Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 4 (49)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)

Научная статья

УДК 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

СЕМАНТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Ольга Александровна Сотникова
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, sotnikovaoa@syktsu.ru

Аннотация. Приведен анализ методологии математики, касающейся семантики математического материала. Автор исходит из необходимости достижения понимания при изучении математики. Обосновано, что семантические аспекты обучения математике ориентируют на организацию установления содержательных связей в математическом материале.

Ключевые слова: понимание математики в обучении, содержательные связи, осмысление математических понятий

Для цитирования: Сотникова О. А. Семантические аспекты в методике обучения математике // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 4 (49). С. 59–69. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

Article

Semantic aspects in the methods of math teaching

Olga A. Sotnikova
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, sotnikovaoa@syktsu.ru

Abstract. The article features the analysis of methodology of mathematics in relation to the semantics of mathematical matter. The author's assumptions are based on the need to gain understanding in learning mathematics. It is justified that semantic aspects of teaching math involve establishing meaningful connections within mathematical matter.

Keywords: understanding mathematics in teaching, meaningful connections, comprehension of mathematical concepts

For citation: Sotnikova O. A. Semantic aspects in the methods of math teaching. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 59–69. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

В вузовском преподавании мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда приходится констатировать факт, что содержание дисциплины студентам «затруднительно для понимания», да и студенты часто утверждают, что тот или иной раздел им «непонятен». В общем, чувствуется различие в понятиях «знание» и «понимание»: можно «знать», но «не понимать», а потому «понять» куда важнее, чем просто «знать». В этой связи целесообразно вести речь об обучении математике, нацеленном на понимание. Но чтобы разработать положения такого обучения, необходимо обратиться к методологической трактовке понятия «понимание», а для методики обучения математике – его связи с семантическими аспектами.

В «знаниевой» модели обучения понимание рассматривается с рациональной точки зрения, как «понимание фактологического знания». Отсюда и известная трактовка понимания в обучении: «понимать — значит запомнить и научиться применять». В культуротворческой модели образования понимание трактуется «герменевтическим кругом» (Х. Г. Гадамер): «Чтобы понять, надо объяснить, а чтобы объяснить, надо понять». Герменевтическая тенденция в обучении ориентирует на понимание в идейном аспекте: «в итоге — получить ИДЕЮ познания (а не само познание), т. е. метод» [1, с. 398]. Таким образом, можно выделить два основных вида понимания в познании мира: понимание-объяснение, характерное для методологии естественных наук, и понимание-истолкование, характерное для гуманитарных наук.

Математика является специфической наукой, не вписывающейся аккуратно ни в один из названных видов наук ни по предмету исследования, ни по методам. И в то же время она имеет их составляющие.

С одной стороны, математика изучает формы и отношения реального мира (естественно-научный компонент), поэтому методология математики связана с «объясняющими» методами. Но формы и отношения реального мира математика рассматривает в отвлечении от их содержания с помощью абстракций, которые являются продуктом человеческой деятельности, т. е. культуры. Следовательно, другая сторона предмета математики (гуманитарная) состоит в том, что он не существует «сам по себе», а создается человеком. Творения, выраженные на математическом языке, требуют истолкования, расшифровки замысла (конструирования абстракции, идеи доказательства и т. п.), воплощенного математиками в своих трудах. Потому изучение математики связано с пониманием-истолкованием. Необходимо осознавать основу (идею) «получения» математических фактов, способы их выражения и те виды человеческой деятельности, которые к ним приводят (образные, языковые, мыслительные и т. д.).

Таким образом, говоря о понимании в обучении математике, необходимо иметь в виду, что оно имеет два компонента: естественно-научный (компонент рациональной модели понимания) и гуманитарный (компонент антропологической модели понимания).

Понимание с методологических позиций связано с понятиями осмысления, объяснения, интерпретации [2; 3]:

1. Понимание как осмысление означает выделение смысла, который содержится во взаимосвязях существенных сторон понятий, расшифровка результата человеческой деятельности.

2. Понимание как объяснение («рациональное объяснение») требует согласования структур (структуры науки и структуры культуры), выделения составляющих знания, их причинно-следственной связи.

3. Понимание как интерпретация есть отношение субъекта к знанию, некоторое истолкование, определение того, что это знание означает, т. е. установление соответствия между знанием и реальной действительностью.

В каждой трактовке понятия понимания процессуальная составляющая понимания требует *выделения взаимосвязей* в объекте изучения.

Следовательно, с методологических позиций понимание связано с установлением взаимосвязей (существенных сторон понятия, структур знания, в отношениях к знанию). И если обучение будет нацелено на понимание, то познавательный его аспект требует акцента на установление взаимосвязей в материале (объекте изучения).

С психологических позиций работа понимания при усвоении знаний описывается двумя механизмами: осмыслением значений и означением смысла, и характеризуется установлением взаимосвязей, их значимости и построением концепта [4]. Осмысление значений характеризует первое направление работы понимания: движение от значения к смыслу. Второе направление является обратным, оно характеризует «приписывание» значений смысловым составляющим знания: движение от смысла к значению. Если эта работа выполняется, то знание получает двойную окраску: окраску означенности и осмысленности. Таким образом, в процессе понимания с психологических позиций происходит как бы «построение» знания посредством *установления взаимосвязей* от смысла к значению и обратно. Эти связи мы называем содержательными.

Таким образом, ключевыми понятиями для трактовки понимания (как процесса, так и результата) являются понятия «смысл» и «значение». Если речь идет о понимании *в обучении* математике, то эти ключевые понятия должны рассматриваться под призмой работы с учебным математическим текстом (устным или письменным), что имеет непосредственную связь с выражениями языка.

Г. Фреге, исследуя отношения между выражениями языка, определил, что собственные имена в языке имеют два значения: предметное и смысловое [5] (рис.).

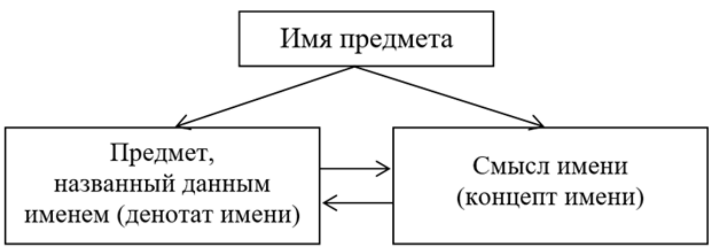

Рис. Треугольник значений имени предмета по Г. Фреге

Предметное значение имени (денотат, или просто «значение») — это тот конкретный объект (или класс предметов), которому приписано данное имя. Имя имеет другое значение — косвенное, которое называют смыслом (концептом), его объективное содержание.

А. Черч концепт понимал иначе. Его сущность он раскрывает следующим образом: «Смысл (или концепт) — это постулированный абстрактный объект с определенными постулированными свойствами» [6, с. 343]. То есть можно вести разговор о смысле имени, ничего не зная о его денотате, кроме того, что он определяется этим смыслом. Так что смысл имени, по Черчу, тоже предметен (раз это «объект»), но его «предметность» выражается свойствами предметного значения.

Г. Фреге утверждает, что денотат имени может не существовать, но концепт есть всегда. Он приводит пример имени «в наименьшей степени сходящийся ряд», которое имеет смысл, но не имеет значения [5, с. 36]. Можно привести и другие примеры. Скажем, «порядок числа 2 аддитивной группы целых чисел». Смысл имени в том натуральном числе n, что n-кратное двойке равно 0. Понятно, что такого натурального числа не существует, т. е. значения нет. Аналогичные примеры можно привести из школьной математики. Скажем, $\log_2 0$ обозначает число n, такое, что $2^n = 0$. Значения нет, но смысл есть в воображаемом числе n с «постулированным» свойством.

А. Черч придерживался другой точки зрения: «Если дан смысл, то этим определяется существование и единственность денотата» [6, с. 20]. Видимо, речь идет о совпадении концепта и денотата.

Расхождение точек зрения Г. Фреге и А. Черча, на наш взгляд, связано с тем, что понятия концепта и денотата они применяют к разным понятиям. Г. Фреге говорит о собственных именах, которые являются выражением языка для обозначения конкретных вещей, А. Черч ведет разговор о самих «вещах». Именно поэтому с одной позиции денотат существует всегда, с другой — нет. Заметив это расхождение, В. В. Мадер пришел к новой концепции [7], которой мы придерживаемся. В ней он ограничивается рассмотрением концептов и денотатов имен абстрактных объектов, что достаточно для математических понятий.

Имена являются языковыми выражениями понятий теории. Поэтому всякое введение имен (описание теории) должно начинаться с явного описания предметной области (принцип Э. Шредера). Тогда денотатом обладают только те имена, которые находятся в предметной области. Все остальные имена обладают другим статусом существования. Понятие «концепт имени абстрактных предметов» В. В. Мадер раскрывает следующими положениями.

1. Абстрактный (математический) предмет существует только как элемент некоторой системы. Поэтому смысл имени абстрактного предмета сводится к пониманию роли этого предмета как элемента объемлющей системы. Другими словами, смысл математических понятий в их связях с другими понятиями некоторого целого (например, алгебраической системы). Например, концепт комплексных чисел определяется описанием поля комплексных чисел.

2. Смысл имени обеспечивает возможность его правильного употребления. В математике, по мнению В. В. Мадера, это происходит в теоретических выкладках дедуктивного характера. Мы добавим, что это обеспечение в математике гарантируется точностью математического языка. Например, можно сформулировать на естественном языке следующее определение подгруппы, порожденной множеством.

Пусть $\mathbf{G}$ – группа и $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{G}$. Подгруппой $\mathbf{H}$, порожденной множеством $\mathbf{M}$, называется наименьшая подгруппа группы $\mathbf{G}$, содержащая множество $\mathbf{M}$, т. е. с условием $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{H}$.

Языковое выражение «наименьшая подгруппа, содержащая множество», конечно, с математической точки зрения означает не наименьшее число элементов (подгруппа может быть бесконечного порядка), а только то, что «любая подгруппа, содержащая множество $\mathbf{M}$, содержит и множество $\mathbf{H}$». В математической символике это выражается наиболее точно, не позволяя двойственного толкования (особенно «начинающему» изучение математики):

$$(\forall \mathbf{T} \prec \mathbf{G})(\mathbf{M} \subseteq \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{H} \subseteq \mathbf{T})$$

(здесь запись $\mathbf{T} \prec \mathbf{G}$ означает «$\mathbf{T}$ является подгруппой группы $\mathbf{G}$»).

3. Смысл имени абстрактного предмета содержит возможность представления, позволяющего связать это имя с наглядным образом.

Последнее положение автор аргументирует фактами истории математики, когда долгое время отвергались некоторые понятия в связи с тем, что в свое время не был найден для них наглядный образ. Такой ситуацией, например, сопровождалось введение комплексных чисел.

В этом плане мы хотели бы уточнить точку зрения В. В. Мадера. Смысл не всех математических понятий, изучаемых в вузовском курсе, можно с легкостью наглядно иллюстрировать. Например, каким образом наглядно иллюстрировать смысл понятия кольца? Кольцо является множеством с двумя бинарными алгебраическими операциями на нем, для которых выполняется ряд требований (аксиом). Скорее всего, смысл имен математических объектов содержит возможность связать их с уже освоенными знаниями (иногда их называют фоновыми знаниями), отраженными (сформированными) в сознании понятиями, закрепленными личностным опытом студента. Последние знания в своей совокупности мы называем *интуитивным арсеналом.*

Исходя из высказанных соображений, третье положение применительно к концепту абстрактных предметов целесообразно принять в следующей трактовке.

3*. Смысл имени абстрактного предмета содержит возможность представления, позволяющего связать это имя с освоенными знаниями (интуитивным арсеналом).

Предыдущие три положения, характеризующие смысл имен абстрактных объектов, относятся к объектам, которые имеют предметную природу. «Непредметная» природа объектов в математике тоже проявляется, это выражается в виде свойств, отношений, функций и др. В. В. Мадер отмечает сложность описания концепта для таких математических объектов, поскольку денотат может быть истолкован различными способами. В своих рассуждениях он приходит к выводу (и мы с ним согласны), что в теоретических построениях не возникает надобности обращаться к денотату таких имен, такие понятия определяются исключительно концептом, а «денотат — это просто “нечто”, соответствующее концепту» [7, с. 105].

Таким образом, взаимосвязь денотата и концепта математического понятия двусторонняя (рис.): концепт характеризует денотат (с помощью свойств предмета, его связей, интуитивных представлений и т. д.); денотат, в свою очередь, является «воплощением» смысла, опредмеченным смыслом.

Из семантической трактовки понятия смысла вытекают следующие выводы, полезные для построения методики обучения математике.

1. Для *использования* математических понятий бóльшую важность имеет содержательное значение имен объектов (смысл, концепт), чем их предметные значения (денотат). Назовем этот вывод принципом *доминирования концепта* (смысла).

2. Смысл математических понятий содержится во взаимосвязях этого понятия в системе математического знания, как объективного, так и субъективного (интуитивного арсенала).

Во всяком математическом понятии как форме мышления выделяется его *содержание* и *объем.* В содержание понятия включается множество существенных признаков данного понятия, в объем — множество объектов, к которым применимо данное понятие. Термин как языковое выражение понятия в семантическом плане характеризует «имя предмета». Тогда объем понятия отражает денотат имени (термина), содержание понятия — концепт имени (термина). Поэтому можно сказать, что денотат понятия «отражает» его объем, а концепт понятия — его содержание. Именно «отражают», а не «являются». Например, в объем понятия «знак подстановки степени n» входят два числа: 1 и –1. Денотат имени (термина) обозначает предмет, который заименовывается. Именем «знак подстановки» заименовывается не множество $\{1, -1\}$, а связь (в данном случае, функциональная) между подстановками и множеством $\{1, -1\}$. В содержание понятия «знак подстановки» входят его существенные свойства, которые фиксируются определением и теоремами. К ним относятся: способ вычисления знака подстановки (по формулам, с помощью графов и пр.), свойство мультипликативности и т. д. Концепт же понятия «знак подстановки» как элемент *системы*, помимо его свойств, включает связи между этими свойствами. То есть он отвечает на вопросы «почему так», «как можно иначе», «что лежит в основе свойства» и т. д. Иначе говоря, объем понятия и его содержание фиксирует («материализует») связи понятия (между объектами, к которым применимо понятие, между его характеристическими признаками). Денотат и концепт отражают процесс этой фиксации («материализации») и его результат.

Таким образом, содержательные связи понятий отражают процессуальную сторону отношения между объемом и содержанием понятий.

В вузовском обучении математике обычно понятия рассматриваются по объему и содержанию: приводятся примеры понятий, изучаются (доказываются и «применяются» при решении задач) свойства понятия. То есть изучаются фиксированные свойства, а не сам процесс такой фиксации. Если обучение нацелено на понимание (а понимание — это, прежде всего, установление связей), то понятия целесообразно рассматривать по их концепту и денотату, т. е. с точки зрения смысла.

Связь является отношением взаимной зависимости, взаимной обусловленности, а значит, в основе любой связи есть некоторая основа, позволяющая это отношение установить. Поскольку материал математики составляют абстракции различного рода (отождествления, идеализации, осуществимости и т. д.) [8], то основу математических взаимосвязей — специфические идеи (идеи математики) и действия, которые повлекли за собой возникновение этих абстракций. Характеристика идей математики, составляющих основу математических абстракций, дана в работах Е. М. Вечтомова [9]: координатизация (термин Г. Вейля [10]), изморфность, факторизация, идеи двойственности, предельного перехода, непрерывности, упорядоченности и др. Заметим, что между идеями математики порой трудно провести четкое разграничение. Так, координатизация по сути задает предметность рассматриваемых понятий, т. е. опредмечивает объем понятия. А изоморфность теорий позволяет применить формализацию. Поскольку основные идеи лежат в основе установления взаимосвязей в математическом материале, то организация обучения, нацеленного на понимание, должна их учитывать.

Таким образом, с семантической точки зрения организация обучения математике, нацеленного на понимание, должна быть ориентирована на установление содержательных связей в учебном материале. Содержательные связи в математическом материале (тексте) имеют двунаправленный характер: от смысла термина к его значению и обратно. Процесс установления содержательных связей позволяет «построить» знание, вскрыть идею изучаемого математического понятия.

Список источников

1. **Библер В. С.** От наукоучения – к логике культуры: Два философских введения в двадцать первый век [Электронный ресурс]. URL: https://platona.net/load/knigi_po_filosofii/kulturologija/bibler_v_s_ot_naukouchenija_k_logike_kultury_dva_filosofskikh_vvedenija_v_dvadcat_pervyj_vek/16-1-0-1042 (дата обращения: 28.11.2023).

2. **Доблаев В. П.** Смысловая структура учебного текста и проблемы его понимания. М.: Педагогика, 1982. 176 с.

3. **Рузавин Г. И.** Понимание как комплексная методологическая проблема // *Проблемы объяснения и понимания в научном познании : сб. ст.* / АН СССР, Ин-т философии; отв. ред. Г. И. Рузавин. М.: Б. и., 1982. С. 1–23.

4. **Зинченко В. П.** Психологические основы педагогики. М.: Гардарики, 2002. 431 с.

5. **Фреге Г.** Смысл и значение [Электронный ресурс]. URL: https://kant.narod.ru/frege1.htm (дата обращения: 12.11.2023).

6. **Черч А.** Введение в математическую логику. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 485 с.

7. **Мадер В. В.** Введение в методологию математики [Электронный ресурс]. URL: https://fileskachat.com/view/42260_f37ce0eec2526c065cec09140f140be3.html (дата обращения: 03.10.2023).

8. **Шафаревич И. Р.** Основные понятия алгебры. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. 348 с.

9. **Вечтомов Е. М.** Метафизика математики. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. 508 с.

10. **Вейль Г.** Математическое мышление. М.: Наука, 1989. 400 с.

References

1. **Bibler V. S.** *Ot naukoucheniya – k logike kul'tury: Dva filosofskikh vvedeniya v dvadtsat' pervyy vek* [From science studies to the logic of culture: Two philosophical introductions to the twenty-first century] [Electronic resource]. Available at: https://platona.net/load/knigi_po_filosofii/kulturologija/bibler_v_s_ot_naukouchenija_k_logike_kultury_ dva_filosofskikh _vvedenija_v_dvadcat_pervyj_vek/16-1-0-1042 (accessed: 28.11.2023). (In Russ.)

2. **Doblaev V. P.** *Smyslovaya struktura uchebnogo teksta i problemy ego ponimaniya* [The semantic structure of the educational text and the problems of its understanding]. Moscow: Pedagogy, 1982. 176 p. (In Russ.)

3. **Ruzavin G. I.** Understanding as a complex methodological problem. *Problemy ob"yasneniya i ponimaniya v nauchnom poznanii : sb. st.* [Problems of explanation and understanding in scientific cognition : digest of articles]. USSR Academy of Sciences, Institute of Philosophy;

answer ed. G. I. Ruzavin. Moscow: Institute of Philosophy, 1982. Pp. 1–23. (In Russ.)

4. **Zinchenko V. P.** *Psihologicheskie osnovy pedagogiki* [Psychological foundations of pedagogy]. Moscow: Gardariki, 2002. 431 p. (In Russ.)

5. **Frege G.** *Smysl i znacheniye* [Meaning and significance] [Electronic resource]. Available at: https://kant.narod.ru/frege1.htm (accessed: 12.11.2023) (In Russ.)

6. **Cherch A.** *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to Mathematical Logic]. Moscow: Izdvo foreign. lit., 1960. 485 p. (In Russ.)

7. **Mader V. V.** *Vvedeniye v metodologiyu matematiki* [Introduction to the methodology of mathematics] [Electronic resource]. Available at: https://fileskachat.com/view/42260_f37ce0eec2526c065cec09140f140be3.html (accessed: 03.10.2023) (In Russ.)

8. **Shafarevich I. R.** *Osnovnye ponyatiya algebry* [Basic concepts of algebra]. Izhevsk: Izhevsk Republican Printing House, 1999. 348 p. (In Russ.)

9. **Vechtomov E. M.** *Metafizika matematiki* [Metaphysics of Mathematics]. Kirov: Izd-v VyatGGU, 2006. 508 p. (In Russ.)

10. **Vejl' G.** *Matematicheskoe myshlenie* [Mathematical thinking]. Moscow: Nauka, 1989. 400 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Сотникова Ольга Александровна / Olga A. Sotnikova
д.пед.н., доцент, ректор СГУ им. Питирима Сорокина /
PhD (Pedagogics), Associate Professor, Rector of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 28.11.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 05.12.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 07.12.2023