_2}{8}}, \quad b_2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+c_0+c_1+c_2}{8}}, \\ b_3 = \pm\dfrac{\sqrt{1+c_0-c_1-c_2}}{2}, \quad b_4 = \pm\sqrt{\dfrac{1-c_0}{2}}, \\ a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = -b_4, \\ d_1 = b_1, \quad d_2 = b_2, \quad d_3 = -b_3, \quad d_4 = -b_4, \end{array} \tag{9}$$

В дальнейшем случай $A = 1$ ($\widetilde{B} = -1$) будет пропускаться.

Случай 3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & c_0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & c_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & c_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & (1+c_0)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & (c_1+c_2)/2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \end{array}\right).$$

Система распадается на две независимые подсистемы относительно пар неизвестных $x_1, x_2$ и $x_3, x_4$. Рассмотрим их отдельно.

Система относительно $x_1, x_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (1+c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & (c_1+c_2)/2 \end{array}\right).$$

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, то $1+c_0 = c_1+c_2$ и $B = -1$ ($\widetilde{A} = 1$) – исключенный случай.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, то $1 + c_0 = -c_1 - c_2$ и $A = -1$ – невозможный случай ($\widetilde{A} = -1$ – исключенный случай).

Если $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$, то

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (1+c_0)/2 \\ 1 & -1 & (c_1+c_2)/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (1+c_0+c_1+c_2)/4 \\ 0 & 1 & (1+c_0-c_1-c_2)/4 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{1+c_0+c_1+c_2}{4} > 0, \quad x_2 = \frac{1+c_0-c_1-c_2}{4} > 0.$$

Если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = 1$, то аналогично получаем

$$x_1 = \frac{1+c_0-c_1-c_2}{4}, \quad x_2 = \frac{1+c_0+c_1+c_2}{4}.$$

Система относительно $x_3, x_4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \end{array}\right).$$

Если $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$, то $1 - c_0 = c_1 - c_2$ и $B = 1$ – исключенный случай ($\widetilde{B} = 1$ – невозможный случай).

Если $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, то $1 - c_0 = -c_1 + c_2$ и $A = 1$ ($\widetilde{B} = -1$) – рассмотренный случай.

Если $\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$, то

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ 1 & -1 & (c_1-c_2)/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (1-c_0+c_1-c_2)/4 \\ 0 & 1 & (1-c_0-c_1+c_2)/4 \end{array}\right).$$

Значит,

$$x_3 = \frac{1 - c_0 + c_1 - c_2}{4} = \frac{(1 + c_1)(1 - A)}{4} = \frac{(1 - c_0)(1 + \widetilde{B})}{4},$$

$$x_4 = \frac{1 - c_0 - c_1 + c_2}{4} = \frac{(1 - c_1)(1 - B)}{4} = \frac{(1 - c_0)(1 - \widetilde{B})}{4}.$$

Очевидно, что $x_3 > 0$ только при $A < 1$ ($\widetilde{B} > -1$) и $x_4 > 0$ всегда для рассматриваемых областей $G$, $\widetilde{G}$. Если $\varepsilon_4 = -\varepsilon_3 = 1$, то получаем аналогичное решение с точностью до переобозначения индексов.

Из полученных решений скомбинируем одно. А именно, для области $\Delta_1$ ($\widetilde{\Delta}_1$) имеем решение: $f^* = \omega$ ($f^* = 1$) и координаты векторов тройки находятся по формулам

$$\begin{aligned} &b_1 = \pm\frac{\sqrt{1 + c_0 + c_1 + c_2}}{2}, \quad b_2 = \pm\frac{\sqrt{1 + c_0 - c_1 - c_2}}{2}, \\ &b_3 = \pm\frac{\sqrt{1 - c_0 + c_1 - c_2}}{2}, \quad b_4 = \pm\frac{\sqrt{1 - c_0 - c_1 + c_2}}{2}, \\ &a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = -b_3, \quad a_4 = -b_4, \\ &d_1 = b_1, \quad d_2 = -b_2, \quad d_3 = b_3, \quad d_4 = -b_4, \end{aligned} \tag{10}$$

Случай 4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & c_0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & c_1 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & c_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (1 + c_0)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & (1 - c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & (c_1 + c_2)/2 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1 - c_2)/2 \end{array}\right).$$

Следовательно, $x_1 = (1 + c_0)/2$, $\varepsilon_1 = (c_1 + c_2)/(2x_1) = \widetilde{A} = \pm 1$ – исключенный случай при рассмотрении области $\widetilde{G}$. Для области $G$ при $\varepsilon_1 = 1$ находим $B = -1$ – исключенный случай и при $\varepsilon_1 = -1$ имеем $A = -1$ – невозможный случай.

На этом исследование случаев $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1$ завершается. Поскольку разобранные случаи $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1$ дают решения минимаксной задачи для областей $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и $\widetilde{\Delta}_1 \cup \widetilde{\Delta}_2$, то при исследовании случаев $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{D}$ остается найти решения только для областей $\Delta_3$, $\Delta_4$ и $\widetilde{\Delta}_3$, $\widetilde{\Delta}_4$.

## 4. Решение задачи в случае $\mathcal{A}_2$

Сейчас предполагается, что всегда выполняются условия

$$A > 1, \quad |\delta_i| \geq \frac{1}{\omega}, \quad |\varepsilon_i| = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

В системе (7) последнее уравнение совпадает с первым. Поэтому оно далее не выписывается. Рассмотрим различные случаи расположения знаков величин $\varepsilon_i$.

1) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \pm 1$. 3) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$.

2) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$. 4) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$.

Как и ранее, остальные комбинации не рассматриваем.

В первом случае из первого и третьего уравнений системы (7) получаем $|c_1| = 1$. Это противоречит предположению $|c_1| \neq 1$.

Случай 2. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & c_0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & c_1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & -\delta_4 & c_2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (1-c_1)/2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & (1+c_1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 & (c_0-c_2)/2 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 & (c_0+c_2)/2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & 1 \end{array}\right).$$

Значит, $x_4 = (1-c_1)/2$, $\delta_4 = (c_0 - c_2)/(2x_4) = B$. Поскольку $|\delta_4| \geq 1/\omega$, то для величины $B$ получаем ограничение

$$|B| \geq \frac{1}{\omega}. \tag{11}$$

С учетом найденных $x_4$, $\delta_4$ оставшиеся уравнения дают систему относительно $x_1$, $x_2$, $x_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1+c_1)/2 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & (c_0+c_2)/2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \dfrac{2-(1-c_1)B^2}{2} \end{array}\right). \tag{12}$$

Рассмотрим случай $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$. Тогда получаем

$$\delta_1(1+c_1) = c_0 + c_2, \quad \delta_1^2(1+c_1) = 2 - (1-c_1)B^2.$$

Первое равенство дает $\delta_1 = A$. При этом условие $|\delta_i| \geq 1/\omega$ выполнено, так как сейчас $A > 1$. Второе уравнение записывается в виде

$$(1+c_1)A^2 + (1-c_1)B^2 = 2.$$

Это означает, что точка $(A, B)$ лежит на эллипсе $E$, то есть $(A, B) \in \Delta_4$. С учетом условия (11) данный случай дает решение для области (рис.4), представляющей две дуги эллипса $M_1M_5$ и $M_2M_6$ без точек $M_1$, $M_2$.

Из первого уравнения (12) можно взять, например, решение

$$x_1 = x_2 = x_3 = (1+c_1)/6.$$

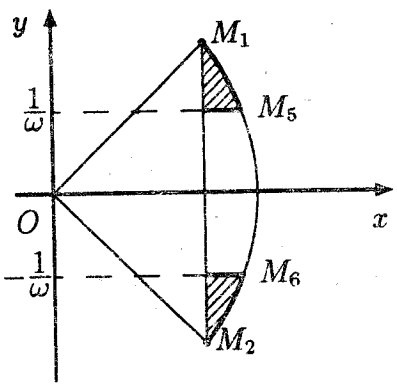


Рис. 4.
Область $\Delta_3 \cup \Delta_4 \cap \{|y| \geq \frac{1}{\omega}\}$.

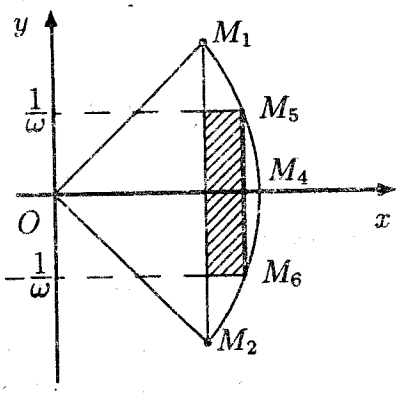


Рис. 5.
Область $\{1 < x \leq x_{M_5}, |y| < \frac{1}{\omega}\}$.

Тогда искомое решение задачи для эллиптических дуг $M_1M_5$ и $M_2M_6$ будет $f^* = \omega$ и

$$\begin{aligned} &b_i = \pm\sqrt{\frac{1+c_1}{6}}, \quad i = 1,2,3, \quad b_4 = \pm\sqrt{\frac{1-c_1}{2}}, \\ &a_1 = Ab_1, \quad a_2 = Ab_2, \quad a_3 = Ab_3, \quad a_4 = Bb_4, \\ &d_1 = b_1, \quad d_2 = b_2, \quad d_3 = b_3, \quad d_4 = -b_4, \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим случай различных $\delta_i$. Пусть $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$ для определенности. Применяя утверждение 7 к системе (12), находим

$$x_1 = \frac{2-(1-c_1)B^2-(c_0+c_2)(\delta_2+\delta_3)+(1+c_1)\delta_2\delta_3}{2(\delta_3-\delta_1)(\delta_2-\delta_1)},$$

$$x_2 = \frac{-2+(1-c_1)B^2+(c_0+c_2)(\delta_1+\delta_3)-(1+c_1)\delta_1\delta_3}{2(\delta_3-\delta_2)(\delta_2-\delta_1)},$$

$$x_3 = \frac{2-(1-c_1)B^2-(c_0+c_2)(\delta_1+\delta_2)+(1+c_1)\delta_1\delta_2}{2(\delta_3-\delta_2)(\delta_3-\delta_1)}.$$

Поскольку знаменатели в этих дробях положительны, то положительность $x_1$, $x_2$, $x_3$ будет выполняться при условиях

$$\begin{aligned} &2-(1-c_1)B^2-(c_0+c_2)(\delta_2+\delta_3)+(1+c_1)\delta_2\delta_3 > 0, \\ &-2+(1-c_1)B^2+(c_0+c_2)(\delta_1+\delta_3)-(1+c_1)\delta_1\delta_3 > 0, \\ &2-(1-c_1)B^2-(c_0+c_2)(\delta_1+\delta_2)+(1+c_1)\delta_1\delta_2 > 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Сложив первое и второе неравенства (14), получим

$$(c_0+c_2)(\delta_1-\delta_2) > (1+c_1)\delta_3(\delta_1-\delta_2),$$

или, после сокращения на $\delta_1 - \delta_2 > 0$, условие $\delta_3 < A$. Аналогично, сложив второе и третье неравенства (14), получим условие $A < \delta_1$.

Возьмем в качестве $\delta_2$, $\delta_3$ значения $\delta_2 = A$, $\delta_3 = 1$ и введем новую переменную равенством

$$\delta_1 = A + y, \quad y > 0.$$

При таком выборе $\delta_i$, очевидно, все неравенства $|\delta_i| \geq 1/\omega$ выполнены.

Подставим выбранные $\delta_i$ в неравенства (14). Левая часть первого неравенства дает

$$2 - (1 - c_1)B^2 - (c_0 + c_2)(A + 1) + (1 + c_1)A =$$
$$= 2 - (1 - c_1)B^2 - (1 + c_1)A(A + 1) + (1 + c_1)A =$$
$$= 2 - (1 - c_1)B^2 - (1 + c_1)A^2.$$

Эта величина всегда положительна, если $(A, B) \in \Delta_3$.

Точно также левая часть третьего неравенства дает

$$2 - (1 - c_1)B^2 - (c_0 + c_2)(2A + y) + (1 + c_1)A(A + y) =$$
$$= 2 - (1 - c_1)B^2 - 2(c_0 + c_2)A - (c_0 + c_2)y + (1 + c_1)A^2 + (1 + c_1)Ay =$$
$$= 2 - (1 - c_1)B^2 - (1 + c_1)A^2.$$

Поэтому третье неравенство также выполняется при $(A, B) \in \Delta_3$.

Второе неравенство (14) в новых переменных примет вид

$$(1 + c_1)A^2 + (1 - c_1)B^2 + (1 + c_1)(A - 1)y > 2.$$

Отсюда следует, что для $y$ можно взять значение

$$y = \frac{2 - (1 + c_1)A^2 - (1 - c_1)B^2 + \varepsilon}{(1 + c_1)(A - 1)}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{15}$$

При любом положительном $\varepsilon$ и $(A, B) \in \Delta_3$ величина $y$ тоже положительна.

Таким образом, в области $\Delta_3$ при ограничении $|B| \geq 1/\omega$ (на рис.4 заштрихованная фигура без дуг $M_1M_5$ и $M_2M_6$) получили следующее решение: $f^* = \omega$ и

$$\begin{gathered}
b_1 = \pm\sqrt{\frac{2 - (1 + c_1)A^2 - (1 - c_1)B^2}{2y(A + y - 1)}}, \quad b_2 = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{2y(A - 1)}}, \\
b_3 = \pm\sqrt{\frac{2 - (1 + c_1)A^2 - (1 - c_1)B^2}{2(A + y - 1)(A - 1)}}, \quad b_4 = \pm\sqrt{\frac{1 - c_1}{2}}, \\
a_1 = (A + y)b_1, \quad a_2 = Ab_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = Bb_4, \\
d_1 = b_1, \quad d_2 = b_2, \quad d_3 = b_3, \quad d_4 = -b_4,
\end{gathered} \tag{16}$$

где $y$ вычисляется по формуле (15) и $\varepsilon$ произвольное положительное число.

При рассмотрении следующих случаев предполагается выполнение неравенства

$$|B| < \frac{1}{\omega}. \tag{17}$$

Рассмотрим сначала случай 4. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & c_0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & c_1 \\ \delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 & -\delta_4 & c_2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (1+c_1)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & (1-c_1)/2 \\ \delta_1 & 0 & 0 & 0 & (c_0+c_2)/2 \\ 0 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & (c_0-c_2)/2 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & 1 \end{array}\right).$$

Значит, $x_1 = (1+c_1)/2 > 0$, $\delta_1 = (c_0+c_2)/(2x_1) = A > 1 \geq 1/\omega$. Для остальных неизвестных получаем систему

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1-c_1)/2 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & (c_0-c_2)/2 \\ \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & \dfrac{2-(1+c_1)A^2}{2} \end{array}\right). \tag{18}$$

Заметим, что $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$ входят в эту систему равноправно. Поэтому достаточно рассмотреть случаи:
a) $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4$. b) $\delta_2 > \delta_3 > \delta_4$. c) $\delta_2 = \delta_3 > \delta_4$. d) $\delta_2 > \delta_3 = \delta_4$.

Случай a. Первые два уравнения (18) дают $(1-c_1)\delta_2 = c_0 - c_2$ или $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = B$. Предположение (17) приводит к нарушению условий $|\delta_i| \geq 1/\omega$. Значит, этот случай не дает решений в рассматриваемой области.

Случай b. Применяя утверждение 7 к системе (18), находим

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2-(1+c_1)A^2-(c_0-c_2)(\delta_3+\delta_4)+(1-c_1)\delta_3\delta_4}{2(\delta_4-\delta_2)(\delta_3-\delta_2)}, \\ x_3 &= \frac{-2+(1+c_1)A^2+(c_0-c_2)(\delta_2+\delta_4)-(1-c_1)\delta_2\delta_4}{2(\delta_4-\delta_3)(\delta_3-\delta_2)}, \\ x_4 &= \frac{2-(1+c_1)A^2-(c_0-c_2)(\delta_2+\delta_3)+(1-c_1)\delta_2\delta_3}{2(\delta_4-\delta_3)(\delta_4-\delta_2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Знаменатели этих дробей в этом случае положительные. Поэтому из условий $x_i > 0$ получаем

$$\begin{aligned} 2-(1+c_1)A^2-(c_0-c_2)(\delta_3+\delta_4)+(1-c_1)\delta_3\delta_4 &> 0, \\ -2+(1+c_1)A^2+(c_0-c_2)(\delta_2+\delta_4)-(1-c_1)\delta_2\delta_4 &> 0, \\ 2-(1+c_1)A^2-(c_0-c_2)(\delta_2+\delta_3)+(1-c_1)\delta_2\delta_3 &> 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Сложив первые два, а затем последние два неравенства, получим условие $\delta_4 < B < \delta_2$. Поскольку должны также выполняться условия $|B| < 1/\omega$ и $|\delta_i| \geq 1/\omega$, то находим $\delta_2 \geq 1/\omega$ и $\delta_4 \leq -1/\omega$.

Введем новые переменные соотношениями

$$\delta_2 = B + y_2 \quad (y_2 > 0), \quad \delta_3 = B + y_3, \quad \delta_4 = B - y_4 \quad (y_4 > 0).$$

При этом $y_3 \neq 0$. Иначе $\delta_3 = B$, что противоречит $|\delta_3| \geq 1/\omega$. Подставляя эти выражения в (20), получаем после упрощений

$$\begin{aligned}
&(1+c_1)A^2 + (1-c_1)B^2 + (1-c_1)y_3y_4 < 2,\\
&(1+c_1)A^2 + (1-c_1)B^2 + (1-c_1)y_2y_4 > 2,\\
&(1+c_1)A^2 + (1-c_1)B^2 - (1-c_1)y_2y_3 < 2.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\neq$ величину

$$\neq = \frac{2 - (1+c_1)A^2 - (1-c_1)B^2}{1-c_1}.$$

Поскольку точка $(A, B)$ принадлежит $\Delta \cup E$, то $\neq \geq 0$. Полученные неравенства и ограничения на $\delta_i$ дают систему неравенств для переменных $y_2$, $y_3$, $y_4$:

$$\begin{gathered}
y_3y_4 < \neq, \quad y_2y_4 > \neq, \quad -y_2y_3 < \neq,\\
B + y_2 \geq 1/\omega, \quad |B + y_3| \geq 1/\omega, \quad B - y_4 \leq -1/\omega,\\
y_2 > y_3, \quad y_3 > -y_4, \quad y_2 > 0, \quad y_4 > 0.
\end{gathered} \tag{21}$$

Отсюда сразу следует, что $\neq\neq 0$, так в противном случае в силу положительности $y_2$, $y_4$ первое и третье неравенства противоречивы.

**Утверждение 8** *Для разрешимости системы* (21) *при ограничении* $|B| < \frac{1}{\omega}$ *необходимо и достаточно выполнения неравенства*

$$(1+c_1)A^2 + (1-c_1)\frac{1}{\omega^2} < 2. \tag{22}$$

Условие (22) означает, что точка $(A, \frac{1}{\omega})$ лежит внутри эллипса $E$.

**Доказательство.** Проверим необходимость. Предположим, что система (21) разрешима при ограничении (17). Из четвертого и шестого неравенств этой системы выводим

$$y_2y_4 \geq \frac{1}{\omega^2} - B^2 = \neq + \frac{(1+c_1)A^2 + (1-c_1)/\omega^2 - 2}{1-c_1}.$$

Что не противоречит второму неравенству из (21) независимо от выполнения условия (22). Предположим, что $y_3 > 0$. Третье неравенство непротиворечиво. Из пятого неравенства (21) в этом случае следует $y_3 \geq 1/\omega - B$. Тогда совместно с шестым неравенством получаем

$$y_3 y_4 \geq \frac{1}{\omega^2} - B^2 =\neq + \frac{(1+c_1)A^2 + (1-c_1)/\omega^2 - 2}{1-c_1}.$$

Отсюда, если (22) не выполняется, то $y_3 y_4 \geq\neq$. Что противоречит первому неравенству из (21).

Предположим, что $y_3 < 0$. Тогда первое неравенство (21) непротиворечиво. Пятое неравенство (21) теперь принимает вид $y_3 \leq -1/\omega - B$, которое совместно с четвертым неравенством приводит к противоречивому неравенству $-y_2 y_3 \geq\neq$, если (22) не выполняется.

Обратно, пусть выполняется (22). Тогда имеем $1/\omega^2 - B^2 <\neq$. Выпишем хотя бы одно решение системы (21), чтобы доказать достаточность. Возьмем, например,

$$y_3 = \frac{1}{\omega} - B > 0, \quad y_4 = \frac{1}{\omega} + B, \quad y_2 = \left(\frac{1}{\omega} - B\right)\nu, \quad \nu > \frac{\neq}{1/\omega^2 - B^2} > 1.$$

Очевидно, что все неравенства из (21) выполняются. ■

Из доказанного утверждения вытекает, что при условии

$$|B| < \frac{1}{\omega}, \quad 1 < A < \sqrt{\frac{2-(1-c_1)/\omega^2}{1+c_1}} \equiv x_{M_5} \tag{23}$$

в качестве решения задачи можно взять следующее: $f^* = \omega$ и

$$\begin{aligned} &b_1 = \pm\sqrt{\frac{1+c_1}{2}}, \quad b_i = \pm\sqrt{x_i}, \quad i = 2,3,4, \\ &a_1 = Ab_1,\ a_i = \delta_i b_i,\ i = 2,3,4,\ \delta_2 = B + (1/\omega - B)\nu,\ \delta_3 = -\delta_4 = \frac{1}{\omega}, \\ &d_1 = b_1, \quad d_2 = -b_2, \quad d_3 = -b_3, \quad d_4 = -b_4, \end{aligned} \tag{24}$$

где $x_2$, $x_3$, $x_4$ вычисляются по формулам (19) и $\nu$ любое число, удовлетворяющее неравенству $\nu > \frac{\neq}{1/\omega^2 - B^2}$. В (23) через $x_{M_5}$ обозначена абсцисса точки $M_5$ с ординатой $1/\omega$ на эллипсе $E$. Таким образом, решение (24) соответствует области, заштрихованной на рис.5, без границы.

Случай c. В этом случае ($\delta_2 = \delta_3 > \delta_4$) имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1-c_1)/2 \\ \delta_2 & \delta_2 & \delta_4 & (c_0-c_2)/2 \\ \delta_2^2 & \delta_2^2 & \delta_4^2 & \frac{2-(1+c_1)A^2}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{(1-c_1)(B-\delta_4)}{2(\delta_2-\delta_4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-c_1)(\delta_2-B)}{2(\delta_2-\delta_4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-c_1)B\delta_2+(1+c_1)A^2-2}{2\delta_4(\delta_2-\delta_4)} \end{array}\right). \tag{25}$$

Из первого уравнения находим

$$x_2 + x_3 = \frac{(1-c_1)(B-\delta_4)}{2(\delta_2-\delta_4)}$$

и из последних двух

$$x_4 = \frac{(1-c_1)(\delta_2-B)}{2(\delta_2-\delta_4)} = \frac{(1-c_1)B\delta_2 + (1+c_1)A^2 - 2}{2\delta_4(\delta_2-\delta_4)}.$$

В силу положительности $x_i$ получаем $\delta_4 < B < \delta_2$. Последнее равенство дает также

$$\delta_4 = \frac{(1-c_1)B\delta_2 + (1+c_1)A^2 - 2}{(1-c_1)(\delta_2-B)}.$$

Поэтому

$$\delta_2 - \delta_4 = \frac{(1-c_1)\delta_2^2 - 2(1-c_1)B\delta_2 - (1+c_1)A^2 + 2}{(1-c_1)(\delta_2-B)} = \frac{(\delta_2-B)^2 + \neq}{\delta_2 - B},$$

$$B - \delta_4 = \frac{\neq}{\delta_2 - B}.$$

Из последнего соотношения следует, что $\neq > 0$, то есть точки на эллипсе $E$ сейчас исключаются.

Так как $|B| < 1/\omega \le |\delta_2|$ и $\delta_2 > B$, то $\delta_2 - B \ge 1/\omega - B$. Аналогично из неравенств $|B| < 1/\omega \le |\delta_4|$ и $\delta_4 < B$ следует, что $B - \delta_4 \ge 1/\omega + B$. Значит,

$$\neq = (B-\delta_4)(\delta_2-B) \ge \frac{1}{\omega^2} - B^2 = \neq + \frac{(1+c_1)A^2 + (1-c_1)/\omega^2 - 2}{1-c_1}.$$

То есть

$$(1+c_1)A^2 + (1-c_1)\frac{1}{\omega^2} \le 2.$$

В отличие от (22) сейчас допускается равенство. Поэтому рассматриваемый случай дает решение задачи также и на интервале $M_5M_6$, отмеченном на рис.5 жирной линией.

Для получения частного решения системы (25) положим $\delta_2 = 1/\omega$ и $x_2 = x_3$. Тогда находим

$$\delta_4 = B - \frac{\neq}{1/\omega - B} = B - \frac{\omega \neq}{1-\omega B}, \quad x_4 = \frac{(1-c_1)(1/\omega - B)^2}{2[(1/\omega - B)^2 + \neq]},$$

$$x_2 = x_3 = \frac{(1-c_1)(B-\delta_4)}{4(\delta_2-\delta_4)} = \frac{(1-c_1)\neq}{4[(1/\omega - B)^2 + \neq]}. \tag{26}$$

Таким образом, для области, отмеченной на рис.5, решением задачи на минимум будет: $f^* = \omega$ и координаты векторов тройки находятся по формулам

$$\begin{aligned}
&b_1 = \pm\sqrt{\frac{1+c_1}{2}}, \quad b_i = \pm\sqrt{x_i}, \quad i = 2,3,\\
&b_4 = \pm\Big(\frac{1}{\omega} - B\Big)\sqrt{\frac{1-c_1}{2[(1/\omega - B)^2 + \neq]}},\\
&a_1 = Ab_1, \quad a_2 = b_2/\omega, \quad a_3 = b_3/\omega, \quad a_4 = \Big(B - \frac{\omega \neq}{1-\omega B}\Big)b_4,\\
&d_1 = b_1, \quad d_2 = -b_2, \quad d_3 = -b_3, \quad d_4 = -b_4,
\end{aligned} \tag{27}$$

где $x_2$, $x_3$ вычисляются по формулам (26).

В случае d получаются такие же соотношения между $\delta_2$, $\delta_4$ и в той же области изменения параметров, как и в только что рассмотренном случае. Поэтому нет необходимости выписывать решение.

Случай 3. В оставшемся случае будем искать решение при условии

$$(1+c_1)A^2 + (1-c_1)\frac{1}{\omega^2} > 2. \tag{28}$$

Тогда условие $|B| < 1/\omega$ выполняется автоматически. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & c_0\\
1 & 1 & -1 & -1 & c_1\\
\delta_1 & \delta_2 & -\delta_3 & -\delta_4 & c_2\\
\delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & 1
\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & (1+c_1)/2\\
0 & 0 & 1 & 1 & (1-c_1)/2\\
\delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 & (c_0+c_2)/2\\
0 & 0 & \delta_3 & \delta_4 & (c_0-c_2)/2\\
\delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 & \delta_4^2 & 1
\end{array}\right). \tag{29}$$

Выделим подсистемы относительно пар $x_1$, $x_2$ и $x_3$, $x_4$

$$\left(\begin{array}{cc|c}
1 & 1 & (1+c_1)/2\\
\delta_1 & \delta_2 & (c_0+c_2)/2
\end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc|c}
1 & 1 & (1-c_1)/2\\
\delta_3 & \delta_4 & (c_0-c_2)/2
\end{array}\right).$$

Так как $\delta_1$, $\delta_2$ и $\delta_3$, $\delta_4$ входят в эти системы симметрично, то достаточно ограничиться рассмотрением случаев $\delta_1 \geq \delta_2$ и $\delta_3 \geq \delta_4$.

Случай $\delta_3 = \delta_4$ невозможен, так как при этом предположении получаем $\delta_3 = B$. Но $|B| < 1/\omega$ и условие $|\delta_3| \geq 1/\omega$ нарушено.

Предположим сначала, что $\delta_1 > \delta_2$ и $\delta_3 > \delta_4$. Решая системы, находим

$$x_1 = \frac{(1+c_1)(A-\delta_2)}{2(\delta_1-\delta_2)}, \quad x_2 = \frac{(1+c_1)(\delta_1-A)}{2(\delta_1-\delta_2)},$$

$$x_3 = \frac{(1-c_1)(B-\delta_4)}{2(\delta_3-\delta_4)}, \quad x_4 = \frac{(1-c_1)(\delta_3-B)}{2(\delta_3-\delta_4)}.$$

Тогда из положительности $x_i$ следуют неравенства

$$\delta_1 > A, \quad \delta_2 < A, \quad \delta_3 > B, \quad \delta_4 < B. \tag{30}$$

Подставляя найденные значения $x_i$ в последнее уравнение системы (29), получим

$$(1+c_1)[A(\delta_1+\delta_2)-\delta_1\delta_2]+(1-c_1)[B(\delta_3+\delta_4)-\delta_3\delta_4]=2.$$

Введем новые переменные соотношениями $\delta_1 = A + y_1$, $\delta_2 = A - y_2$, $\delta_3 = B + y_3$, $\delta_4 = B - y_4$. В силу (30) все $y_i > 0$. В новых переменных последнее равенство принимает вид

$$(1+c_1)A^2+(1-c_1)B^2+(1+c_1)y_1y_2+(1-c_1)y_3y_4=2. \tag{31}$$

Кроме того, из неравенств $|B| < 1/\omega \le |\delta_3|$ и $\delta_3 > B$ следует, что $\delta_3 > B$. Поэтому $y_3 = \delta_3 - B \ge 1/\omega - B$. Аналогично, из $|B| < 1/\omega \le |\delta_4|$ и $\delta_4 < B$ вытекает, что $y_4 = B - \delta_4 \ge 1/\omega + B$. Тогда

$$y_3y_4 \ge \frac{1}{\omega^2} - B^2$$

и из (31) получаем

$$2 \ge (1+c_1)A^2+(1-c_1)B^2+(1-c_1)y_3y_4 \ge (1+c_1)A^2+(1-c_1)\frac{1}{\omega^2}.$$

Значит, условие (28) нарушено. То есть данный случай не дает решений минимаксной задачи для области, в которой $A > x_{M_5}$.

Если $\delta_1 = \delta_2$, то из первой подсистемы получаем $\delta_1 = A$. Поэтому $y_1 = y_2 = 0$. Выводы относительно $y_3$, $y_4$ аналогичны. Следовательно, этот подслучай также не приводит к решениям для рассматриваемой области.

Таким образом, при условии (28) случай $\mathcal{A}_2$ не дает решений.

## 5. Решение задачи в случае $\mathcal{C}_2$

В рассматриваемом случае предполагается, что $\widetilde{B} < -1$. Тогда $|\widetilde{A}| < 1$. Из условий $|a_i| = |b_i|$ и $\omega|d_i| \le |b_i|$ имеем

$$|\delta_i| = 1, \quad |\varepsilon_i| \le \frac{1}{\omega}, \quad i = 1,2,3,4.$$

В системе (7) первое и пятое уравнения совпадают. Рассмотрим случаи:

1) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \pm 1$.
2) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -\delta_4 = 1$.
3) $\delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = -\delta_4 = 1$.
4) $\delta_1 = -\delta_2 = -\delta_3 = -\delta_4 = 1$.

Как и ранее, остальные комбинации не рассматриваем.

В первом случае из первого и второго уравнений системы (7) получаем $|c_0| = 1$, что противоречит предположению $|c_0| \neq 1$.

Случай 2. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & c_0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & c_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & c_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & (1+c_0)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 & (c_1+c_2)/2 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & 1 \end{array}\right).$$

Значит, $x_4 = (1 - c_0)/2$, $\varepsilon_4 = (c_1 - c_2)/(2x_4) = \widetilde{B}$. Поскольку $|\varepsilon_4| \leq 1/\omega$, то для $\widetilde{B}$ получаем ограничение

$$|\widetilde{B}| \leq \frac{1}{\omega}. \tag{32}$$

С учетом найденных $x_4$, $\varepsilon_4$ оставшиеся уравнения дают систему относительно $x_1$, $x_2$, $x_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1+c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & (c_1+c_2)/2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \dfrac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2}{2} \end{array}\right). \tag{33}$$

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Тогда получаем

$$\varepsilon_1(1 + c_0) = c_1 + c_2, \quad \varepsilon_1^2(1 + c_0) = 2 - (1 - c_0)\widetilde{B}^2.$$

Первое из этих равенств дает $\varepsilon_1 = \widetilde{A}$. При этом условие $|\varepsilon_1| \leq 1/\omega$ выполняется, так как сейчас $|\widetilde{A}| < 1 < 1/\omega$.

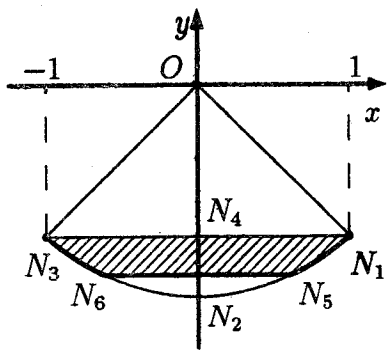


Рис. 6.Область $\widetilde{\Delta}_3 \cup \widetilde{\Delta}_4 \cap \{y \geq -\frac{1}{\omega}\}$.

Второе уравнение записывается в виде

$$(1 + c_0)\widetilde{A}^2 + (1 - c_0)\widetilde{B}^2 = 2.$$

Поэтому точка $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ лежит на эллипсе $\widetilde{E}$, то есть $(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \in \widetilde{\Delta}_4$. С учетом условия (32) данный случай дает решение для области (рис.6), представляющей две дуги эллипса $N_1N_5$ и $N_3N_6$ без точек $N_1$, $N_3$.

Из первого уравнения (33) можно взять, например, решение

$$x_1 = x_2 = x_3 = (1 + c_0)/6.$$

Тогда искомое решение задачи для эллиптических дуг $N_1N_5$ и $N_3N_6$ будет $f^* = 1$ и

$$\begin{aligned} &b_i = \pm\sqrt{\frac{1+c_0}{6}}, \quad i = 1,2,3, \quad b_4 = \pm\sqrt{\frac{1-c_0}{2}}, \\ &a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = -b_4, \\ &d_1 = \widetilde{A}b_1, \quad d_2 = \widetilde{A}b_2, \quad d_3 = \widetilde{A}b_3, \quad d_4 = \widetilde{B}b_4, \end{aligned} \tag{34}$$

Рассмотрим случай различных $\varepsilon_i$. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ для определенности. Применяя утверждение 7 к системе (33), находим

$$x_1 = \frac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2-(c_1+c_2)(\varepsilon_2+\varepsilon_3)+(1+c_0)\varepsilon_2\varepsilon_3}{2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)},$$

$$x_2 = \frac{-2+(1-c_0)\widetilde{B}^2+(c_1+c_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_3)-(1+c_0)\varepsilon_1\varepsilon_3}{2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)},$$

$$x_3 = \frac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2-(c_1+c_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+(1+c_0)\varepsilon_1\varepsilon_2}{2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}.$$

Рассуждая как и в случае $\mathcal{A}_2$, получаем $\varepsilon_3 < \widetilde{A}$, $\varepsilon_1 > \widetilde{A}$. Возьмем в качестве $\varepsilon_i$ значения $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \widetilde{A}$, $\varepsilon_3 = -1$. При таком выборе, очевидно, в области $\widetilde{\Delta}_3$ все неравенства $|\varepsilon_i| \le 1/\omega$ выполнены.

Подставим выбранные $\varepsilon_i$ в найденные значения $x_1$, $x_2$, $x_3$

$$x_1 = \frac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2-(c_1+c_2)(\widetilde{A}-1)-(1+c_0)\widetilde{A}}{4(1-\widetilde{A})} = \frac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2-(1+c_0)\widetilde{A}^2}{4(1-\widetilde{A})},$$

$$x_2 = \frac{-2+(1-c_0)\widetilde{B}^2+(1+c_0)}{2(1+\widetilde{A})(1-\widetilde{A})} = \frac{(1-c_0)(\widetilde{B}^2-1)}{2(1-\widetilde{A}^2)},$$

$$x_3 = \frac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2-(c_1+c_2)(1+\widetilde{A})+(1+c_0)\widetilde{A}}{4(1+\widetilde{A})} = \frac{2-(1-c_0)\widetilde{B}^2-(1+c_0)\widetilde{A}^2}{4(1+\widetilde{A})}.$$

Так как точка $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ лежит внутри эллипса $\widetilde{E}$ и $\widetilde{B} < -1$, $|\widetilde{A}| < 1$, то величины $x_1$, $x_2$, $x_3$ положительны.

Таким образом, в области $\widetilde{\Delta}_3$ при ограничении $-1/\omega \le \widetilde{B} < -1$ (на рис.6 заштрихованная фигура без дуг $N_1N_5$ и $N_3N_6$) получили решение $f^* = 1$ и

$$\begin{aligned} &b_1 = \pm\sqrt{\frac{2-(1+c_0)\widetilde{A}^2-(1-c_0)\widetilde{B}^2}{4(1-\widetilde{A})}}, \quad b_2 = \pm\sqrt{\frac{(1-c_0)(\widetilde{B}^2-1)}{2(1-\widetilde{A}^2)}}, \\ &b_3 = \pm\sqrt{\frac{2-(1+c_0)\widetilde{A}^2-(1-c_0)\widetilde{B}^2}{4(1+\widetilde{A})}}, \quad b_4 = \pm\sqrt{\frac{1-c_0}{2}}, \\ &a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = -b_4, \\ &d_1 = b_1, \quad d_2 = \widetilde{A}b_2, \quad d_3 = -b_3, \quad d_4 = \widetilde{B}b_4. \end{aligned} \tag{35}$$

При рассмотрении оставшихся случаев 3, 4 предполагается выполнение неравенства

$$\widetilde{B} < -\frac{1}{\omega}. \tag{36}$$

Случай 3. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & c_0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & c_1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & c_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & (1+c_0)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & (c_1+c_2)/2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & 1 \end{array}\right).$$

Выделим подсистему относительно $x_3$, $x_4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \end{array}\right).$$

По симметрии $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ в системе достаточно рассмотреть случай $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_4$.

Случай $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$ невозможен, так как при этом предположении получаем $\varepsilon_3 = \widetilde{B}$. Но $\widetilde{B} < -1/\omega$, поэтому условие $|\varepsilon_3| \leq 1/\omega$ нарушено.

При $\varepsilon_3 > \varepsilon_4$ находим

$$x_3 = \frac{(\widetilde{B} - \varepsilon_4)(1-c_0)}{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)}, \quad x_4 = \frac{(\varepsilon_3 - \widetilde{B})(1-c_0)}{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)}.$$

Тогда из положительности $x_3$ следует $\varepsilon_4 < \widetilde{B}$, что приводит к нарушению условия $|\varepsilon_4| \leq 1/\omega$. Следовательно, при ограничении (36) случай 3 не дает решений.

Случай 4. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & c_0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & c_1 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & c_2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (1+c_0)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & (c_1+c_2)/2 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & 1 \end{array}\right).$$

Значит, $\dot{x}_1 = (1+c_0)/2 > 0$, $\varepsilon_1 = (c_1+c_2)/(2x_1) = \widetilde{A}$. При этом $|\varepsilon_1| < 1/\omega$ выполняется. Для остальных неизвестных получаем систему

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \\ \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 & \varepsilon_4^2 & \dfrac{2-(1+c_0)\widetilde{A}^2}{2} \end{array}\right). \tag{37}$$

По симметрии $\varepsilon_i$ в системе достаточно рассмотреть случаи:
a) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$. b) $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4$. c) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 > \varepsilon_4$. d) $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 = \varepsilon_4$.

Случай a. Первые два уравнения (37) дают $(1 - c_0)\varepsilon_2 = c_1 - c_2$ или $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \widetilde{B}$. Предположение (36) приводит к нарушению условий $|\varepsilon_i| \le 1/\omega$. Значит, этот случай не дает решений.

Случай b. Применяя утверждение 7 к (37), находим

$$x_2 = \frac{2 - (1 + c_0)\widetilde{A}^2 - (c_1 - c_2)(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) + (1 - c_0)\varepsilon_3\varepsilon_4}{2(\varepsilon_4 - \varepsilon_2)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)},$$
$$x_3 = \frac{-2 + (1 + c_0)\widetilde{A}^2 + (c_1 - c_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) - (1 - c_0)\varepsilon_2\varepsilon_4}{2(\varepsilon_4 - \varepsilon_3)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)},$$
$$x_4 = \frac{2 - (1 + c_0)\widetilde{A}^2 - (c_1 - c_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (1 - c_0)\varepsilon_2\varepsilon_3}{2(\varepsilon_4 - \varepsilon_3)(\varepsilon_4 - \varepsilon_2)}.$$

Поскольку знаменатели этих дробей в этом случае положительные, то из условий $x_i > 0$ следуют неравенства

$$2 - (1 + c_0)\widetilde{A}^2 - (c_1 - c_2)(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) + (1 - c_0)\varepsilon_3\varepsilon_4 > 0,$$
$$-2 + (1 + c_0)\widetilde{A}^2 + (c_1 - c_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) - (1 - c_0)\varepsilon_2\varepsilon_4 > 0,$$
$$2 - (1 + c_0)\widetilde{A}^2 - (c_1 - c_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (1 - c_0)\varepsilon_2\varepsilon_3 > 0.$$

Сложив неравенства попарно, получаем $\varepsilon_4 < \widetilde{B} < \varepsilon_2$. Так как по предположению для $\widetilde{B}$ выполняется ограничение (36), то получаем $\varepsilon_4 < -1/\omega$. То есть приходим к нарушению условия $|\varepsilon_4| \le 1/\omega$. Значит, этот случай не дает решений в оставшейся области.

Случай c. В этом случае ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3 > \varepsilon_4$) имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \\ \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_4^2 & \frac{2-(1+c_0)\widetilde{A}^2}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{(1-c_0)(\widetilde{B}-\varepsilon_4)}{2(\varepsilon_2-\varepsilon_4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-c_0)(\varepsilon_2-\widetilde{B})}{2(\varepsilon_2-\varepsilon_4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(1-c_0)\widetilde{B}\varepsilon_2+(1+c_0)\widetilde{A}^2-2}{2\varepsilon_4(\varepsilon_2-\varepsilon_4)} \end{array}\right).$$

Отсюда находим

$$x_2 + x_3 = \frac{(1 - c_0)(\widetilde{B} - \varepsilon_4)}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)}, \quad x_4 = \frac{(1 - c_0)(\varepsilon_2 - \widetilde{B})}{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)}.$$

Из положительности $x_i$ получаем $\varepsilon_4 < \widetilde{B} < \varepsilon_2$, то есть $\varepsilon_4 < -1/\omega$, что противоречит условию $|\varepsilon_4| \le 1/\omega$. Этот случай невозможен.

Случай d. В этом случае ($\varepsilon_2 > \varepsilon_3 = \varepsilon_4$) имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_4 & \varepsilon_4 & (c_1-c_2)/2 \\ \varepsilon_2^2 & \varepsilon_4^2 & \varepsilon_4^2 & \frac{2-(1+c_0)\widetilde{A}^2}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & (1-c_0)/2 \\ \varepsilon_2-\varepsilon_4 & 0 & 0 & \frac{(\widetilde{B}-\varepsilon_4)(1-c_0)}{2} \\ \varepsilon_2(\varepsilon_2-\varepsilon_4) & 0 & 0 & \frac{2-(1+c_0)\widetilde{A}^2-\varepsilon_4(c_1-c_2)}{2} \end{array}\right).$$

Из условия $x_2 > 0$ получаем $\varepsilon_4 < \widetilde{B} < -1/\omega$, что противоречит условию $|\varepsilon_4| \leq 1/\omega$. Таким образом, при ограничении (36) случай 4 также не дает решений.

Окончательно получаем, что при выполнении (36) нельзя достигнуть минимума $f^* = 1$.

Итак, в случаях $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ задача полностью решена.

## Литература


1. **Полещиков С.М., Холопов А.А.** Теория $L$-матриц и регуляризация уравнений движения в небесной механике// *Сыктывкар: СЛИ, 1999. 255 с.*

2. **Полещиков С.М., Холопов А.А.** Регуляризация уравнений движения небесных тел. 1. Классификация $L$-матриц четвертого порядка // *Астрономический вестник. 2000. Т. 34. №4. С. 375 - 382.*

3. **Полещиков С.М., Холопов А.А.** Регуляризация уравнений движения небесных тел. 2. Исправление системы $KS$-координат при численном интегрировании // *Астрономический вестник. 2000. Т. 34. №6. С. 567 - 573.*

4. **Полещиков С.М., Холопов А.А.** Численное интегрирование регулярных уравнений движения небесных тел в плоском случае // *Астрономический вестник. 2004. (в печати).*



**Summary**

**Poleshchikov S.M., Kholopov A.A.** The problem of optimal positions for a triple of four-dimensional orts

We consider the minimax problem arising during numerical integration of disturbed motion equations in celestial mechanics by Runge-Kutta-Fehlberg method. Arbitrary perturbations are taken into aaccount. We give the analytic solution of minimax problem for the most part of geometric parameters.



*Сыктывкарский университет*
*Сыктывкарский лесной институт*


*Поступила 20.09.2002*