

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.

Выпуск 4 (49)

Bulletin of Syktuykar University.

Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)

Научная статья

УДК 51-72, 531.01, 539.1.01, 514.84

https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_4

**НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ УГЛОВ ВЫЛЕТА
ЧАСТИЦ, РОЖДЁННЫХ В РЕАКЦИЯХ РАСПАДА,
В РЕЛЯТИВИСТСКОМ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ
СЛУЧАЯХ**

Павел Андреевич Макаров

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
makarovpa@ipm.komisc.ru

Аннотация. На основе кинематического подхода изучены некоторые особенности углов вылета дочерних частиц, рождённых в процессах распада. Сформулированы и доказаны утверждение и теоремы, описывающие кинематику реакций распада в нерелятивистском и релятивистском случаях. Получены и проанализированы следствия, позволяющие определять максимальные углы вылета рождённых частиц. Установлена связь между углами вылета частиц в системе центра инерции и соответствующими им углами, регистрируемыми в лабораторной системе координат. Показано, что характер этой связи существенно зависит не только от отношения скоростей материнских и дочерних частиц, но и от их абсолютных значений.

Ключевые слова: распад, кинематика, законы сохранения, углы вылета, преобразования Лоренца

Для цитирования: Макаров П. А. Некоторые особенности углов вылета частиц, рождённых в реакциях распада, в релятивистском и нерелятивистском случаях // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*. 2023. Вып. 4 (49). С. 4–28. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_4

Article

Some features of production angles of particles born in decay reactions in relativistic and nonrelativistic cases

Pavel A. Makarov

Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, makarovpa@ipm.komisc.ru

Abstract. On the basis of kinematic approach some features of production angles of particles born in decay processes are studied. Statement and theorems describing the kinematics of decay reactions in the nonrelativistic and relativistic cases are formulated and proved. Corollaries allowing to determine the maximum of production angles of born particles are obtained and analyzed. The relation between the production angles of particles in the center-of-momentum frame and the corresponding angles registered in the laboratory frame is established. It is shown that the nature of this relation depends essentially not only on the ratio of the velocities of particles, but also on absolute values of velocities.

Keywords: decay, kinematics, conservation laws, production angles, Lorentz transformations

For citation: Makarov P. A. Some features of production angles of particles born in decay reactions in relativistic and nonrelativistic cases. *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 4–28. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_4

1. Введение

Определение 1. Под термином *распад* в рамках данной работы будем понимать *процесс спонтанного превращения исходного ядра или частицы (называемых родительскими или материнскими)*

в несколько продуктов распада (порождённые или дочерние частицы).

Процесс распада хорошо известен на протяжении уже более ста лет, в течение которых его исследование было широко связано с изучением явления радиоактивности [1; 2]. Несмотря на такую существенную продолжительность, данные исследования не потеряли своей актуальности по сей день и продолжают приводить к новым открытиям. Так, например, в 1981 году была открыта протонная [3], а в 2002 году и двухпротонная [4; 5] радиоактивность — явления спонтанного испускания ядрами протонов. Кроме того, в 1984 году Г. Роуз, Г. Джонс [6] и независимо от них Д. Александров [7] впервые обнаружили кластерную радиоактивность — явление самопроизвольного испускания ядрами фрагментов тяжелее, чем α -частица. Примером такого процесса является распад



Указанные факты свидетельствуют о том, что радиоактивный распад является важнейшим процессом, позволяющим определить строение ядра, а также его основные физические характеристики и свойства. Это положение остаётся актуальным и по сей день, поскольку не прекращаются исследования в области синтеза новых тяжёлых элементов [8].

Более того, процессы распада (понимаемого в широком смысле) характерны не только для ядерной физики, но и для физики частиц [9], поскольку различные превращения частиц друг в друга являются неотъемлемой частью их «жизненного цикла». Так, подавляющая часть известных в настоящее время частиц нестабильны и имеют малое время жизни [10]. В процессе распада тяжелых частиц образуется несколько частиц сравнительно меньшей массы.

Распады частиц, как и все физические явления, подчиняются фундаментальным законам сохранения энергии и импульса. Если в природе имеются неизвестные на текущий момент частицы, то с помощью данных законов их существование можно обнаружить по отклонениям параметров распада от предсказаний принятой в настоящее время теории.

Пример 1 (Распады бозона Хиггса). *Примером, хорошо иллюстрирующим последнее утверждение, является экспериментальное открытие в 2012 году бозона Хиггса, которое было осуществлено именно*

благодаря анализу мод его распада [12; 13]. В 2023 году коллаборации CMS и ATLAS на коллайдере LHC в ЦЕРНе сообщили об обнаружении следов редкого распада бозона Хиггса на Z-бозон и фотон [14; 15]

$$H \rightarrow Z + \gamma. \quad (2)$$

В силу указанных выше причин, изучение процессов распада, проводимое уже свыше ста лет, до сих пор остается актуальным. При этом исследование распада можно проводить на разном уровне детализации теории и эксперимента, привлекая аппарат различных разделов математики и физики. Самым базовым уровнем здесь является аппарат классической механики. Ограничиваясь только им, можно с определённым успехом описывать некоторые свойства распада, однако совершенно очевидно, что полной картины явления классическое описание не даёт. Для более аккуратного исследования процессов, протекающих при высоких энергиях, необходимо привлекать аппарат специальной теории относительности, но и это, вообще говоря, не является достаточным. Более глубокую картину явления можно получить, опираясь на квантовую теорию.

В то же время оказывается, что при анализе результатов эксперимента с абсолютной уверенностью можно использовать кинематические соотношения без привлечения квантовой теории. Они позволяют идентифицировать тип реакции и природу отдельных её продуктов, установить связь между углами вылета и энергиями различных вторичных частиц или между углами вылета и энергией одной и той же вторичной частицы, определить разрешенные области энергий и углов, в которых следует ожидать появления той или иной вторичной частицы, найти энергетические пороги реакций и т. д. [11]. Особенно отчётливо это проявляется в том случае, когда в конечном состоянии наблюдаются только две частицы. При этом существует вполне определенная связь между углами вылета частиц и энергией. Кроме того, на практике часто возникает необходимость пересчитывать характеристики частиц и реакций между разными системами отсчёта, что также подчёркивает необходимость исследования кинематических характеристик распада.

Проведённый выше анализ показывает, что кинематика процессов распада является достаточно актуальной и важной задачей, так как анализ и обработка информации о различных распадах вносит большой вклад в развитие современных теорий, способствуя поиску неизвестных

частиц, определению их свойств и, как следствие, уточнению и дополнению существующих моделей и формированию физики за пределами стандартной модели.

Избранной тематике посвящена достаточно обширная учебная и научная литература. В то же время анализ источников показывает, что подробное исследование углов вылета частиц, рождённых в реакциях распада, проведённое на основе сравнения результатов расчёта в релятивистском и нерелятивистском предельных случаях, может представлять некоторый самостоятельный интерес.

Таким образом, целью настоящей работы является кинематическое исследование закономерностей направления вылета нерелятивистских и релятивистских дочерних частиц, рождённых в процессе распада.

2. Основные соглашения и обозначения

Рассматривается самопроизвольный распад родительской частицы с образованием только двух порождённых частиц, протекающий по схеме:

$$a_0 \rightarrow a_1 + a_2, \quad (3)$$

где a_i — символ той или иной i -й частицы.

Потенциальную энергию частиц во внешних силовых полях отдельно учитывать не будем, поскольку законы сохранения в процессе (3) будут записываться непосредственно для момента самого распада. Таким образом, полная энергия i -й частицы E_i определяется только суммой её внутренней W_i и кинетической T_i энергий:

$$E_i = W_i + T_i. \quad (4)$$

Для анализа процессов распада в данной работе равноправно используются две системы отсчёта:

- система центра инерции (обозначаемая в дальнейшем как u -система);
- система отсчёта, связанная с лабораторией (l -система).

В l -системе скалярные величины (такие, как масса m , время жизни τ , полярный угол θ и т. п.) записываются светлым курсивом, трёхмерные векторы — полужирным шрифтом. В u -системе используются такие же обозначения, как в l -системе, снабжённые «звёздочкой» (исключением здесь, в силу её инвариантности, является масса частицы, для которой сохраняется обозначение «без звёздочки»).

Пример 2. Так, E и \mathbf{p} — это энергия и импульс частицы в l -системе, а E^* и \mathbf{p}^* — её же энергия и импульс в ζ -системе.

В основном используется стандартная в квантовой теории поля и физике частиц система единиц $c = 1$ [9; 16; 17].

3. Основные теоремы

3.1. Нерелятивистский случай

В ζ -системе закон сохранения энергии [18] для реакции (3) даёт

$$W_0^* = E_1^* + E_2^*. \quad (5)$$

В связи с тем что $E_i^* > m_i$, $i = 1, 2$, равенство (5) может выполняться, только если суммарная масса продуктов распада $m_1 + m_2 < W_0^*$. В обратном случае (если $m_1 + m_2 \geq W_0^*$) исходная частица оказывается устойчивой по отношению к такому распаду, поэтому для его осуществления материнской частице необходимо сообщить энергию, которая должна быть не меньше энергии связи распадающегося тела по абсолютной величине.

В силу закона сохранения импульса сумма импульсов двух распадных частиц в ζ -системе равна нулю. При этом сами распадные частицы разлетаются с равными по модулю и противоположно направленными импульсами

$$p_1^* = m_1 v_1^* = p_2^* = m_2 v_2^* = p^*, \quad (6)$$

где p^* — абсолютное значение импульсов продуктов распада, а v_i^* , $i = 1, 2$ — их скорости.

Законы (5) и (6) позволяют определить все механические характеристики продуктов распада [11; 16; 18]. Не останавливаясь подробно на полном анализе данных соотношений, обсудим только один вопрос, имеющий отношение к последующему изложению. А именно проанализируем возможные углы вылета θ одной из распадных частиц относительно направления скорости первоначальной частицы.

Утверждение 1. Пусть в l -системе материнская частица движется со скоростью \mathbf{v}_0 . В этой же системе исследуемая дочерняя частица движется со скоростью \mathbf{v}_1 , а в ζ -системе ей соответствует скорость \mathbf{v}_1^* . Тогда зависимость скорости дочерней частицы от направления её вылета в l -системе определяется согласно уравнению

$$v_0^2 + v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos \theta = (v_1^*)^2. \quad (7)$$

Доказательство. Результат (7) непосредственно следует из теоремы о сложении скоростей $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^*$ [16; 18] и хорошо известной теоремы косинусов. \square

Зависимость (7) может быть представлена графически с помощью диаграмм скоростей, приведённых на рис. 1. На данных диаграммах изображены «треугольники скоростей», построенные на векторах \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1^* и \mathbf{v}_1 . При этом вектор скорости материнской частицы \mathbf{v}_0 в l -системе выбран направленным вправо, так что его начало соответствует точке A , а конец — точке O . Вектор \mathbf{v}_1^* есть собственная скорость дочерней частицы, т. е. её скорость в u -системе. Соответственно этому начало вектора \mathbf{v}_1^* помещено в точку O , которая, таким образом, согласно нашему соглашению о векторе \mathbf{v}_0 , действительно является началом отсчёта u -системы.

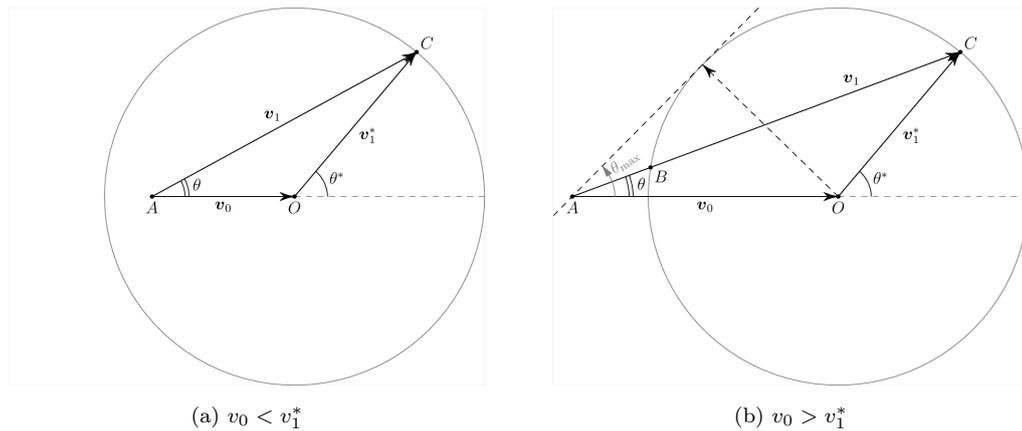


Рис. 1. Диаграммы скоростей для распада нерелятивистской частицы

Иллюстрацией того, что направление вылета дочерней частицы в u -системе ничем не ограничено и может быть произвольным, на рис. 1 являются окружности с центром в точке O и радиусом v_1^* . Таким образом, данные окружности представляют собой геометрическое место точек, соответствующих концам C всех возможных векторов \mathbf{v}_1^* .

Из всего изложенного выше следует, что в l -системе дочерней частице отвечает скорость \mathbf{v}_1 , представляющая собой вектор, проведённый из точки A в точку C . На рис. 1 отмечены углы вылета дочерней частицы θ и θ^* (в l - и u -системах соответственно), определённые по отношению к направлению скорости \mathbf{v}_0 материнской частицы в l -системе. Анализ этих углов (см. подробности далее в следствии 1) показывает,

что изотропия направлений вылета дочерних частиц, наблюдаемая в l -системе, присутствует только в случае $v_0 < v_1^*$ (при этом точка A лежит внутри области, ограничиваемой окружностью, образованной точками C).

Следствие 1. Утверждение 1 приводит к возможности реализации двух ситуаций.

1. Скорость материнской частицы меньше собственной скорости дочерней частицы $v_0 < v_1^*$ (см. рис. 1а). В этом случае дочерняя частица может вылететь под любым углом $\theta \in [0, 2\pi]$.
2. Скорость первичной частицы больше собственной скорости вторичной частицы $v_0 > v_1^*$ (см. рис. 1б). При этом из рис. 1б видно, что независимо от угла θ^* частица в l -системе может вылететь только вперед, под углом $\theta \in [0, \theta_{max}]$, где максимальный угол θ_{max} определяется равенством

$$\sin \theta_{max} = \frac{v_1^*}{v_0}. \quad (8)$$

Доказательство. Очевидно из анализа рис. 1. □

Следствие 2. Связь между углами вылета дочерней частицы θ и θ^* в l - и ζ -системах может быть записана в виде

$$\cos \theta^* = -\frac{v_0}{v_1^*} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_1^*}\right)^2 \sin^2 \theta}. \quad (9)$$

Доказательство. Непосредственно из рис. 1 вытекает равенство

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_1^* \sin \theta^*}{v_1^* \cos \theta^* + v_0}. \quad (10)$$

Возводя последнее выражение в квадрат и используя основное тригонометрическое тождество, легко получить

$$(v_1^* \cos \theta^* + v_0)^2 = (v_1^*)^2 (1 - \cos^2 \theta^*) \operatorname{ctg}^2 \theta. \quad (11)$$

Раскрывая здесь квадрат суммы, деля почленно на $(v_1^*)^2$ и перегруппировывая слагаемые, приходим к равенству

$$(1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \cos^2 \theta^* + 2 \frac{v_0}{v_1^*} \cos \theta^* + \left(\frac{v_0}{v_1^*}\right)^2 - \operatorname{ctg}^2 \theta = 0. \quad (12)$$

Последнее, как несложно видеть, есть квадратное уравнение относительно $\cos \theta^*$, корнями которого и является выражение (9). \square

Замечание 1. Как видно из рис. 1а, для случая $v_1^* > v_0$ связь между θ^* и θ однозначна. При этом в (9) необходимо выбирать знак «+» перед корнем. Если $v_1^* < v_0$, то связь между θ^* и θ неоднозначна: каждому значению θ отвечают два значения θ^* (векторам \mathbf{v}^* , проведённым на рис. 1b из центра окружности в точки В или С, отвечают два знака « \pm » перед корнем в уравнении (9)).

Сформулированные и доказанные следствия утверждения 1 проиллюстрированы на рис. 2 и 3.

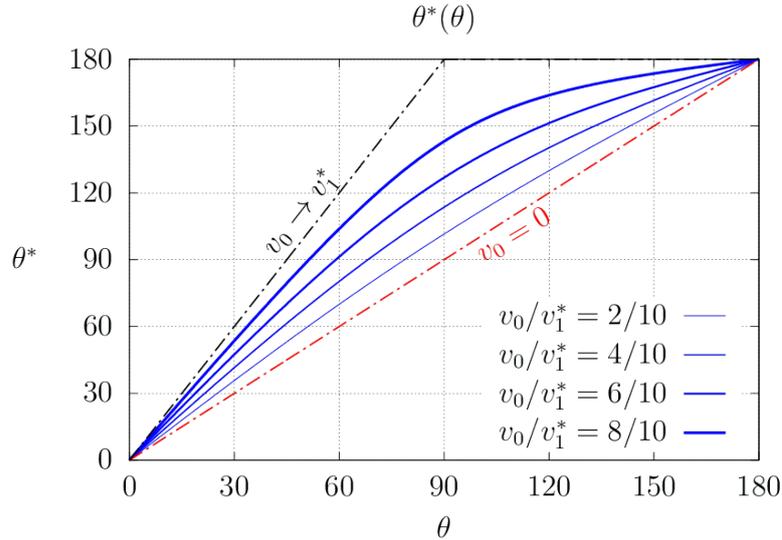


Рис. 2. Связь между θ^* и θ в случае $v_0 < v_1^*$

Как видно из рис. 2, в полном соответствии с результатами следствия 1, в случае $v_0 < v_1^*$ отсутствует ограничение на максимальный угол вылета дочерней частицы. Кроме того, для данной ситуации можно заметить, что зависимость $\theta^* = \theta^*(\theta)$, определяемая соотношением (9), в случае сравнительно медленной материнской частицы хорошо приближается линейной функцией (кривая, изображенная самой тонкой линией). В противоположность этому для более быстрых материнских частиц связь углов θ^* и θ существенно нелинейная (см. на кривую, показанную самой толстой линией). Для последнего случая также

можно утверждать, что в ζ -системе дочерние частицы преимущественно вылетают «назад» (т. е. в область углов $\theta^* > 90^\circ$), при том что в \mathcal{L} -системе их регистрация может происходить в достаточно широком интервале углов $\Delta\theta > 90^\circ$, захватывающем область острых углов $\theta < 90^\circ$ тем больше, чем ближе отношение v_0/v_1^* к единице.

Дополнительно, на рис. 2 штрих-пунктирными линиями показаны предельные случаи зависимости $\theta^*(\theta)$ в случае покоящейся материнской частицы ($v_0 = 0$) и материнской частицы, движущейся со скоростью, чуть меньшей собственной скорости дочерней частицы ($v_0 \rightarrow v_1^*$).

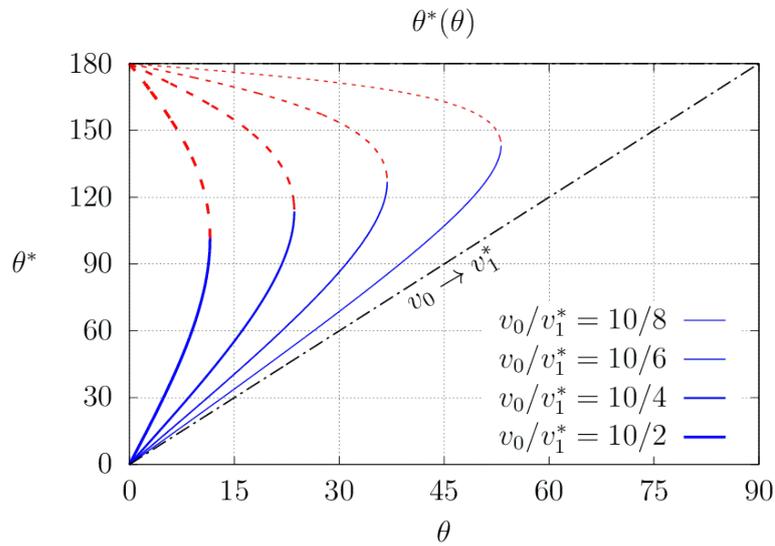


Рис. 3. Связь между θ^* и θ в случае $v_0 > v_1^*$

Рис. 3 подтверждает результат следствия 1 о том, что для случая $v_0 > v_1^*$ в \mathcal{L} -системе имеется максимальный угол θ_{\max} вылета дочерней частицы. Другими словами, в этой ситуации продукты распада в \mathcal{L} -системе всегда наблюдаются вылетающими «вперёд». Дополнительно из рис. 3 видно, что θ_{\max} увеличивается с ростом собственной скорости дочерней частицы v_1^* . На рис. 3 показаны оба результата (9) следствия 2. Знаку «+» при этом соответствует сплошная кривая, знаку «-» — пунктирная линия.

Кроме всего отмеченного выше, совместный анализ рис. 2 и 3 позволяет сделать ещё один вывод.

Следствие 3. *Каковым бы ни был наблюдаемый в \mathcal{L} -системе угол вылета θ вторичной частицы, в ζ -системе ему могут соответство-*

вать только значения $\theta^* \geq \theta$ (причём равенство имеет место только в тривиальном случае, когда распадается покоящаяся частица, а значит l -, ζ -системы совпадают), но не $\theta^* < \theta$.

Доказательство. Очевидно из рис. 2 и 3. □

3.2. Релятивистский случай

Как известно [16], объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется принципом относительности Эйнштейна. Основанная на последнем механика называется релятивистской.

Как известно, закон сложения скоростей в той форме, на которой базировалось утверждение 1 в релятивистском случае, утрачивает свою справедливость. Кроме того, более фундаментальный смысл для анализа процессов распада приобретают такие физические величины, как импульс \mathbf{p} и энергия E (но не скорость \mathbf{v}), релятивистские выражения для которых выглядят следующим образом [16]:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (13)$$

Когда скорость частицы приближается к скорости света $v \approx 1$, её импульс и энергия неограниченно растут. При этом в реальности они всегда остаются конечными, поэтому частица, обладающая ненулевой массой $m \neq 0$, никогда не сможет двигаться со скоростью света $v \neq 1$, хотя её можно разогнать до скорости, сколь угодно к ней близкой [16].

В разных инерциальных системах отчёта значения энергии и импульса одной и той же частицы будут различными. Однако они связаны между собой соотношением, которое следует из выражений для энергии и импульса (13):

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (14)$$

Поскольку масса — это константа, характеризующая данную конкретную частицу, то из (14) очевидно, что разность $E^2 - p^2$ есть релятивистский инвариант [16].

Запишем для реакции распада (3), протекающей с участием релятивистских частиц, законы сохранения импульса и энергии в l -системе S :

$$\mathbf{p}_0 = \frac{m_0\mathbf{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (15)$$

$$E_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} = E_1 + E_2. \quad (16)$$

Здесь v_0 — скорость распадающейся первичной частицы, которая эквивалентна скорости движения центра масс вторичных частиц 1 и 2 относительно системы S . Величину m_0 обычно трактуют как инвариантную массу (см. ниже определение 2) пары дочерних частиц, равную их суммарной энергии $E_1^* + E_2^*$ в u -системе.

Как уже отмечалось ранее, бóльшая часть известных частиц нестабильны — они живут короткое время, после чего самопроизвольно распадаются на другие частицы. В любом таком процессе выполняются релятивистские законы сохранения энергии (16) и импульса (15). При этом так как время жизни нестабильных частиц обычно мало и, как правило, заключено в интервале $\tau \in [10^{-23}, 10^{-13}]$ с, то обнаружить след распавшейся частицы с помощью обычной фотосъёмки представляется крайне затруднительным, если вообще возможным. Поэтому ключевую роль для детектирования процессов рождения и распада короткоживущих частиц играет формула (14).

Согласно общепринятому подходу, для этого измеряют энергию E_0 искомой частицы — для этого можно, пользуясь законом сохранения энергии (16), просуммировать энергии частиц, являющихся продуктами распада. Аналогично, используя закон сохранения импульса (15), измеряют импульс \mathbf{p}_0 , сложив импульсы всех продуктов распада.

После этого остаётся только воспользоваться формулой (14) [9–11]. Если для большого числа экспериментальных данных значения $\sum_i E_i^2 - p_i^2$ скапливаются около определенной величины m_0^2 , то можно предположить, что в данной реакции действительно рождалась частица массы m_0 с малым временем жизни, часто называемая резонансом. Если же разброс значений $\sum_i E_i^2 - p_i^2$ в изучаемой серии экспериментов велик, то почти наверняка происхождение наблюдаемых частиц не связано с распадом недолго живущих материнских частиц.

В связи с этим важнейшую роль в анализе событий распада частиц играет следующее определение.

Определение 2. Пусть продуктами распада (3) некой материнской частицы a_0 являются дочерние частицы a_i с зарегистрированными импульсами \mathbf{p}_i и энергиями E_i . Тогда инвариантной массой m_{inv} дан-

ного процесса называют величину

$$m_{inv} = \sqrt{\sum_{i=1} E_i^2 - \sum_{i=1} \mathbf{p}_i^2}. \quad (17)$$

Обратимся теперь к релятивистскому обобщению результатов раздела 3.1, посвящённых связи между углами вылета дочерних частиц и их энергиями по отношению к направлению скорости \mathbf{v}_0 материнской частицы.

Теорема 1. Пусть E_1^* — это энергия одной из дочерних частиц в \mathcal{C} -системе, а E_1 и θ — её энергия и угол вылета (по отношению к \mathbf{v}_0) в \mathcal{L} -системе. Тогда направление вылета θ искомой частицы определяется согласно уравнению

$$\cos \theta = \frac{E_1 - E_1^* \sqrt{1 - v_0^2}}{v_0 \sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \quad (18)$$

Доказательство. Запишем формулы преобразования Лоренца [16] для рассматриваемой частицы при переходе от \mathcal{C} - к \mathcal{L} -системе S :

$$E_1 = \frac{E_1^* + v_0 p_{1x}^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1x} = \frac{p_{1x}^* + v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1y} = p_{1y}^*, \quad p_{1z} = p_{1z}^*. \quad (19)$$

В записи (19) предполагается, что система S выбрана так, что $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{e}_x$. Это несколько не умаляет общности доказательства, поскольку конкретный выбор инерциальных систем координат, для которых справедливы преобразования Лоренца, произволен [16].

Путём несложных преобразований выразим E_1^* из (19):

$$E_1^* = \frac{E_1 - v_0 p_1 \cos \theta}{\sqrt{1 - v_0^2}}. \quad (20)$$

Подставляя в последнее равенство p_1 согласно (14) и выражая $\cos \theta$, приходим окончательно к (18), что и доказывает теорему. \square

Теорема 1 позволяет определить направление вылета дочерней частицы по значениям её энергии E_1^* и E_1 в \mathcal{C} - и \mathcal{L} -системах, которые предполагаются известными. На практике, однако, часто решается иная задача. А именно известными предполагаются величины \mathbf{v}_0 , E_1^* и θ ,

а энергия E_1 подвергается определению. Поставленную в такой форме задачу решает следующая теорема, являющаяся в некотором смысле обратной к теореме 1.

Теорема 2. Пусть для некой дочерней частицы известны её энергия E_1^* в \mathcal{C} -системе и угол вылета θ (по отношению к скорости \mathbf{v}_0 материнской частицы) в \mathcal{L} -системе. Тогда энергия E_1 данной дочерней частицы в \mathcal{L} -системе определяется согласно уравнению

$$(1 - v_0^2 \cos^2 \theta) E_1^2 - 2E_1^* \sqrt{1 - v_0^2} E_1 + (1 - v_0^2) (E_1^*)^2 + m_1^2 v_0^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (21)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно возвести в квадрат выражение (18), умножить результат на $v_0^2 (E_1^2 - m_1^2)$ и выделить в явном виде множители при разных степенях E_1 . \square

Уравнение (21) является квадратным относительно E_1 , что может быть объяснено графическим построением, представленным на рис. 4 (аналогичным рис. 1 для нерелятивистского случая). Для построения рис. 4 выполним следующее рассуждение.

Согласно формулам преобразования Лоренца (19), компонента импульса дочерней частицы в \mathcal{L} -системе выражается через величины, относящиеся к \mathcal{C} -системе, следующим образом:

$$p_{1x} = \frac{p_1^* \cos \theta^* + v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1y} = p_1^* \sin \theta^*. \quad (22)$$

Исключая из последней системы θ^* , легко получить

$$p_{1y}^2 + \left(p_{1x} \sqrt{1 - v_0^2} - v_0 E_1^* \right)^2 = (p_1^*)^2. \quad (23)$$

По отношению к переменным p_{1x} , p_{1y} выражение (23) представляет собой уравнение эллипса с полуосями $p_1^*/\sqrt{1 - v_0^2}$, p_1^* и центром (точка O на рис. 4), смещённым на расстояние $v_0 E_1^*/\sqrt{1 - v_0^2}$ от точки $\mathbf{p}_1 = 0$ (точка A на рис. 4).

Следствие 4. Таким образом, теоремы 1 и 2 приводят к возможности двух ситуаций:

1. Скорость материнской частицы меньше собственной скорости дочерней частицы $v_0 < p_1^*/E_1^* = v_1^*$ (см. рис. 4а). В этом случае дочерняя частица может вылететь под любым углом $\theta \in [0, 2\pi]$.

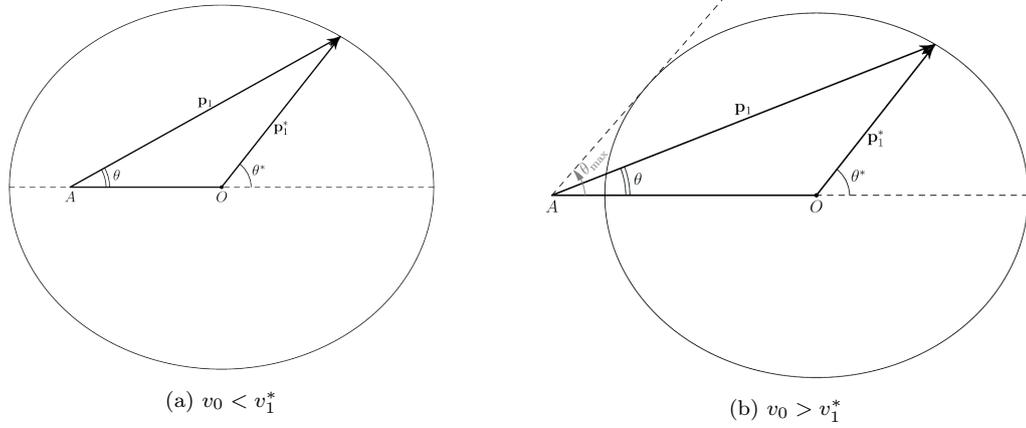


Рис. 4. Диаграммы импульсов для распада релятивистской частицы

2. Скорость материнской частицы больше собственной скорости дочерней частицы (т. е. $v_0 > v_1^*$). Тогда точка A на рис. 4b лежит вне эллипса и при известном угле θ вектор \mathbf{p}_1 (а вместе с ним и энергия E_1) может иметь два различных значения. В этом случае из рис. 4b видно, что независимо от угла θ^* частица в l -системе может вылететь только вперед, под углом $\theta \in [0, \theta_{max}]$, где максимальный угол θ_{max} определяется равенством

$$\sin \theta_{max} = \frac{p_1^* \sqrt{1 - v_0^2}}{m_1 v_0}. \quad (24)$$

Доказательство. Очевидно из построения рис. 4 и его анализа. Результат (24) получается из условия обращения в нуль дискриминанта квадратного уравнения (21), записанного с учётом (14). \square

Следствие 5. Связь между углами вылета дочерней частицы θ и θ^* в l - и u -системах в релятивистском случае имеет вид:

$$\cos \theta^* = -\frac{v_0}{v_1^* \sqrt{1 - v_0^2}} \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{(v_1^*)^2 (1 - v_0^2)} \sin^2 \theta}. \quad (25)$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству следствия 2 и может быть выполнено с помощью формальной замены

$$v_0 \rightarrow \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (26)$$

очевидной из геометрического построения на рис. 4, для которого, как нами ранее было показано,

$$AO = \frac{v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad (27)$$

что вместе с соотношением между импульсом, энергией и скоростью свободной релятивистской частицы $\mathbf{p} = E\mathbf{v}$ окончательно и приводит к результату (25). \square

4. Обсуждение

Направление вылета дочерней частицы в релятивистском случае, определяемое теоремами 1 и 2, более сложным образом зависит от соотношения собственной v_1^* и абсолютной v_1 скоростей рассматриваемой частицы, чем это было установлено нами в утверждении 1 для нерелятивистского случая. Это проявляется в том, что в релятивистском случае направление вылета дочерней частицы в l -системе существенным образом зависит не только от отношения v_0/v_1^* , но и непосредственно от самих скоростей частиц.

Для демонстрации отмеченного выше результата сравним сначала предсказания следствий 1 и 4. Результаты соответствующих расчётов, выполненных согласно (8) и (24), приведены на рис. 5.

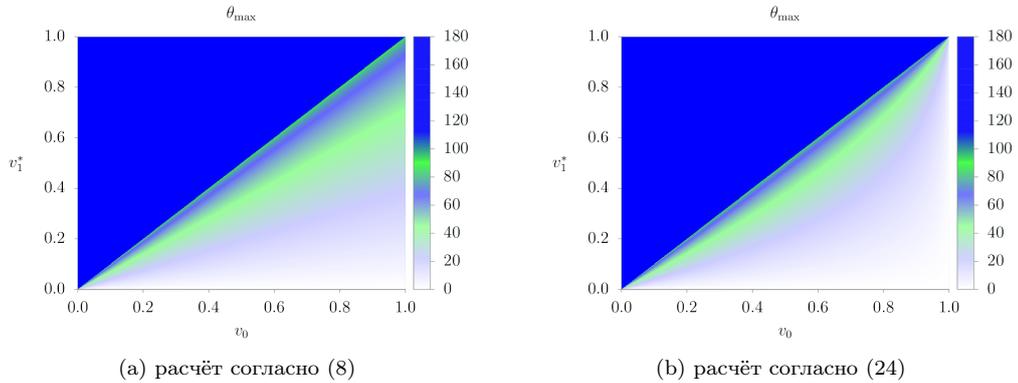


Рис. 5. θ_{\max} как функция v_0 и v_1^*

Как следует из рис. 5, результаты следствий 1 и 4 полностью совпадают в случае «дочерних частиц, более быстрых, чем материнские» ($v_1^* > v_0$). А именно такие дочерние частицы не имеют ограничений на максимальный угол вылета, наблюдаемый в l -системе θ_{\max} .

Замечание 2. Вместе с тем это не означает, что в l -системе при этом всегда наблюдается равномерное распределение углов вылета дочерних частиц. Последний факт может быть изучен подробно только в связи с анализом следствий 2 и 5, а потому будет рассмотрен нами позднее в связи с рис. 7.

В то же время рис. 5 отчётливо демонстрирует, что в случае «более медленных, чем материнские, дочерних частиц» ($v_1^* < v_0$) результаты следствий 1 и 4 существенно отличаются, причём это отличие тем сильнее, чем ближе скорости частиц к скорости света (напомним, что в избранной нами системе последняя принимается равной единице $c = 1$).

Это отличие состоит в том, что расчёт (24), выполненный на основе релятивистской теории, более значительно ограничивает θ_{\max} , чем предсказания (8) нерелятивистской теории. На рис. 5 это соответствует тому, что светлая область ($\theta_{\max} \leq 10^\circ$) имеет большую площадь на диаграмме 5b, чем на 5a.

Более наглядно эти особенности позволяет увидеть рис. 6, на котором приведены два семейства кривых $\theta_{\max}(v_0, v_1^*)$, построенные согласно следствиям 1 (штрих-пунктирные линии) и 4 (сплошные кривые) при двух значениях собственной скорости дочерней частицы. Из данного рисунка видно, что разница между предсказаниями θ_{\max} , полученными в рамках релятивистского и нерелятивистского расчётов, может быть очень значительной (например $\lesssim 30^\circ$ для случая $v_1^* = 0.5$).

В качестве основного вывода можно отметить, что θ_{\max} , предсказанный релятивистской теорией, не может превышать соответствующего угла, вычисленного в рамках нерелятивистского приближения. Другими словами, в случае $v_1^* < v_0$ более быстрые дочерние частицы наблюдаются в l -системе вылетающими в пределах сравнительно узкого конуса с углом раствора θ_{\max} вдоль направления скорости \mathbf{v}_0 материнской частицы.

Теперь обратимся к анализу и сопоставлению результатов следствий 2 и 5. Для этого обратимся, во-первых, к рис. 7, на котором представлено сравнение зависимостей (9) и (25) при $v_0/v_1^* = 8/10$ (это значение отношения скоростей материнской и дочерней частиц выбрано в связи с тем, что для него нерелятивистская зависимость $\theta^*(\theta)$, имеющая вид (9), носит наиболее ярко выраженный нелинейный характер).

Рис. 7 следует рассматривать в сравнении с рис. 2. Как уже было сказано нами ранее, в релятивистском случае связь углов вылета дочерней частицы в ψ - и l -системах определяется не только отношением

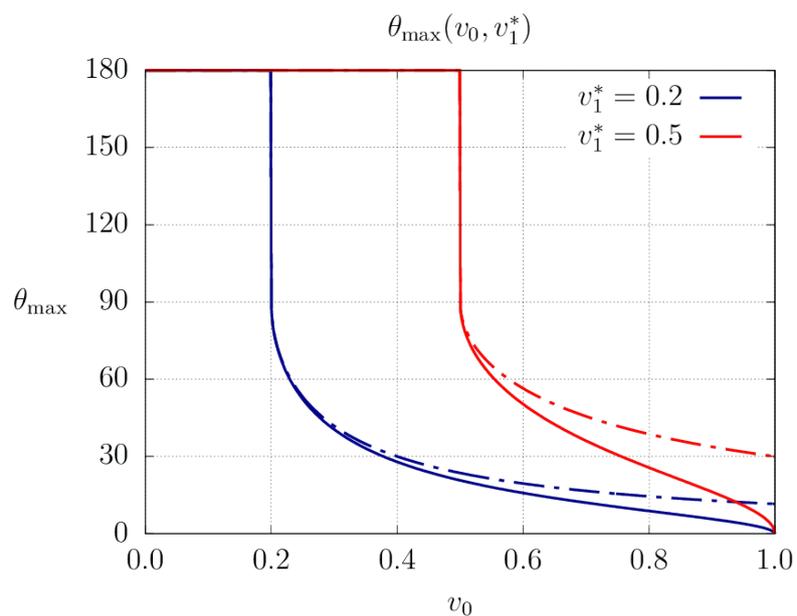


Рис. 6. Максимальный угол вылета дочерней частицы

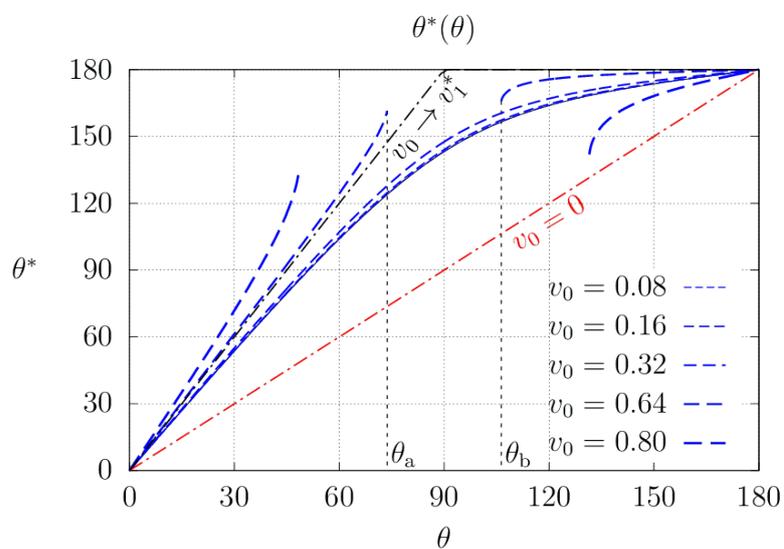


Рис. 7. Связь θ^* и θ в релятивистском случае при $v_0/v_1^* = 8/10$

скоростей дочерней и материнской частицы, но и абсолютным значением этих скоростей. Соответственно этому на рис. 7 изображено целое семейство кривых, демонстрирующих зависимость $\theta^*(\theta)$ при разных

значениях абсолютного значения скорости материнской частицы v_0 (а значит, и величинах собственной скорости дочерней частицы v_1^*) для фиксированного отношения v_0/v_1^* .

В качестве «опорной кривой» на рис. 7 самой тонкой сплошной линией изображена кривая зависимости $\theta^*(\theta)$, построенная согласно нерелятивистскому выражению (9). Заметим, что этой же кривой на рис. 2 соответствует самая толстая сплошная линия. Штрих-пунктирные линии на рис. 2 и 7 идентичны и ограничивают области «классически доступных» для наблюдения в \mathcal{L} -системе углов вылета θ дочерних частиц.

Основная содержательная часть рис. 7 представлена семейством из пяти штриховых линий разной толщины (толщина которых растёт с увеличением абсолютного значения скорости v_0), рассчитанных в соответствии с релятивистским выражением (25). Анализ этого семейства кривых позволяет сделать следующие выводы:

1. Следствия 2 и 5 дают абсолютно идентичные результаты только в малой области существенно нерелятивистских скоростей $v \lesssim 0.1$. Это подтверждается тем, что самая тонкая штриховая кривая рис. 7 «теряется на фоне сплошной линии» (неотличима от неё).
2. Далее, в области всё ещё сравнительно небольших скоростей $[0.1, v_{0c}]$ (см. штриховые линии на рис. 7, отвечающие скоростям $v_0 = 0.16$ и $v_0 = 0.32$) следствия 2 и 5 дают качественно совпадающие зависимости $\theta^*(\theta)$, несколько отличающиеся количественно. Это количественное отличие состоит в том, что релятивистский расчёт (25) приводит к несколько большим значениям углов θ^* в \mathcal{L} -системе, отвечающих данному углу θ в \mathcal{L} -системе, по сравнению с предсказаниями (9) нерелятивистской теории.
3. Начиная с некоторой критической скорости v_{0c} материнской частицы, предсказания следствий 2 и 5 отличаются уже существенно, причём не только количественно, но качественно. А именно релятивистский расчёт (25) даёт разрыв в зависимости $\theta^*(\theta)$, которая отчётливо разделяется на две ветви (см. штриховые линии на рис. 7, отвечающие скоростям $v_0 = 0.64$ и $v_0 = 0.8$), разделённые некоторым интервалом $[\theta_a, \theta_b]$ «запрещённых углов». «Запрещённость» этих углов следует понимать в том смысле, что в существенно релятивистской и ультрарелятивистской области скоростей дочерние частицы в \mathcal{L} -системе могут наблюдаться вылетевшими только в пределах конусов, направленных растворами «вперёд» и «назад» по скорости материнской частицы \mathbf{v}_0 . Имен-

но это обстоятельство и поясняет сделанное нами ранее замечание 2. Кроме того, следует отметить, что для дочерних частиц, вылетевших вперёд по отношению к направлению скорости материнской частицы (ветвь кривой $\theta^*(\theta)$, отвечающая интервалу углов $\theta < \theta_a$) область углов θ , доступных для наблюдения в l -системе, уже «классически доступной» области углов (ограничиваемой штрих-пунктирными линиями на рис. 7), а сами углы θ существенно меньше тех, которые предсказывает нерелятивистский расчёт (9).

Замечание 3. Величина критической скорости v_{0c} и отвечающий ей интервал «запрещённых углов» $[\theta_a, \theta_b]$ связаны неравенством

$$\frac{v_1^* \sqrt{1 - v_{0c}^2}}{v_{0c}} < \sin \theta_a, \quad (28)$$

вытекающим из условия отрицательности значений подкоренного выражения в (25). При этом очевидно, что $\theta_b = \pi - \theta_a$.

В завершение сравним выводы следствий 2 и 5 в случае $v_0/v_1^* = 10/8$. Кривые, определяемые при этом формулами (9) и (25), приведены на рис. 8. Соглашения, используемые при построении рис. 8, полностью аналогичны соглашениям рис. 7, за исключением того, что тонкая сплошная кривая рис. 8 соответствует самой тонкой кривой рис. 3.

В отличие от случая $v_0 < v_1^*$ рис. 8 демонстрирует, что характер зависимости $\theta^*(\theta)$ в случае $v_0 > v_1^*$, выполненный в рамках релятивистского расчёта (25), качественно не отличается от вычислений согласно (9) в нерелятивистском пределе. Наблюдаемые отличия имеют чисто количественный характер и преимущественно состоят в том, что с ростом абсолютных значений скорости частиц интервал $[0, \theta_{\max}]$ наблюдаемых в l -системе углов вылета дочерних частиц сокращается тем сильнее, чем выше скорость. Однако этот вывод уже был сделан нами ранее при анализе рис. 5 и 6, поэтому в таком виде не даёт ничего нового. Новым здесь является то, что формула (25) даёт существенно более точную связь между углами θ и θ^* , чем нерелятивистское выражение (25).

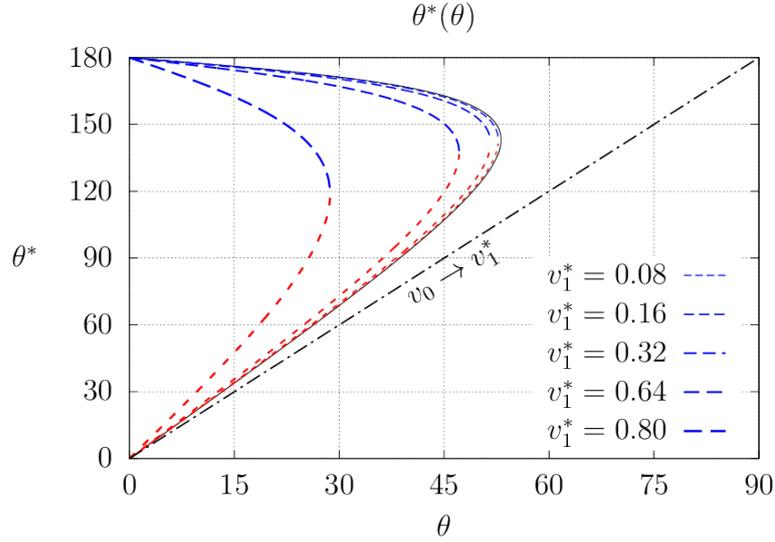


Рис. 8. Связь θ^* и θ в релятивистском случае при $v_0/v_1^* = 10/8$

5. Заключение

Таким образом, в данной работе на основе кинематического подхода изучены некоторые особенности углов вылета дочерних частиц, рождённых в процессах распада. Сформулированы и доказаны одно утверждение и две основные теоремы, описывающие кинематику реакций распада в нерелятивистском и релятивистском случаях. Получены и детально проанализированы пять следствий, позволяющие определять максимальные углы вылета рождённых частиц, наблюдаемые в l -системе. Установлена связь между углами вылета частиц в u -системе и соответствующими им углами, регистрируемыми в l -системе. Показано, что характер этой связи существенно зависит не только от отношения скоростей материнских и дочерних частиц, но и от их абсолютных значений.

В ходе анализа зависимостей $\theta^*(\theta)$ выяснено, что в случае $v_0 > v_1^*$ дочерние частицы в l -системе наблюдаются вылетевшими только в пределах узкого конуса с раствором, направленным по ходу движения материнской частицы. Этот результат имеет место и в релятивистском, и в нерелятивистском подходе, однако релятивистская теория уточняет его, существенно сокращая область наблюдаемых углов раствора данных конусов.

Кроме того, установлено, что в существенно релятивистской и ультрарелятивистской областях дочерние частицы в \mathcal{L} -системе в случае $v_0 < v_1^*$ могут наблюдаться вылетающими в пределах двух конусов, направленных растворами по ходу и против хода движения материнской частицы. Этот результат не имеет места в нерелятивистском пределе и является отличительной чертой релятивистского расчёта.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Широков Ю. М., Юдин Н. П. Ядерная физика. М.: Наука, 1980. 728 с.
2. Наумов А. И. Физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: Просвещение, 1984. 384 с.
3. Hofmann S., et al. Proton radioactivity of ^{151}Lu // *Z Physik A*. 1982. Vol. 305. Pp. 111–123.
4. Giovinazzo J., et al. Two-Proton Radioactivity of ^{45}Fe // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. No 10. Art. N. 102501.
5. Pfützner M., et al. First evidence for the two-proton decay of ^{45}Fe // *Eur Phys J A*. 2002. Vol. 14. Pp. 279–285.
6. Rose H. J., Jones G. A. A new kind of natural radioactivity // *Nature*. 1984. Vol. 307. Pp. 245–247.
7. Александров Д. В. и др. Наблюдение спонтанного вылета ядер ^{14}C из ^{223}Ra // *Письма в ЖЭТФ*. 1984. Т. 40. С. 152–154.
8. Оганесян Ю. Ц., Пенионжкевич Ю. Э., Григорьев В. А. Физика тяжелых ионов и ее приложения. Дубна: ОИЯИ, 2021. 363 с.
9. Нелипа Н. Ф. Физика элементарных частиц. М.: Высшая школа, 1977. 608 с.
10. Particle Data Group. Review of Particle Physics // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2022. Vol. 2022. No 8. Art. N. 083C01.
11. Балдин А. М. и др. Кинематика ядерных реакций. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Атомиздат, 1968. 456 с.

12. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. Pp. 1–29.
13. **CMS collaboration, Chatrchyan S. et al.** Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. Pp. 30–61.
14. **CMS collaboration, Tumasyan A. et al.** Search for Higgs boson decays to a Z boson and a photon in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // *J. High Energ. Phys.* 2023. Issue 5. No 233.
15. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Searches for exclusive Higgs and Z boson decays into a vector quarkonium state and a photon using 139 fb⁻¹ of ATLAS $\sqrt{s} = 13$ TeV proton-proton collision data // *The European Physical Journal C.* 2023. Vol. 83. No 9. Art. N. 781.
16. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 536 с.
17. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. IV. / **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Квантовая электродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 720 с.
18. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.

References

1. **Shirokov Y. M., Yudin N. P.** *Yadernaya fizika* [Nuclear physics]. Moscow: Nauka, 1980. 728 p. (In Russ.)
2. **Naumov A. I.** *Fizika atomnogo yadra i elementarnykh chastits* [Physics of atomic nucleus and elementary particles]. Moscow: Prosveshenie, 1984. 384 p. (In Russ.)
3. **Hofmann S., et al.** Proton radioactivity of ¹⁵¹Lu. *Z Physik A.* 1982. Vol. 305. Pp. 111–123.
4. **Giovinazzo J., et al.** Two-Proton Radioactivity of ⁴⁵Fe. *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. No 10. Art. N. 102501.

5. **Pfützner M., et al.** First evidence for the two-proton decay of ^{45}Fe . *Eur Phys J A*. 2002. Vol. 14. Pp. 279–285.
6. **Rose H. J., Jones G. A.** A new kind of natural radioactivity. *Nature*. 1984. Vol. 307. Pp. 245–247.
7. **Alexandrov D. V. et al.** Observation of spontaneous departure of ^{14}C nuclei from ^{223}Ra . *Pis'ma v ZHETF* [Writings in ZhETF]. 1984. Vol. 40. Pp. 152–154. (In Russ.)
8. **Oganesyan Yu. Ts., Penionzhkevich Y. E., Grigoriev V. A.** *Fizika tyazhelykh ionov i yeye prilozheniya* [Physics of heavy ions and its applications]. Dubna: JINR, 2021. 363 p. (In Russ.)
9. **Nelipa N. F.** *Fizika elementarnykh chastits* [Physics of elementary particles]. Moscow: Vysshaya shkola, 1977. 608 p. (In Russ.)
10. **Particle Data Group.** Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2022. Vol. 2022. No 8. Art. N. 083C01.
11. **Baldin A. M. et al** *Kinematika yadernykh reaktsiy* [Kinematics of nuclear reactions]. 2nd ed., rev. and supplement. Moscow: Atomizdat, 1968. 456 p. (In Russ.)
12. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*. 2012. Vol. 716. Pp. 1–29.
13. **CMS collaboration, Chatrchyan S. et al.** Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*. 2012. Vol. 716. Pp. 30–61.
14. **CMS collaboration, Tumasyan A. et al.** Search for Higgs boson decays to a Z boson and a photon in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *J. High Energ. Phys.* 2023. Issue 5. No 233
15. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Searches for exclusive Higgs and Z boson decays into a vector quarkonium state and a photon using 139 fb^{-1} of ATLAS $\sqrt{s} = 13$ TeV proton-proton collision data. *The European Physical Journal C*. 2023. Vol. 83. No 9. Art. N. 781.

16. **Landau L. D., Lifshits E. M.** *Teoreticheskaya fizika. T. II. Teoriya polya* [Theoretical physics. V. II. Field theory]. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 536 p. (In Russ.)
17. **Landau L. D., Lifshits E. M.** Theoretical physics. V. IV. **Berestetsky V. B., Lifshits E. M., Pitaevsky L. P.** *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics]. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 720 p. (In Russ.)
18. **Landau L. D., Lifshits E. M.** *Teoreticheskaya fizika. T. I. Mekhanika* [Theoretical physics. V. I. Mechanics]. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 224 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author

Макаров Павел Андреевич / Pavel A. Makarov

к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник / Ph.D. in Physics and Mathematics, senior researcher

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS

167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oplesnin str., 4

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 09.10.2023

Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 09.11.2023

Принято к публикации / Accepted for publication 10.11.2023