ISSN 1992-2752

# Вестник Сыктывкарского университета

*Серия 1:*
**Математика**
**Механика**
**Информатика**

**4(49)** выпуск **23**

| | | |
|---|---|---|
| Вестник Сыктывкарского университета | Серия 1: *Математика* *Механика* *Информатика* | 12+ ISSN 1992-2752 |
| Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год | | Выпуск 4 (49) 2023 |

**Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина»** (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

**Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года**

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2023. — 4 (49). 2023. — 81 с.

**Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.**

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень отечественных изданий, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования и в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)», «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

**The peer-reviewed journal was founded in 1995**

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included in the list of editions included in international abstract databases and citation systems, and in which the main scientific results of dissertations for the degree of Candidate or Doctor of Sciences should be published, approved by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. The journal publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)», «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)».

*Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.*

Адрес редакции
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Свободная цена © ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2023

Главный редактор:
д.пед.н., доцент, ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»
Сотникова О. А.

Ответственный редактор:
Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)

Редакционная коллегия:
Аббасов М. Э., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Беляева Н. А., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Вечтомов Е. М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой (ВятГУ)
Головач П. А., к.ф.-м.н., доцент, исследователь (Университет Бергена, Норвегия)
Григорьев С. Г., член-корреспондент РАО, д.т.н., профессор, профессор (МГПУ)
Дворяткина С. Н., д.пед.н., доцент, профессор (ЕГУ им. И.А. Бунина)
Дорофеев С. Н., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ТолГУ)
Калинин С. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ВятГУ)
Колесников Г. Н., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Колпак Е. П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ)
Крылатов А. Ю., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Махнев А. А., член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник (ИММ УрО РАН)
Одинец В. П., д.ф.-м.н., профессор
Орлов В. В., д.пед.н., профессор, профессор (Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена)
Парилина Е. М., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Певный А. Б., д.ф.-м.н., профессор
Петров Н. Н., д.ф.-м.н., профессор, профессор (УдмГУ)
Петраков А. П., д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Питухин Е. А., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Попов Н. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Рудикова-Фронхёфер Л. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь)
Тихомиров А. Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник
(Коми НЦ УрО РАН)
Чермных В. В., д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Щербатых С.В., д.пед.н., профессор, ректор ЕГУ им. И.А. Бунина

Техническая редакция:
Руденко Л. Н., руководитель издательского центра (СГУ им. Питирима Сорокина)
Котелина Н. О., к.ф-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)
Мазур В. В., к.г.н., преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)
Старцева Е. Н., ст. преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)

# Содержание

**Прикладная математика и механика**

**Макаров П. А.** *Некоторые особенности углов вылета частиц, рождённых в реакциях распада, в релятивистском и нерелятивистском случаях* . . . . . 4

**Информатика**

**Бабикова Н. Н., Котелина Н. О., Тентюков Ф. Н.** *Анализ данных о лесных пожарах в Республике Коми с помощью Excel и Python* . . . . . 29

**Теория и методика обучения математике и информатике**

**Ермоленко А. В.** *Введение в теорию математического моделирования при обучении студентов* . . . . . 47

**Сотникова О. А.** *Семантические аспекты в методике обучения математике* . . . . . 59

**Методические материалы**

**Одинец В. П.** *О работах математика, защитника Москвы, корейца Шин Ден Юна (1912–1942)* . . . . . 70

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.*
*Выпуск 4 (49)*
*Bulletin of Syktyvkar University.*
*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)*

Научная статья

УДК 51-72, 531.01, 539.1.01, 514.84
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_4

# НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ УГЛОВ ВЫЛЕТА ЧАСТИЦ, РОЖДЁННЫХ В РЕАКЦИЯХ РАСПАДА, В РЕЛЯТИВИСТСКОМ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЯХ

**Павел Андреевич Макаров**
Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
makarovpa@ipm.komisc.ru

***Аннотация.*** На основе кинематического подхода изучены некоторые особенности углов вылета дочерних частиц, рождённых в процессах распада. Сформулированы и доказаны утверждение и теоремы, описывающие кинематику реакций распада в нерелятивистском и релятивистском случаях. Получены и проанализированы следствия, позволяющие определять максимальные углы вылета рождённых частиц. Установлена связь между углами вылета частиц в системе центра инерции и соответствующими им углами, регистрируемыми в лабораторной системе координат. Показано, что характер этой связи существенно зависит не только от отношения скоростей материнских и дочерних частиц, но и от их абсолютных значений.

***Ключевые слова:*** распад, кинематика, законы сохранения, углы вылета, преобразования Лоренца

© Макаров П. А., 2023.

***Для цитирования:*** Макаров П. А. Некоторые особенности углов вылета частиц, рождённых в реакциях распада, в релятивистском и нерелятивистском случаях // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 4 (49). С. 4–28. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_4

Article

**Some features of production angles of particles born in decay reactions in relativistic and nonrelativistic cases**

**Pavel A. Makarov**
Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, makarovpa@ipm.komisc.ru

***Abstract.*** On the basis of kinematic approach some features of production angles of particles born in decay processes are studied. Statement and theorems describing the kinematics of decay reactions in the nonrelativistic and relativistic cases are formulated and proved. Corollaries allowing to determine the maximum of production angles of born particles are obtained and analyzed. The relation between the production angles of particles in the center-of-momentum frame and the corresponding angles registered in the laboratory frame is established. It is shown that the nature of this relation depends essentially not only on the ratio of the velocities of particles, but also on absolute values of velocities.

***Keywords:*** decay, kinematics, conservation laws, production angles, Lorentz transformations

***For citation:*** Makarov P. A. Some features of production angles of particles born in decay reactions in relativistic and nonrelativistic cases. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 4–28. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_4

## 1. Введение

**Определение 1.** *Под термином* ***распад*** *в рамках данной работы будем понимать* ***процесс спонтанного превращения исходного ядра или частицы*** *(называемых родительскими или материнскими)*

***в несколько продуктов распада*** *(порождённые или дочерние частицы).*

Процесс распада хорошо известен на протяжении уже более ста лет, в течение которых его исследование было широко связано с изучением явления радиоактивности [1; 2]. Несмотря на такую существенную продолжительность, данные исследования не потеряли своей актуальности по сей день и продолжают приводить к новым открытиям. Так, например, в 1981 году была открыта протонная [3], а в 2002 году и двухпротонная [4; 5] радиоактивность — явления спонтанного испускания ядрами протонов. Кроме того, в 1984 году Г. Роуз, Г. Джонс [6] и независимо от них Д. Александров [7] впервые обнаружили кластерную радиоактивность — явление самопроизвольного испускания ядрами фрагментов тяжелее, чем $\alpha$-частица. Примером такого процесса является распад

$$^{223}\mathrm{Ra} \to {}^{209}\mathrm{Pb} + {}^{14}\mathrm{C}. \tag{1}$$

Указанные факты свидетельствуют о том, что радиоактивный распад является важнейшим процессом, позволяющим определить строение ядра, а также его основные физические характеристики и свойства. Это положение остаётся актуальным и по сей день, поскольку не прекращаются исследования в области синтеза новых тяжёлых элементов [8].

Более того, процессы распада (понимаемого в широком смысле) характерны не только для ядерной физики, но и для физики частиц [9], поскольку различные превращения частиц друг в друга являются неотъемлемой частью их «жизненного цикла». Так, подавляющая часть известных в настоящее время частиц нестабильны и имеют малое время жизни [10]. В процессе распада тяжелых частиц образуется несколько частиц сравнительно меньшей массы.

Распады частиц, как и все физические явления, подчиняются фундаментальным законам сохранения энергии и импульса. Если в природе имеются неизвестные на текущий момент частицы, то с помощью данных законов их существование можно обнаружить по отклонениям параметров распада от предсказаний принятой в настоящее время теории.

**Пример 1** (Распады бозона Хиггса)**.** *Примером, хорошо иллюстрирующим последнее утверждение, является экспериментальное открытие в 2012 году бозона Хиггса, которое было осуществлено именно*

*благодаря анализу мод его распада [12; 13]. В 2023 году коллаборации CMS и ATLAS на коллайдере LHC в ЦЕРНе сообщили об обнаружении следов редкого распада бозона Хиггса на Z-бозон и фотон [14; 15]*

$$H \to Z + \gamma. \tag{2}$$

В силу указанных выше причин, изучение процессов распада, проводимое уже свыше ста лет, до сих пор остается актуальным. При этом исследование распада можно проводить на разном уровне детализации теории и эксперимента, привлекая аппарат различных разделов математики и физики. Самым базовым уровнем здесь является аппарат классической механики. Ограничиваясь только им, можно с определённым успехом описывать некоторые свойства распада, однако совершенно очевидно, что полной картины явления классическое описание не даёт. Для более аккуратного исследования процессов, протекающих при высоких энергиях, необходимо привлекать аппарат специальной теории относительности, но и это, вообще говоря, не является достаточным. Более глубокую картину явления можно получить, опираясь на квантовую теорию.

В то же время оказывается, что при анализе результатов эксперимента с абсолютной уверенностью можно использовать кинематические соотношения без привлечения квантовой теории. Они позволяют идентифицировать тип реакции и природу отдельных её продуктов, установить связь между углами вылета и энергиями различных вторичных частиц или между углами вылета и энергией одной и той же вторичной частицы, определить разрешенные области энергий и углов, в которых следует ожидать появления той или иной вторичной частицы, найти энергетические пороги реакций и т. д. [11]. Особенно отчётливо это проявляется в том случае, когда в конечном состоянии наблюдаются только две частицы. При этом существует вполне определенная связь между углами вылета частиц и энергией. Кроме того, на практике часто возникает необходимость пересчитывать характеристики частиц и реакций между разными системами отсчёта, что также подчёркивает необходимость исследования кинематических характеристик распада.

Проведённый выше анализ показывает, что кинематика процессов распада является достаточно актуальной и важной задачей, так как анализ и обработка информации о различных распадах вносит большой вклад в развитие современных теорий, способствуя поиску неизвестных

частиц, определению их свойств и, как следствие, уточнению и дополнению существующих моделей и формированию физики за пределами стандартной модели.

Избранной тематике посвящена достаточно обширная учебная и научная литература. В то же время анализ источников показывает, что подробное исследование углов вылета частиц, рождённых в реакциях распада, проведённое на основе сравнения результатов расчёта в релятивистском и нерелятивистском предельных случаев, может представлять некоторый самостоятельный интерес.

Таким образом, целью настоящей работы является кинематическое исследование закономерностей направления вылета нерелятивистских и релятивистских дочерних частиц, рождённых в процессе распада.

## 2. Основные соглашения и обозначения

Рассматривается самопроизвольный распад родительской частицы с образованием только двух порождённых частиц, протекающий по схеме:

$$a_0 \to a_1 + a_2, \tag{3}$$

где $a_i$ — символ той или иной $i$-й частицы.

Потенциальную энергию частиц во внешних силовых полях отдельно учитывать не будем, поскольку законы сохранения в процессе (3) будут записываться непосредственно для момента самого распада. Таким образом, полная энергия $i$-й частицы $E_i$ определяется только суммой её внутренней $W_i$ и кинетической $T_i$ энергий:

$$E_i = W_i + T_i. \tag{4}$$

Для анализа процессов распада в данной работе равноправно используются две системы отсчёта:

- система центра инерции (обозначаемая в дальнейшем как *ц*-система);
- система отсчёта, связанная с лабораторией (*л*-система).

В *л*-системе скалярные величины (такие, как масса $m$, время жизни $\tau$, полярный угол $\theta$ и т. п.) записываются светлым курсивом, трёхмерные векторы — полужирным шрифтом. В *ц*-системе используются такие же обозначения, как в *л*-системе, снабжённые «звёздочкой» (исключением здесь, в силу её инвариантности, является масса частицы, для которой сохраняется обозначение «без звёздочки»).

**Пример 2.** *Так, $E$ и $\mathbf{p}$ — это энергия и импульс частицы в л-системе, а $E^*$ и $\mathbf{p}^*$ — её же энергия и импульс в ц-системе.*

В основном используется стандартная в квантовой теории поля и физике частиц система единиц $c = 1$ [9; 16; 17].

## 3. Основные теоремы

### 3.1. Нерелятивистский случай

В ц-системе закон сохранения энергии [18] для реакции (3) даёт

$$W_0^* = E_1^* + E_2^*. \tag{5}$$

В связи с тем что $E_i^* > m_i$, $i = 1, 2$, равенство (5) может выполняться, только если суммарная масса продуктов распада $m_1 + m_2 < W_0^*$. В обратном случае (если $m_1 + m_2 \geqslant W_0^*$) исходная частица оказывается устойчивой по отношению к такому распаду, поэтому для его осуществления материнской частице необходимо сообщить энергию, которая должна быть не меньше энергии связи распадающегося тела по абсолютной величине.

В силу закона сохранения импульса сумма импульсов двух распадных частиц в ц-системе равна нулю. При этом сами распадные частицы разлетаются с равными по модулю и противоположно направленными импульсами

$$p_1^* = m_1 v_1^* = p_2^* = m_2 v_2^* = p^*, \tag{6}$$

где $p^*$ — абсолютное значение импульсов продуктов распада, а $v_i^*$, $i = 1, 2$ — их скорости.

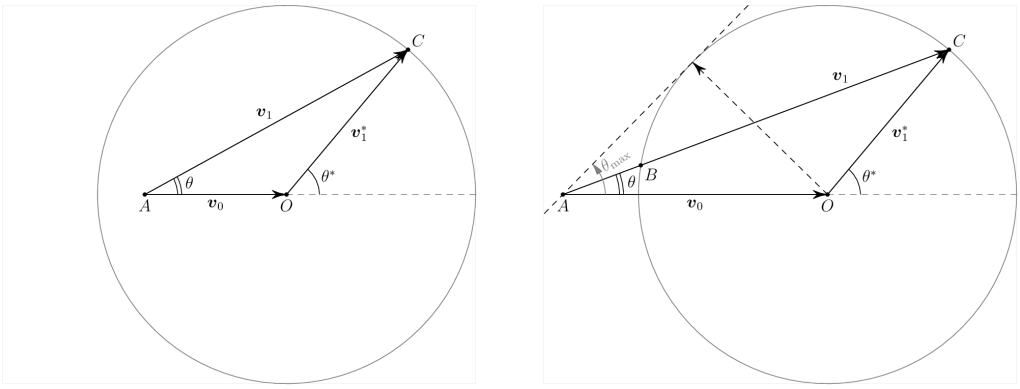
Законы (5) и (6) позволяют определить все механические характеристики продуктов распада [11; 16; 18]. Не останавливаясь подробно на полном анализе данных соотношений, обсудим только один вопрос, имеющий отношение к последующему изложению. А именно проанализируем возможные углы вылета $\theta$ одной из распадных частиц относительно направления скорости первоначальной частицы.

**Утверждение 1.** *Пусть в л-системе материнская частица движется со скоростью $\boldsymbol{v}_0$. В этой же системе исследуемая дочерняя частица движется со скоростью $\boldsymbol{v}_1$, а в ц-системе ей соответствует скорость $\boldsymbol{v}_1^*$. Тогда зависимость скорости дочерней частицы от направления её вылета в л-системе определяется согласно уравнению*

$$v_0^2 + v_1^2 - 2v_0 v_1 \cos\theta = (v_1^*)^2. \tag{7}$$

*Доказательство.* Результат (7) непосредственно следует из теоремы о сложении скоростей $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1^*$ [16; 18] и хорошо известной теоремы косинусов. □

Зависимость (7) может быть представлена графически с помощью диаграмм скоростей, приведённых на рис. 1. На данных диаграммах изображены «треугольники скоростей», построенные на векторах $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1^*$ и $\boldsymbol{v}_1$. При этом вектор скорости материнской частицы $\boldsymbol{v}_0$ в *л*-системе выбран направленным вправо, так что его начало соответствует точке $A$, а конец — точке $O$. Вектор $\boldsymbol{v}_1^*$ есть собственная скорость дочерней частицы, т. е. её скорость в *ц*-системе. Соответственно этому начало вектора $\boldsymbol{v}_1^*$ помещено в точку $O$, которая, таким образом, согласно нашему соглашению о векторе $\boldsymbol{v}_0$, действительно является началом отсчёта *ц*-системы.




(a) $v_0 < v_1^*$ (b) $v_0 > v_1^*$

Рис. 1. Диаграммы скоростей для распада нерелятивистской частицы

Иллюстрацией того, что направление вылета дочерней частицы в *ц*-системе ничем не ограничено и может быть произольным, на рис. 1 являются окружности с центром в точке $O$ и радиусом $v_1^*$. Таким образом, данные окружности представляют собой геометрическое место точек, сооветствующих концам $C$ всех возможных векторов $\boldsymbol{v}_1^*$.

Из всего изложенного выше следует, что в *л*-системе дочерней частице отвечает скорость $\boldsymbol{v}_1$, представляющая собой вектор, проведённый из точки $A$ в точку $C$. На рис. 1 отмечены углы вылета дочерней частицы $\theta$ и $\theta^*$ (в *л*- и *ц*-системах соответственно), определённые по отношению к направлению скорости $\boldsymbol{v}_0$ материнской частицы в *л*-системе. Анализ этих углов (см. подробности далее в следствии 1) показывает,

что изотропия направлений вылета дочерних частиц, наблюдаемая в *л*-системе, присутствует только в случае $v_0 < v_1^*$ (при этом точка $A$ лежит внутри области, ограничиваемой окружностью, образованной точками $C$).

**Следствие 1.** *Утверждение 1 приводит к возможности реализации двух ситуаций.*

1. *Скорость материнской частицы меньше собственной скорости дочерней частицы $v_0 < v_1^*$ (см. рис. 1a). В этом случае дочерняя частица может вылететь под любым углом $\theta \in [0, 2\pi]$.*
2. *Скорость первичной частицы больше собственной скорости вторичной частицы $v_0 > v_1^*$ (см. рис. 1b). При этом из рис. 1b видно, что независимо от угла $\theta^*$ частица в л-системе может вылететь только вперед, под углом $\theta \in [0, \theta_{max}]$, где максимальный угол $\theta_{max}$ определяется равенством*

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_1^*}{v_0}. \tag{8}$$

*Доказательство.* Очевидно из анализа рис. 1. □

**Следствие 2.** *Связь между углами вылета дочерней частицы $\theta$ и $\theta^*$ в л- и ц-системах может быть записана в виде*

$$\cos\theta^* = -\frac{v_0}{v_1^*}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_1^*}\right)^2 \sin^2\theta}. \tag{9}$$

*Доказательство.* Непосредственно из рис. 1 вытекает равенство

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_1^*\sin\theta^*}{v_1^*\cos\theta^* + v_0}. \tag{10}$$

Возводя последнее выражение в квадрат и используя основное тригонометрическое тождество, легко получить

$$(v_1^*\cos\theta^* + v_0)^2 = (v_1^*)^2(1 - \cos^2\theta^*)\operatorname{ctg}^2\theta. \tag{11}$$

Раскрывая здесь квадрат суммы, деля почленно на $(v_1^*)^2$ и перегруппировывая слагаемые, приходим к равенству

$$(1 + \operatorname{ctg}^2\theta)\cos^2\theta^* + 2\frac{v_0}{v_1^*}\cos\theta^* + \left(\frac{v_0}{v_1^*}\right)^2 - \operatorname{ctg}^2\theta = 0. \tag{12}$$

Последнее, как несложно видеть, есть квадратное уравнение относительно $\cos\theta^*$, корнями которого и является выражение (9). □

**Замечание 1.** *Как видно из рис. 1a, для случая $v_1^* > v_0$ связь между $\theta^*$ и $\theta$ однозначна. При этом в* (9) *необходимо выбирать знак «+» перед корнем. Если $v_1^* < v_0$, то связь между $\theta^*$ и $\theta$ неоднозначна: каждому значению $\theta$ отвечают два значения $\theta^*$ (векторам $\boldsymbol{v}^*$, проведённым на рис. 1b из центра окружности в точки $B$ или $C$, отвечают два знака «±» перед корнем в уравнении* (9).

Сформулированные и доказанные следствия утверждения 1 проиллюстрированы на рис. 2 и 3.

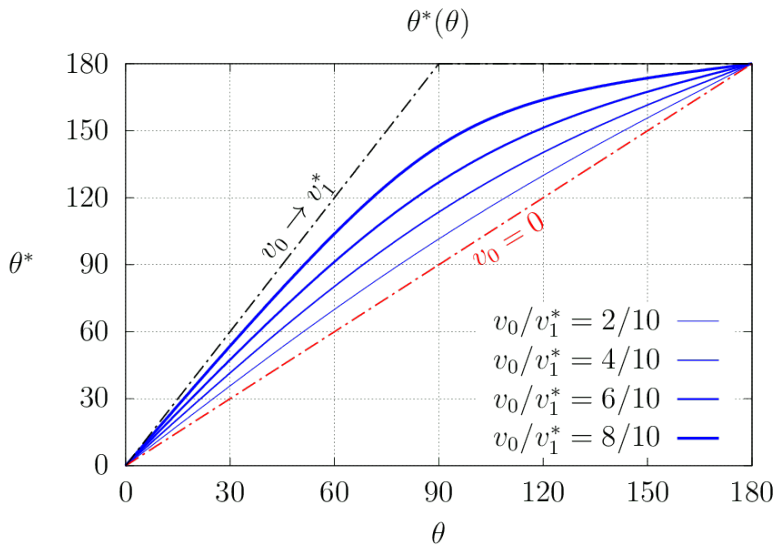



Рис. 2. Связь между $\theta^*$ и $\theta$ в случае $v_0 < v_1^*$

Как видно из рис. 2, в полном соответствии с результатами следствия 1, в случае $v_0 < v_1^*$ отсутствует ограничение на максимальный угол вылета дочерней частицы. Кроме того, для данной ситуации можно заметить, что зависимость $\theta^* = \theta^*(\theta)$, определяемая соотношением (9), в случае сравнительно медленной материнской частицы хорошо приближается линейной функцией (кривая, изображенная самой тонкой линией). В противоположность этому для более быстрых материнских частиц связь углов $\theta^*$ и $\theta$ существенно нелинейная (см. на кривую, показанную самой толстой линией). Для последнего случая также

можно утверждать, что в *ц*-системе дочерние частицы преимущественно вылетают «назад» (т. е. в область углов $\theta^* > 90°$), при том что в *л*-системе их регистрация может происходить в достаточно широком интервале углов $\Delta\theta > 90°$, захватывающем область острых углов $\theta < 90°$ тем больше, чем ближе отношение $v_0/v_1^*$ к единице.

Дополнительно, на рис. 2 штрих-пунктирными линиями показаны предельные случаи зависимости $\theta^*(\theta)$ в случае покоящейся материнской частицы ($v_0 = 0$) и материнской частицы, движущейся со скоростью, чуть меньшей собственной скорости дочерней частицы ($v_0 \to v_1^*$).

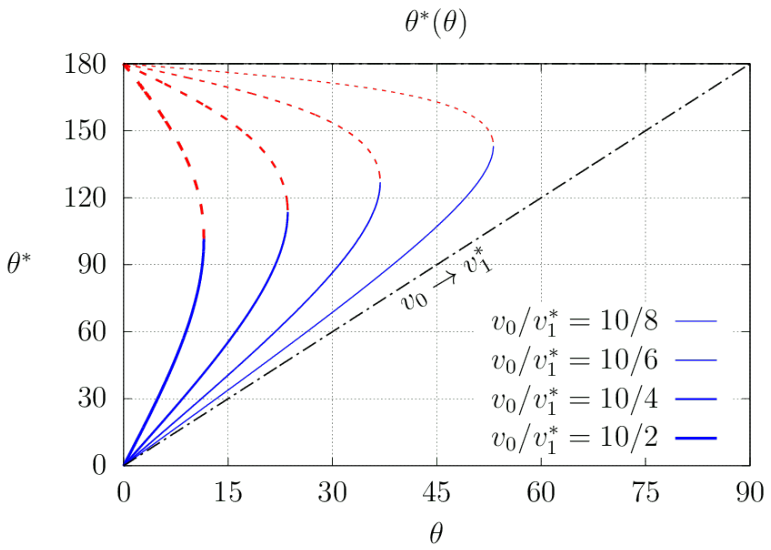



Рис. 3. Связь между $\theta^*$ и $\theta$ в случае $v_0 > v_1^*$

Рис. 3 подтверждает результат следствия 1 о том, что для случая $v_0 > v_1^*$ в *л*-системе имеется максимальный угол $\theta_{\max}$ вылета дочерней частицы. Другими словами, в этой ситуации продукты распада в *л*-системе всегда наблюдаются вылетающими «впрерёд». Дополнительно из рис. 3 видно, что $\theta_{\max}$ увеличивается с ростом собственной скорости дочерней частицы $v_1^*$. На рис. 3 показаны оба результата (9) следствия 2. Знаку «+» при этом соответствует сплошная кривая, знаку «−» — пунктирная линия.

Кроме всего отмеченного выше, совместный анализ рис. 2 и 3 позволяет сделать ещё один вывод.

**Следствие 3.** *Каковым бы ни был наблюдаемый в л-системе угол вылета $\theta$ вторичной частицы, в ц-системе ему могут соответство-*

*вать только значения $\theta^* \geqslant \theta$ (причём равенство имеет место только в тривиальном случае, когда распадается покоящаяся частица, а значит л-, ц-системы совпадают), но не $\theta^* < \theta$.*

*Доказательство.* Очевидно из рис. 2 и 3. □

### 3.2. Релятивистский случай

Как известно [16], объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется принципом относительности Эйнштейна. Основанная на последнем механика называется релятивистской.

Как известно, закон сложения скоростей в той форме, на которой базировалось утверждение 1 в релятивистском случае, утрачивает свою справедливость. Кроме того, более фундаментальный смысл для анализа процессов распада приобретают такие физические величины, как импульс $\mathbf{p}$ и энергия $E$ (но не скорость $\boldsymbol{v}$), релятивистские выражения для которых выглядят следующим образом [16]:

$$\mathbf{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{13}$$

Когда скорость частицы приближается к скорости света $v \approx 1$, её импульс и энергия неограниченно растут. При этом в реальности они всегда остаются конечными, поэтому частица, обладающая ненулевой массой $m \neq 0$, никогда не сможет двигаться со скоростью света $v \neq 1$, хотя её можно разогнать до скорости, сколь угодно к ней близкой [16].

В разных инерциальных системах отчёта значения энергии и импульса одной и той же частицы будут различными. Однако они связаны между собой соотношением, которое следует из выражений для энергии и импульса (13):

$$E^2 - p^2 = m^2. \tag{14}$$

Поскольку масса — это константа, характеризующая данную конкретную частицу, то из (14) очевидно, что разность $E^2 - p^2$ есть релятивистский инвариант [16].

Запишем для реакции распада (3), протекающей с участием релятивистских частиц, законы сохранения импульса и энергии в *л*-системе $S$:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{m_0\boldsymbol{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2}} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \tag{15}$$

$$E_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_0^2}} = E_1 + E_2. \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_0$ — скорость распадающейся первичной частицы, которая эквивалентна скорости движения центра масс вторичных частиц 1 и 2 относительно системы $S$. Величину $m_0$ обычно трактуют как инвариантную массу (см. ниже определение 2) пары дочерних частиц, равную их суммарной энергии $E_1^* + E_2^*$ в $u$-системе.

Как уже отмечалось ранее, бóльшая часть известных частиц нестабильны — они живут короткое время, после чего самопроизвольно распадаются на другие частицы. В любом таком процессе выполняются релятивистские законы сохранения энергии (16) и импульса (15). При этом так как время жизни нестабильных частиц обычно мало и, как правило, заключено в интервале $\tau \in [10^{-23}, 10^{-13}]$ с, то обнаружить след распавшейся частицы с помощью обычной фотосъёмки представляется крайне затруднительным, если вообще возможным. Поэтому ключевую роль для детектирования процессов рождения и распада короткоживущих частиц играет формула (14).

Согласно общепринятому подходу, для этого измеряют энергию $E_0$ искомой частицы — для этого можно, пользуясь законом сохранения энергии (16), просуммировать энергии частиц, являющихся продуктами распада. Аналогично, используя закон сохранения импульса (15), измеряют импульс $\mathbf{p}_0$, сложив импульсы всех продуктов распада.

После этого остаётся только воспользоваться формулой (14) [9–11]. Если для большого числа экспериментальных данных значения $\sum_i E_i^2 - p_i^2$ скапливаются около определенной величины $m_0^2$, то можно предположить, что в данной реакции действительно рождалась частица массы $m_0$ с малым временем жизни, часто называемая резонансом. Если же разброс значений $\sum_i E_i^2 - p_i^2$ в изучаемой серии экспериментов велик, то почти наверняка происхождение наблюдаемых частиц не связано с распадом недолго живущих материнских частиц.

В связи с этим важнейшую роль в анализе событий распада частиц играет следующее определение.

**Определение 2.** *Пусть продуктами распада* (3) *некой материнской частицы* $a_0$ *являются дочерние частицы* $a_i$ *с зарегистрированными импульсами* $\mathbf{p}_i$ *и энергиями* $E_i$. *Тогда инвариантной массой* $m_{inv}$ *дан-*

*ного процесса называют величину*

$$m_{inv} = \sqrt{\sum_{i=1} E_i^2 - \sum_{i=1} \mathbf{p}_i^2}. \tag{17}$$

Обратимся теперь к релятивистскому обобщению результатов раздела 3.1, посвящённых связи между углами вылета дочерних частиц и их энергиями по отношению к направлению скорости $\boldsymbol{v}_0$ материнской частицы.

**Теорема 1.** *Пусть $E_1^*$ — это энергия одной из дочерних частиц в ц-системе, а $E_1$ и $\theta$ — её энергия и угол вылета (по отношению к $\boldsymbol{v}_0$) в л-системе. Тогда направление вылета $\theta$ искомой частицы определяется согласно уравнению*

$$\cos\theta = \frac{E_1 - E_1^*\sqrt{1-v_0^2}}{v_0\sqrt{E_1^2 - m_1^2}}. \tag{18}$$

*Доказательство.* Запишем формулы преобразования Лоренца [16] для рассматриваемой частицы при переходе от *ц*- к *л*-системе $S$:

$$E_1 = \frac{E_1^* + v_0 p_{1x}^*}{\sqrt{1-v_0^2}}, \quad p_{1x} = \frac{p_{1x}^* + v_0 E_1^*}{\sqrt{1-v_0^2}}, \quad p_{1y} = p_{1y}^*, \quad p_{1z} = p_{1z}^*. \tag{19}$$

В записи (19) предполагается, что система $S$ выбрана так, что $\boldsymbol{v}_0 \upuparrows \mathbf{e}_x$. Это нисколько не умаляет общности доказательства, поскольку конкретный выбор инерциальных систем координат, для которых справедливы преобразования Лоренца, произволен [16].

Путём несложных преобразований выразим $E_1^*$ из (19):

$$E_1^* = \frac{E_1 - v_0 p_1 \cos\theta}{\sqrt{1-v_0^2}}. \tag{20}$$

Подставляя в последнее равенство $p_1$ согласно (14) и выражая $\cos\theta$, приходим окончательно к (18), что и доказывает теорему. □

Теорема 1 позволяет определить направление вылета дочерней частицы по значениям её энергии $E_1^*$ и $E_1$ в *ц*- и *л*-системах, которые предполагаются известными. На практике, однако, часто решается иная задача. А именно известными предполагаются величины $\boldsymbol{v}_0$, $E_1^*$ и $\theta$,

а энергия $E_1$ подвергается определению. Поставленную в такой форме задачу решает следующая теорема, являющаяся в некотором смысле обратной к теореме 1.

**Теорема 2.** *Пусть для некой дочерней частицы известны её энергия $E_1^*$ в ц-системе и угол вылета $\theta$ (по отношению к скорости $\boldsymbol{v}_0$ материнской частицы) в л-системе. Тогда энергия $E_1$ данной дочерней частицы в л-системе определяется согласно уравнению*

$$(1 - v_0^2 \cos^2\theta)E_1^2 - 2E_1^*\sqrt{1 - v_0^2}E_1 + (1 - v_0^2)(E_1^*)^2 + m_1^2 v_0^2 \cos^2\theta = 0. \quad (21)$$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы достаточно возвести в квадрат выражение (18), умножить результат на $v_0^2(E_1^2 - m_1^2)$ и выделить в явном виде множители при разных степенях $E_1$. □

Уравнение (21) является квадратным относительно $E_1$, что может быть объяснено графическим построением, представленным на рис. 4 (аналогичным рис. 1 для нерелятивистского случая). Для построения рис. 4 выполним следующее рассуждение.

Согласно формулам преобразования Лоренца (19), компонента импульса дочерней частицы в л-системе выражается через величины, относящиеся к ц-системе, следующим образом:

$$p_{1x} = \frac{p_1^* \cos\theta^* + v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \quad p_{1y} = p_1^* \sin\theta^*. \quad (22)$$

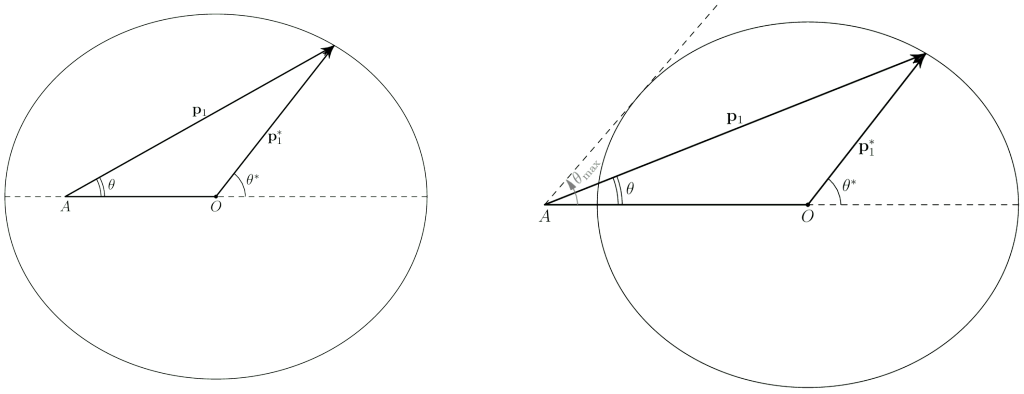
Исключая из последней системы $\theta^*$, легко получить

$$p_{1y}^2 + \left(p_{1x}\sqrt{1 - v_0^2} - v_0 E_1^*\right)^2 = (p_1^*)^2. \quad (23)$$

По отношению к переменным $p_{1x}$, $p_{1y}$ выражение (23) представляет собой уравнение эллипса с полуосями $p_1^*/\sqrt{1 - v_0^2}$, $p_1^*$ и центром (точка $O$ на рис. 4), смещённым на расстояние $v_0 E_1^*/\sqrt{1 - v_0^2}$ от точки $\mathbf{p}_1 = 0$ (точка $A$ на рис. 4).

**Следствие 4.** *Таким образом, теоремы 1 и 2 приводят к возможности двух ситуаций:*

1. *Скорость материнской частицы меньше собственной скорости дочерней частицы $v_0 < p_1^*/E_1^* = v_1^*$ (см. рис. 4а). В этом случае дочерняя частица может вылететь под любым углом $\theta \in [0, 2\pi]$.*




(a) $v_0 < v_1^*$ (b) $v_0 > v_1^*$

Рис. 4. Диаграммы импульсов для распада релятивистской частицы

2. *Скорость материнской частицы больше собственной скорости дочерней частицы (т. е. $v_0 > v_1^*$). Тогда точка $A$ на рис. 4b лежит вне эллипса и при известном угле $\theta$ вектор $\mathbf{p}_1$ (а вместе с ним и энергия $E_1$) может иметь два различных значения. В этом случае из рис. 4b видно, что независимо от угла $\theta^*$ частица в л-системе может вылететь только вперед, под углом $\theta \in [0, \theta_{max}]$, где максимальный угол $\theta_{max}$ определяется равенством*

$$\sin\theta_{max} = \frac{p_1^*\sqrt{1-v_0^2}}{m_1 v_0}. \tag{24}$$

*Доказательство.* Очевидно из построения рис. 4 и его анализа. Результат (24) получается из условия обращения в нуль дискриминанта квадратного уравнения (21), записанного с учётом (14). □

**Следствие 5.** *Связь между углами вылета дочерней частицы $\theta$ и $\theta^*$ в л- и ц-системах в релятивистском случае имеет вид:*

$$\cos\theta^* = -\frac{v_0}{v_1^*\sqrt{1-v_0^2}}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\frac{v_0^2}{(v_1^*)^2(1-v_0^2)}\sin^2\theta}. \tag{25}$$

*Доказательство.* Проводится аналогично доказательству следствия 2 и может быть выполнено с помощью формальной замены

$$v_0 \to \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}, \tag{26}$$

очевидной из геометрического построения на рис. 4, для которого, как нами ранее было показано,

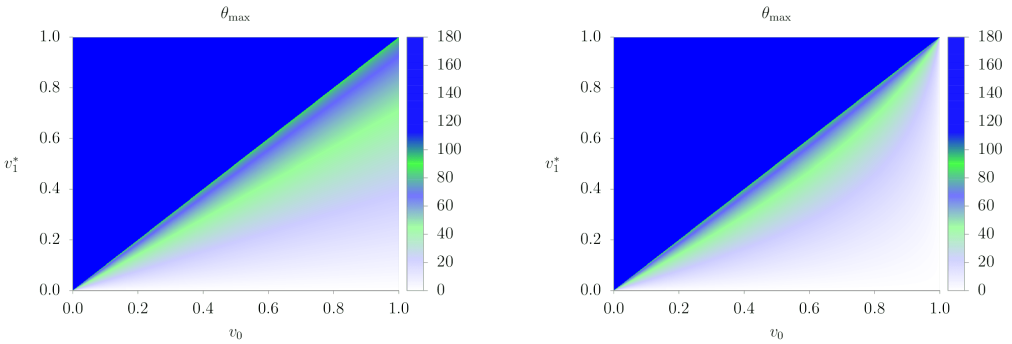
$$AO = \frac{v_0 E_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2}}, \tag{27}$$

что вместе с соотношением между импульсом, энергией и скоростью свободной релятивисткой частицы $\mathbf{p} = E\boldsymbol{v}$ окончательно и приводит к результату (25). □

## 4. Обсуждение

Направление вылета дочерней частицы в релятивистском случае, определяемое теоремами 1 и 2, более сложным образом зависит от соотношения собственной $\boldsymbol{v}_1^*$ и абсолютной $\boldsymbol{v}_1$ скоростей рассматриваемой частицы, чем это было установлено нами в утверждении 1 для нерелятивистского случая. Это проявляется в том, что в релятивистском случае направление вылета дочерней частицы в *л*-системе существенным образом зависит не только от отношения $v_0/v_1^*$, но и непосредственно от самих скоростей частиц.

Для демонстрации отмеченного выше результата сравним сначала предсказания следствий 1 и 4. Результаты соотвествующих расчётов, выполненных согласно (8) и (24), приведены на рис. 5.




(a) расчёт согласно (8) (b) расчёт согласно (24)

Рис. 5. $\theta_{\max}$ как функция $v_0$ и $v_1^*$

Как следует из рис. 5, результаты следствий 1 и 4 полностью совпадают в случае «дочерних частиц, более быстрых, чем материнские» ($v_1^* > v_0$). А именно такие дочерние частицы не имеют ограничений на максимальный угол вылета, наблюдаемый в *л*-системе $\theta_{\max}$.

**Замечание 2.** *Вместе с тем это не означает, что в л-системе при этом всегда наблюдается равномерное распределение углов вылета дочерних частиц. Последниий факт может быть изучен подробно только в связи с анализом следствий 2 и 5, а потому будет рассмотрен нами позднее в связи с рис. 7.*

В то же время рис. 5 отчётливо демонстрирует, что в случае «более медленных, чем материнские, дочерних частиц» ($v_1^* < v_0$) результаты следствий 1 и 4 существенно отличаются, причём это отличие тем сильнее, чем ближе скорости частиц к скорости света (напомним, что в избранной нами системе последняя принимается равной единице $c = 1$).

Это отличие состоит в том, что расчёт (24), выполненный на основе релятивистской теории, более значительно ограничивает $\theta_{\max}$, чем предсказания (8) нерелятивистской теории. На рис. 5 это соответствует тому, что светлая область ($\theta_{\max} \leqslant 10°$) имеет большую площадь на диаграмме 5b, чем на 5a.

Более наглядно эти особенности позволяет увидеть рис. 6, на котором приведены два семейства кривых $\theta_{\max}(v_0, v_1^*)$, построенные согласно следствиям 1 (штрих-пунктирные линии) и 4 (сплошные кривые) при двух значениях собственной скорости дочерней частицы. Из данного рисунка видно, что разница между предсказаниями $\theta_{\max}$, полученными в рамках релятивистского и нерелятивисткого расчётов, может быть очень значительной (например $\lesssim 30°$ для случая $v_1^* = 0.5$).

В качестве основного вывода можно отметить, что $\theta_{\max}$, предсказанный релятивистской теорией, не может превышать соответствующего угла, вычисленного в рамках нерелятивистского приближения. Другими словами, в случае $v_1^* < v_0$ более быстрые дочерние частицы наблюдаются в *л*-системе вылетающими в пределах сравнительно узкого конуса с углом раствора $\theta_{\max}$ вдоль направления скорости $\boldsymbol{v}_0$ материнской частицы.

Теперь обратимся к анализу и сопоставлению результатов следствий 2 и 5. Для этого обратимся, во-первых, к рис. 7, на котором представлено сравнение зависимостей (9) и (25) при $v_0/v_1^* = 8/10$ (это значение отношения скоростей материнской и дочерней частиц выбрано в связи с тем, что для него нерелятивистская зависимость $\theta^*(\theta)$, имеющая вид (9), носит наиболее ярко выраженный нелинейный характер).

Рис. 7 следует рассматривать в сравнении с рис. 2. Как уже было сказано нами ранее, в релятивистском случае связь углов вылета дочерней частицы в *ц*- и *л*-системах определяется не только отношением

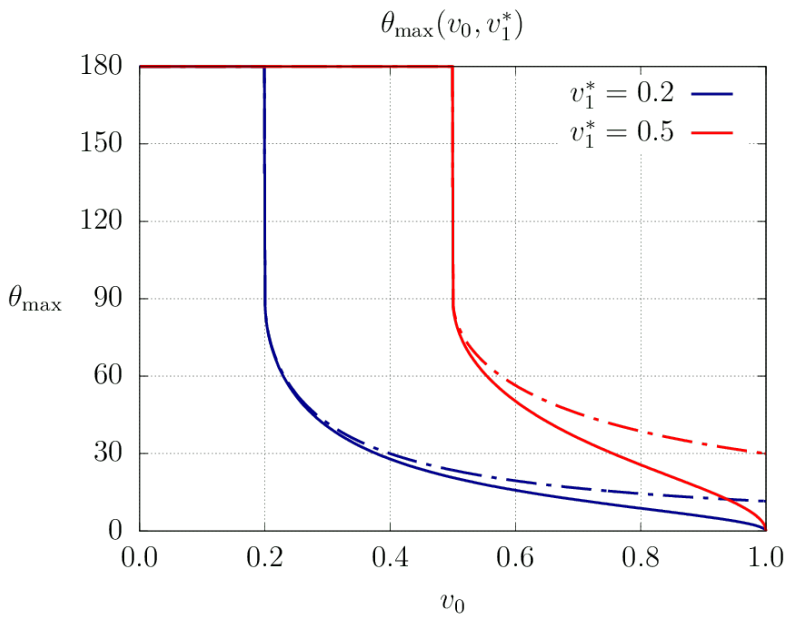



Рис. 6. Максимальный угол вылета дочерней частицы

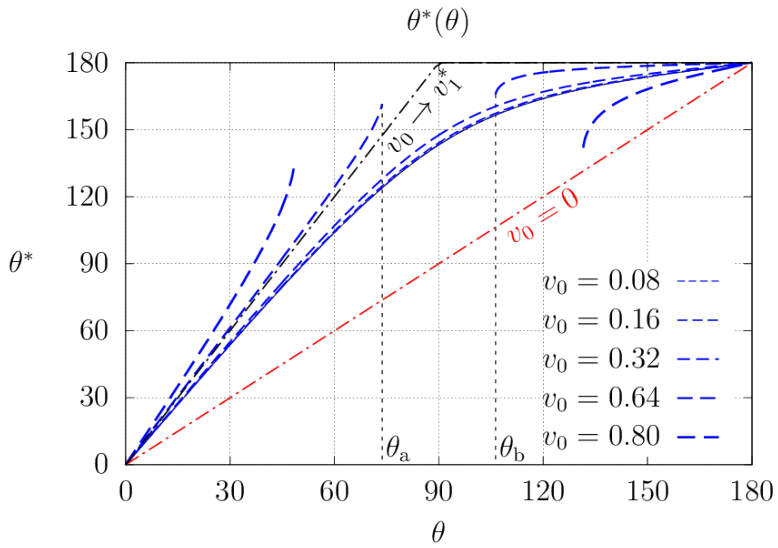



Рис. 7. Связь $\theta^*$ и $\theta$ в релятивистском случае при $v_0/v_1^* = 8/10$

скоростей дочерней и материнской частицы, но и абсолютным значением этих скоростей. Соответственно этому на рис. 7 изображено целое семейство кривых, демонстрирующих зависимость $\theta^*(\theta)$ при разных

значениях абсолютного значения скорости материнской частицы $v_0$ (а значит, и величинах собственной скорости дочерней частицы $v_1^*$) для фиксированного отношения $v_0/v_1^*$.

В качестве «опорной кривой» на рис. 7 самой тонкой сплошной линией изображена кривая зависимости $\theta^*(\theta)$, построенная согласно нерелятивистскому выражению (9). Заметим, что этой же кривой на рис. 2 соответствует самая толстая сплошная линия. Штрих-пуктирные линии на рис. 2 и 7 идентичны и ограничивают области «классически доступных» для наблюдения в *л*-системе углов вылета $\theta$ дочерних частиц.

Основная содержательная часть рис. 7 представлена семейством из пяти штриховых линий разной толщины (толщина которых растёт с увеличением абсолютного значения скорости $v_0$), рассчитаных в соответствии с релятивистским выражением (25). Анализ этого семейства кривых позволяет сделать следующие выводы:

1. Следствия 2 и 5 дают абсолютно идентичные результаты только в малой области существенно нерелятивистских скоростей $v \lesssim 0.1$. Это подтверждается тем, что самая тонкая штриховая кривая рис. 7 «теряется на фоне сплошной линии» (неотличима от неё).
2. Далее, в области всё ещё сравнительно небольших скоростей $[0.1, v_{0\mathrm{c}}]$ (см. штриховые линии на рис. 7, отвечающие скоростям $v_0 = 0.16$ и $v_0 = 0.32$) следствия 2 и 5 дают качественно совпадающие зависимости $\theta^*(\theta)$, несколько отличающиеся количественно. Это количественное отличие состоит в том, что релятивистский расчёт (25) приводит к несколько большим значениям углов $\theta^*$ в *ц*-системе, отвечающих данному углу $\theta$ в *л*-системе, по сравнению с предсказаниями (9) нерелятивисткой теории.
3. Начиная с некоторой критической скорости $v_{0\mathrm{c}}$ материнской частицы, предсказания следствий 2 и 5 отличаются уже существенно, причём не только количественно, но качественно. А именно релятивистский расчёт (25) даёт разрыв в зависимости $\theta^*(\theta)$, которая отчётливо разделяется на две ветви (см. штриховые линии на рис. 7, отвечающие скоростям $v_0 = 0.64$ и $v_0 = 0.8$), разделённые некоторым интервалом $[\theta_\mathrm{a}, \theta_\mathrm{b}]$ «запрещённых углов». «Запрещённость» этих углов следует понимать в том смысле, что в существенно релятивистской и ультрарелятивистской области скоростей дочерние частицы в *л*-системе могут наблюдаться вылетевшими только в пределах конусов, направленных растворами «вперёд» и «назад» по скорости материнской частицы $\boldsymbol{v}_0$. Имен-

но это обстоятельство и поясняет сделанное нами ранее замечание 2. Кроме того, следует отметить, что для дочерних частиц, вылетевших вперёд по отношению к направлению скорости материнской частицы (ветвь кривой $\theta^*(\theta)$, отвечающая интервалу углов $\theta < \theta_{\mathrm{a}}$) область углов $\theta$, доступных для наблюдения в *л*-системе, у́же «классически доступной» области углов (ограничиваемой штрих-пунктирными линиями на рис. 7), а сами углы $\theta$ существенно меньше тех, которые предсказывает нерелятивистский расчёт (9).

**Замечание 3.** *Величина критической скорости $v_{0c}$ и отвечающий ей интервал «запрещённых углов» $[\theta_a, \theta_b]$ связаны неравенством*

$$\frac{v_1^* \sqrt{1 - v_{0c}^2}}{v_{0c}} < \sin\theta_a, \tag{28}$$

*вытекающим из условия отрицательности значений подкоренного выражения в* (25). *При этом очевидно, что $\theta_b = \pi - \theta_a$.*

В завершение сравним выводы следствий 2 и 5 в случае $v_0/v_1^* = 10/8$. Кривые, определяемые при этом формулами (9) и (25), приведены на рис. 8. Соглашения, используемые при построении рис. 8, полностью аналогичны соглашениям рис. 7, за исключением того, что тонкая сплошная кривая рис. 8 соответствует самой тонкой кривой рис. 3.

В отличии от случая $v_0 < v_1^*$ рис. 8 демонстрирует, что характер зависимости $\theta^*(\theta)$ в случае $v_0 > v_1^*$, выполненный в рамках релятивистского расчёта (25), качественно не отличается от вычислений согласно (9) в нерелятивистском пределе. Наблюдаемые отличия имеют чисто количественный характер и преимущественно состоят в том, что с ростом абсолютных значений скорости частиц интервал $[0, \theta_{\max}]$ наблюдаемых в *л*-системе углов вылета дочерних частиц сокращается тем сильнее, чем выше скорость. Однако этот вывод уже был сделан нами ранее при анализе рис. 5 и 6, поэтому в таком виде не даёт ничего нового. Новым здесь является то, что формула (25) даёт существенно более точную связь между углами $\theta$ и $\theta^*$, чем нерелятивистское выражение (25).

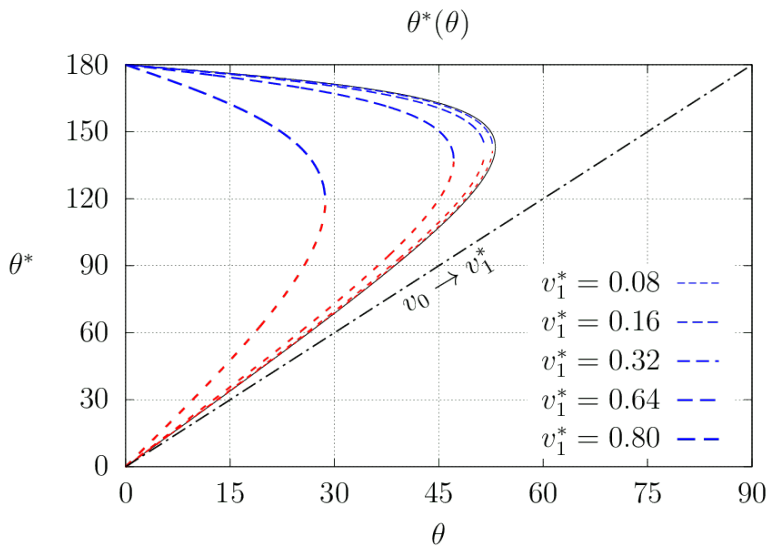



Рис. 8. Связь $\theta^*$ и $\theta$ в релятивистском случае при $v_0/v_1^* = 10/8$

## 5. Заключение

Таким образом, в данной работе на основе кинематического подхода изучены некоторые особенности углов вылета дочерних частиц, рождённых в процессах распада. Сформулированы и доказаны одно утверждение и две основные теоремы, описывающие кинематику реакций распада в нерелятивистском и релятивистском случаях. Получены и детально проанализированы пять следствий, позволяющие определять максимальные углы вылета рождённых частиц, наблюдаемые в *л*-системе. Установлена связь между углами вылета частиц в *ц*-системе и соответствующими им углами, регистрируемыми в *л*-системе. Показано, что характер этой связи существенно зависит не только от отношения скоростей материнских и дочерних частиц, но и от их абсолютных значений.

В ходе анализа зависимостей $\theta^*(\theta)$ выяснено, что в случае $v_0 > v_1^*$ дочерние частицы в *л*-системе наблюдаются вылетевшими только в пределах узкого конуса с раствором, направленным по ходу движения материнской частицы. Этот результат имеет место и в релятивистском, и в нерелятивистском подходе, однако релятивистская теория уточняет его, существенно сокращая область наблюдаемых углов раствора данных конусов.

Кроме того, установлено, что в существенно релятивистской и ультрарелятивистской областях дочерние частицы в *л*-системе в случае $v_0 < v_1^*$ могут наблюдаться вылетающими в пределах двух конусов, направленных растворами по ходу и против хода движения материнской частицы. Этот результат не имеет места в нерелятивистском пределе и является отличительной чертой релятивистского расчёта.

## Список источников


1. **Широков Ю. М., Юдин Н. П.** Ядерная физика. М.: Наука, 1980. 728 с.

2. **Наумов А. И.** Физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: Просвещение, 1984. 384 с.

3. **Hofmann S., et al.** Proton radioactivity of $^{151}$Lu // *Z Physik A.* 1982. Vol. 305. Pp. 111–123.

4. **Giovinazzo J., et al.** Two-Proton Radioactivity of $^{45}$Fe // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. No 10. Art. N. 102501.

5. **Pfützner M., et al.** First evidence for the two-proton decay of $^{45}$Fe // *Eur Phys J A.* 2002. Vol. 14. Pp. 279–285.

6. **Rose H. J., Jones G. A.** A new kind of natural radioactivity // *Nature.* 1984. Vol. 307. Pp. 245–247.

7. **Александров Д. В. и др.** Наблюдение спонтанного вылета ядер $^{14}$C из $^{223}$Ra // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 40. С. 152–154.

8. **Оганесян Ю. Ц., Пенионжкевич Ю. Э., Григорьев В. А.** Физика тяжелых ионов и ее приложения. Дубна: ОИЯИ, 2021. 363 с.

9. **Нелипа Н. Ф.** Физика элементарных частиц. М.: Высшая школа, 1977. 608 с.

10. **Particle Data Group.** Review of Particle Physics // *Progress of Theoretical and Experimental Physics.* 2022. Vol. 2022. No 8. Art. N. 083C01.

11. **Балдин А. М. и др.** Кинематика ядерных реакций. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Атомиздат, 1968. 456 с.

12. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. Pp. 1–29.

13. **CMS collaboration, Chatrchyan S. et al.** Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. Pp. 30–61.

14. **CMS collaboration, Tumasyan A. et al.** Search for Higgs boson decays to a $Z$ boson and a photon in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // *J. High Energ. Phys.* 2023. Issue 5. No 233.

15. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Searches for exclusive Higgs and $Z$ boson decays into a vector quarkonium state and a photon using 139 fb$^{-1}$ of ATLAS $\sqrt{s} = 13$ TeV proton-proton collision data // *The European Physical Journal C.* 2023. Vol. 83. No 9. Art. N. 781.

16. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 536 с.

17. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. IV. / **Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Квантовая электродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 720 с.

18. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.

# References

1. **Shirokov Y. M., Yudin N. P.** *Yadernaya fizika* [Nuclear physics]. Moscow: Nauka, 1980. 728 p. (In Russ.)

2. **Naumov A. I.** *Fizika atomnogo yadra i elementarnykh chastits* [Physics of atomic nucleus and elementary particles]. Moscow: Prosveshenie, 1984. 384 p. (In Russ.)

3. **Hofmann S., et al.** Proton radioactivity of $^{151}$Lu. *Z Physik A.* 1982. Vol. 305. Pp. 111–123.

4. **Giovinazzo J., et al.** Two-Proton Radioactivity of $^{45}$Fe. *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. No 10. Art. N. 102501.

5. **Pfützner M., et al.** First evidence for the two-proton decay of $^{45}$Fe. *Eur Phys J A.* 2002. Vol. 14. Pp. 279–285.

6. **Rose H. J., Jones G. A.** A new kind of natural radioactivity. *Nature.* 1984. Vol. 307. Pp. 245–247.

7. **Alexandrov D. V. et al.**Observation of spontaneous departure of $^{14}$C nuclei from $^{223}$Ra. *Pis'ma v ZHETF* [Writings in ZhETF]. 1984. Vol. 40. Pp. 152–154. (In Russ.)

8. **Oganesyan Yu. Ts., Penionzhkevich Y. E., Grigoriev V. A.** *Fizika tyazhelykh ionov i yeye prilozheniya* [Physics of heavy ions and its applications]. Dubna: JINR, 2021. 363 p. (In Russ.)

9. **Nelipa N. F.** *Fizika elementarnykh chastits* [Physics of elementary particles]. Moscow: Vysshaya shkola, 1977. 608 p. (In Russ.)

10. **Particle Data Group.** Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics.* 2022. Vol. 2022. No 8. Art. N. 083C01.

11. **Baldin A. M. et al** *Kinematika yadernykh reaktsiy* [Kinematics of nuclear reactions]. 2nd ed., rev. and supplement. Moscow: Atomizdat, 1968. 456 p. (In Russ.)

12. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. Pp. 1–29.

13. **CMS collaboration, Chatrchyan S. et al.** Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett. B.* 2012. Vol. 716. Pp. 30–61.

14. **CMS collaboration, Tumasyan A. et al.** Search for Higgs boson decays to a $Z$ boson and a photon in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *J. High Energ. Phys.* 2023. Issue 5. No 233

15. **ATLAS Collaboration, Aad G. et al.** Searches for exclusive Higgs and $Z$ boson decays into a vector quarkonium state and a photon using 139 fb$^{-1}$ of ATLAS $\sqrt{s} = 13$ TeV proton-proton collision data. *The European Physical Journal C.* 2023. Vol. 83. No 9. Art. N. 781.

16. **Landau L. D., Lifshits E. M.** *Teoreticheskaya fizika. T. II. Teoriya polya* [Theoretical physics. V. II. Field theory]. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 536 p. (In Russ.)

17. **Landau L. D., Lifshits E. M.** Theoretical physics. V. IV. **Berestetsky V. B., Lifshits E. M., Pitaevsky L. P.** *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics]. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 720 p. (In Russ.)

18. **Landau L. D., Lifshits E. M.** *Teoreticheskaya fizika. T. I. Mekhanika* [Theoretical physics. V. I. Mechanics]. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 224 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Макаров Павел Андреевич / Pavel A. Makarov
к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник / Ph.D. in Physics and Mathematics, senior researcher
Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS
167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oplesnin str., 4

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 09.10.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 09.11.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 10.11.2023

ИНФОРМАТИКА

INFORMATICS

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.*
*Выпуск 4 (49)*
*Bulletin of Syktyvkar University.*
*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)*

Научная статья

УДК 004.021,630.431
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_29

# АНАЛИЗ ДАННЫХ О ЛЕСНЫХ ПОЖАРАХ В РЕСПУБЛИКЕ КОМИ С ПОМОЩЬЮ EXCEL И PYTHON

**Надежда Николаевна Бабикова, Надежда Олеговна Котелина, Фёдор Николаевич Тентюков**
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, valmasha@mail.ru

***Аннотация.*** В статье представлены результаты анализа данных о лесных пожарах в Республике Коми за 2010–2023 годы. Исследование проводилось при помощи табличного процессора Excel, библиотек Python: Scikit-learn, Pandas, Numpy, Openpyxl, Folium. Исследованы пространственно-временные особенности распределения пожаров по различным сочетаниям признаков: количество и площадь пожаров по месяцам и годам, средняя площадь пожара по лесничеству, причина пожара, уязвимость к пожарам, плотность пожаров в разрезе 32-х лесничеств республики. Для выявления лесничеств со схожими характеристиками использовался метод кластеризации $k$-means. Для определения зон с высокой плотностью пожаров, вызванных грозами, использовался метод пространственной кластеризации DBSCAN. На основе проведенного исследования разработаны лабораторные

© Бабикова Н. Н., Котелина Н. О., Тентюков Ф. Н., 2023.

работы, которые используются в процессе обучения студентов направления «Прикладная информатика» по дисциплинам «Интеллектуальный анализ данных», «Эконометрика: многомерный анализ данных».

***Ключевые слова:*** анализ данных, Python, кластеризация $k$-means, кластеризация DBSCAN, лесные пожары

***Для цитирования:*** Бабикова Н. Н., Котелина Н. О., Тентюков Ф. Н. Анализ данных о лесных пожарах в Республике Коми с помощью Excel и Python // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 4 (49). С. 29–46. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_29

Article

## Analysis of data on forest fires in the Komi Republic using Excel and Python

**Nadezhda N. Babikova, Nadezhda O. Kotelina, Fyodor N. Tentyukov**
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, valmasha@mail.ru

***Abstract.*** The article presents the results of data analysis on forest fires in the Komi Republic for 2010–2023. The study was carried out using the Excel spreadsheet processor and Python libraries: Scikit-learn, Pandas, Numpy, Openpyxl, Folium. The spatiotemporal features of the distribution of fires according to various combinations of characteristics were studied: number and area of fires by month and year, average area of fire in the forest district, cause of the fire, vulnerability to fires, density of fires in the context of 32 forest districts of the republic. To identify forest districts with similar characteristics, the $k$-means clustering method was used. The DBSCAN spatial clustering method was used to identify areas with a high density of fires caused by thunderstorms. Based on the research, laboratory works has been developed. Laboratory works are used in the process of training students of "Applied Informatics" department in the disciplines "Data Mining" and "Econometrics: Multidimensional Data Analysis".

***Keywords:*** data analysis, Python, $k$-means clustering, DBSCAN clustering, forest fires

***For citation:*** Babikova N. N., Kotelina N. O., Tentyukov F. N. Analysis of data on forest fires in the Komi Republic using Excel and Python. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 29–46. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_29

## 1. Введение

Государственное бюджетное учреждение Республики Коми «Территориальный фонд информации Республики Коми» (ГБУ РК «ТФИ РК») является региональным оператором инфраструктуры пространственных данных Республики Коми, держателем картографического фонда и государственных геоинформационных ресурсов автоматизированной геоинформационной кадастровой системы Республики Коми. Одним из проектов ГБУ РК «ТФИ РК» является отраслевая геоинформационная система регионального значения – платформа «Атлас», которая обеспечивает хранение, поиск, визуализацию, обработку и анализ пространственных данных на основе геоинформационных и телекоммуникационных технологий. В состав платформы «Атлас» входит информационно-аналитическая система «Лесные пожары». ГБУ РК «ТФИ РК» предоставил Сыктывкарскому государственному университету описание API к ИАС «Лесные пожары» для использования в учебном процессе и научно-исследовательской работе.

Лесные пожары причиняют существенный ущерб окружающей среде и народному хозяйству. На количество и площадь лесных пожаров влияет множество факторов: характер и структура растительного покрова, геоморфологические условия, густота гидрологической и дорожной сети, плотность населения, погодно-климатические условия, качество систем мониторинга и тушения пожаров. Сочетание факторов индивидуально для каждого региона. Выявление региональных особенностей динамики лесных пожаров позволяет разрабатывать более эффективные противопожарные мероприятия [1; 2].

В статье представлены результаты анализа пространственно-временных особенностей динамики лесных пожаров на территории Республики Коми с помощью табличного процессора Excel и библиотек языка Python.

## 2. Материалы и методы

Анализ динамики лесных пожаров Республики Коми проведен на основе данных ИАС «Лесные пожары» за 2010–2023 годы [3]. Данные были извлечены с помощью библиотеки Requests для выполнения HTTP-запросов на языке Python и сохранены в файле Excel.

В данном исследовании использованы показатели: id пожара (целое число), широта (WGS-84, вещественное число), долгота (WGS-84, вещественное число), дата обнаружения (строка в формате «DD.MM.YYYY»), причина возникновения пожара (строка), метод обнаружения (строка), площадь пожара в га (вещественное число), класс плотности населения (целое число от 0 до 4), название лесничества (строка), площадь лесничества в га (вещественное число). Были также рассчитаны дополнительные показатели: дата обнаружения пожара переведена в формат даты, месяц обнаружения (целое число), год обнаружения (целое число), уязвимость лесничества к пожарам (отношение площади пожаров к площади лесничества), плотность пожаров для лесничества (отношение количества пожаров к площади лесничества). Уязвимость к пожарам и плотность пожаров были рассчитаны на 100 га для повышения наглядности, так как без этого значения близки к 0.

В сформированном наборе данных показатель «класс плотности населения» содержал три пропуска. Они были заполнены методом ближайшего соседа: проставлено значение показателя ближайшего по географическим координатам пожара.

Для выявления лесничеств со схожими характеристиками использовался метод кластеризации $k$-means [4]. Для определения зон с высокой плотностью пожаров, вызванных грозами, — метод пространственной кластеризации DBSCAN [5].

Исследование проводилось при помощи табличного процессора Excel, библиотек Python Pandas, Scikit-learn, Numpy, Openpyxl, Matplotlib и Folium.

## 3. Результаты и обсуждение

За 2010–2023 годы в Республике Коми произошло 3553 пожара общей площадью 190671 га, средняя площадь пожара составила 54 га (рис. 1). Пики количества пожаров приходятся на 2010, 2011, 2013 и 2022 годы. Это объясняется в первую очередь погодными условиями: жарким летом с незначительным количеством осадков.

Рис. 1. Количество и площадь лесных пожаров в Республике Коми по годам

Между количеством пожаров и площадью пожаров нет прямой зависимости. Распределение пожаров по площади очень неравномерное: на 10 % от числа самых крупных пожаров приходится около 88 % общей площади пожаров (рис. 2).

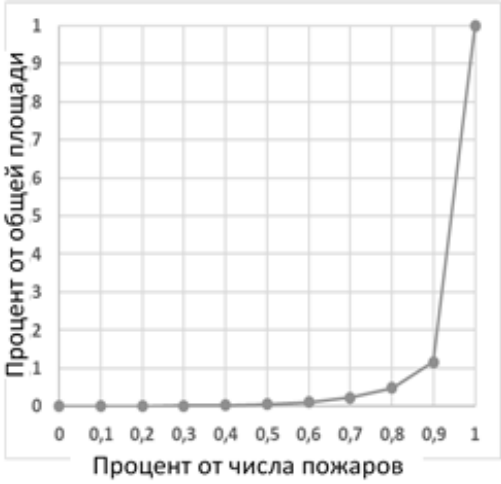



Рис. 2. Кривая Лоренца, характеризующая распределение площади пожаров

За редким исключением, пожары в Республике Коми происходят с мая по сентябрь. Чаще всего пики количества пожаров и общей площади пожаров приходятся на июль, но в жаркие 2010, 2013 и 2022 годы максимальные площади пожаров пришлись на август. В целом за 2010–2023 годы больше всего пожаров произошло в июле — 48 %, на июль приходится и максимальная доля площади пожаров — 51,3 % (рис. 3).

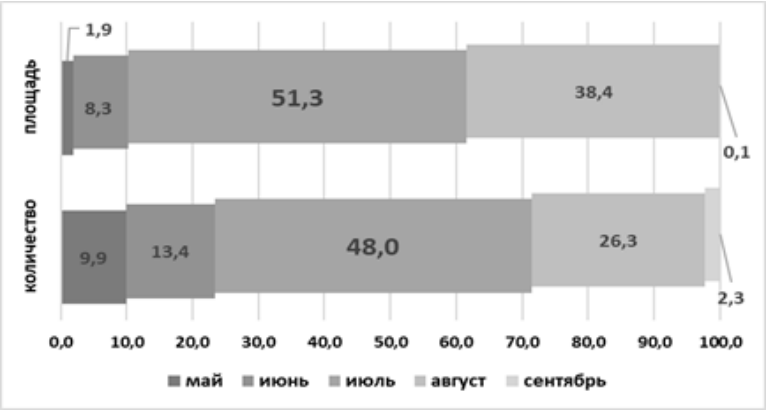



Рис. 3. Распределение количества и площади пожаров по месяцам

В Республике Коми действуют 32 лесничества (табл. 1). Жирным шрифтом в таблице выделены значения, которые относятся к первым 15 % наибольших значений в каждом столбце (площадь лесничества не рассматривается).

*Таблица 1*

**Показатели лесничеств**

| Лесничество | Площадь пожаров | Площадь лесничества | Уязвимость на 100 га | Количество пожаров | Плотность пожаров на 100 га | Средняя площадь пожара |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
| Айкинское | 813,9 | 390350 | 0,2085 | 42 | 0,010760 | 19,38 |
| Вуктыльское | 2547,2 | 1308375 | 0,1947 | 79 | 0,006038 | 32,24 |
| Ёртомское | 6840,4 | 1109374 | 0,6166 | 110 | 0,009916 | 62,19 |
| Железнодорожное | 7583,5 | 1449543 | 0,5232 | **205** | 0,014142 | 36,99 |
| Ижемское | 10255,4 | 1754321 | 0,5846 | 168 | 0,009576 | 61,04 |
| Каджеромское | 10699,0 | 1295425 | 0,8259 | 132 | 0,010190 | 81,05 |
| Кажимское | 943,1 | 408776 | 0,2307 | 49 | 0,011987 | 19,25 |
| Койгородское | 464,3 | 620625 | 0,0748 | 67 | 0,010796 | 6,93 |
| Комсомольское | 3876,7 | 1134176 | 0,3418 | 138 | 0,012167 | 28,09 |
| Корткеросское | 345,8 | 475915 | 0,0727 | 76 | 0,015969 | 4,55 |
| Летское | 74,3 | 434432 | 0,0171 | 8 | 0,001841 | 9,29 |
| Локчимское | 1935,1 | 405668 | 0,4770 | 76 | 0,018735 | 25,46 |
| Междуреченское | **19221,4** | 958415 | **2,0055** | 106 | 0,011060 | **181,33** |

*Окончание табл. 1*

| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Мещурское | **17729,0** | 1162197 | **1,5255** | 108 | 0,009293 | **164,16** |
| Печоро-Илычское | 1433,6 | 1179556 | 0,1215 | 87 | 0,007376 | 16,48 |
| Печорское | 4622,7 | 4256779 | 0,1086 | 111 | 0,002608 | 41,65 |
| Помоздинское | 456,0 | 680942 | 0,0670 | 58 | 0,008518 | 7,86 |
| Прилузское | 948,2 | 810252 | 0,1170 | 64 | 0,007899 | 14,82 |
| Пруптское | 3249,5 | 483075 | 0,6727 | 87 | 0,018010 | 37,35 |
| Сосногорское | 14803,2 | 1618531 | **0,9146** | **241** | 0,014890 | 61,42 |
| Сторожевское | 360,4 | 835940 | 0,0431 | 80 | 0,009570 | 4,51 |
| Сыктывдинское | 274,2 | 478891 | 0,0573 | 59 | 0,012320 | 4,65 |
| Сыктывкарское | 630,0 | 195628 | 0,3221 | 117 | **0,059807** | 5,38 |
| Сысольское | 149,4 | 579101 | 0,0258 | 31 | 0,005353 | 4,82 |
| Троицко-Печорское | 2219,4 | 951119 | 0,2333 | **219** | **0,023026** | 10,13 |
| Удорское | **35660,2** | 1475043 | **2,4176** | **214** | 0,014508 | **166,64** |
| Усинское | 6759,2 | 2990489 | 0,2260 | 155 | 0,005183 | 43,61 |
| Усть-Куломское | 327,3 | 426848 | 0,0767 | 157 | **0,036781** | 2,08 |
| Усть-Немское | 3534,0 | 1001218 | 0,3530 | 155 | 0,015481 | 22,80 |
| Усть-Цилемское | **21767,2** | 4037099 | 0,5392 | 151 | 0,003740 | **144,15** |
| Ухтинское | 8509,1 | 1280133 | 0,6647 | 160 | 0,012499 | 53,18 |
| Чернамское | 45,4 | 83587 | 0,0544 | 23 | **0,027516** | 1,98 |

Абсолютным лидером по высоким показателям является Удорское лесничество, только плотность пожаров в лесничестве на среднем уровне. Лидером по низким показателям является Летское лесничество: за 14 лет в нем произошло всего восемь пожаров.

Для выявления лесничеств, схожих по своим характеристикам, применялась кластеризация методом $k$-means с помощью библиотеки Scikit-learn.

Разделение лесничеств на три кластера по площади пожаров, числу пожаров, средней площади пожара (листинг 1) представлено на рис. 4. Для визуализации результатов кластеризации построена интерактивная карта с помощью библиотеки Folium (рис. 5).

Центр кластера — это среднее арифметическое значений показателей всех лесничеств, вошедших в кластер. Кластер с центром (23593,9; 145; 164,1) состоит из четырех лесничеств на северо-западе республики, отмечен на карте вертикальной штриховкой. Эти лесничества характеризуются большой площадью пожаров, средним количеством пожаров, большой средней площадью пожара. Кластер с центром (6669,8; 163; 42,0) состоит из 13 лесничеств, отмечен на карте диагональной штри-

ховкой. Эти лесничества характеризуются средней площадью пожаров, большим количеством пожаров, умеренной средней площадью пожара. Кластер с центром (918,0; 63; 13,4) состоит из 15 лесничеств на юге республики, отмечен на карте горизонтальной штриховкой. Эти лесничества характеризуются относительно низкими показателями.

*Листинг 1*

**Кластеризация лесничеств при помощи алгоритма $k$-means**

```
# импорт библиотек
from sklearn.cluster import KMeans
import numpy as np
from openpyxl import load_workbook
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns; sns.set()
from mpl_toolkits import mplot3d
plt.style.use('seaborn-whitegrid')

#  загружаем файл Excel
wb = load_workbook(filename='tab1.xlsx')
sheet = wb.worksheets[0]
data = np.array([row for row in sheet.iter_rows(min_row=1,
                max_row= 32, min_col=2, max_col= 4,
                values_only=True)], dtype=np.float32)

# нормализуем данные
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler
scaler = MinMaxScaler()
lesn = scaler.fit_transform(data)

# кластеризуем
km = KMeans(n_clusters=3,init = 'random',n_init=5,
            max_iter = 15,random_state=21)
res = km.fit(lesn)
centers = km.cluster_centers_
# записываем номера кластеров в массив
res = np.array(res.labels_)

# отображаем на данные на графике
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.scatter3D(data[:,0], data[:,1], data[:,2], alpha=1.,
s=25*res+15, c=res)
plt.show()
```

*Окончание листинга 1*

```
# преобразовываем центры кластеров в исходный масштаб
c = centers*(np.max(data,axis=0)-np.min(data,axis=0))+\
    np.min(data,axis=0)
print(res)
print(c)

# сохраняем массив с номерами кластеров
for i in range(32):
    sheet.cell(i+1, 7, value=res[i])
wb.save('tab1.xlsx')
```

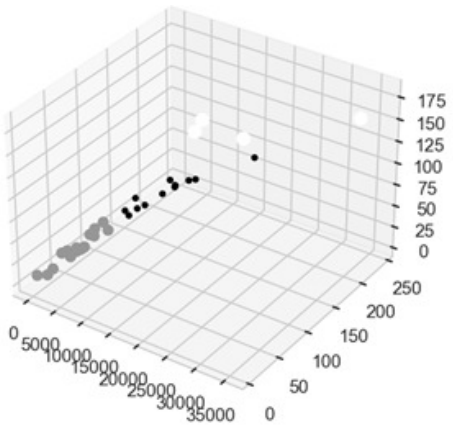



Рис. 4. Кластеризация лесничеств по площади пожаров, количеству пожаров и средней площади пожара

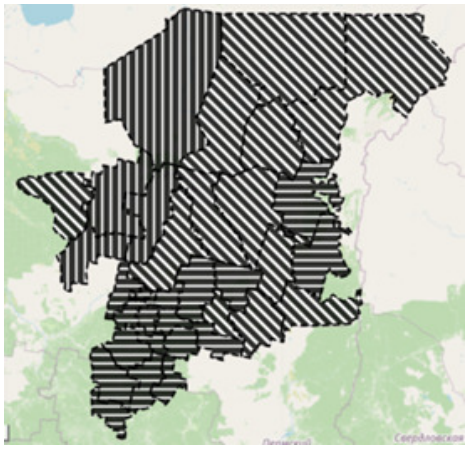


Рис. 5. Карта Республики Коми с лесничествами, разделенными на три кластера по площади пожаров, количеству пожаров и средней площади пожара

На рисунках 6 и 7 представлено разделение лесничеств на три кластера по уязвимости к пожарам и плотности пожаров, т. е. с учетом площади лесничеств. Уязвимость находится в диапазоне от 0,0171 до 2,4176, плотность — от 0,00184 до 0,05981. Большинство лесничеств попадает в кластер (горизонтальная штриховка) с центром (0,3196; 0,0107). Три лесничества — Междуреченское, Мещурское и Удорское — образуют кластер (вертикальная штриховка) с центром (1,9828; 0,0116): при сравнимой плотности пожаров уязвимость к пожарам этих лесничеств значительно выше. Три лесничества — Сыктывкарское, Усть-Куломское и Чернамское – характеризуются высокой плотностью пожаров и образуют кластер (диагональная штриховка) с центром (0,1510; 0,0414).

Можно сказать, что с точки зрения уязвимости и плотности шесть лесничеств находятся в несколько более сложной ситуации, чем остальные.

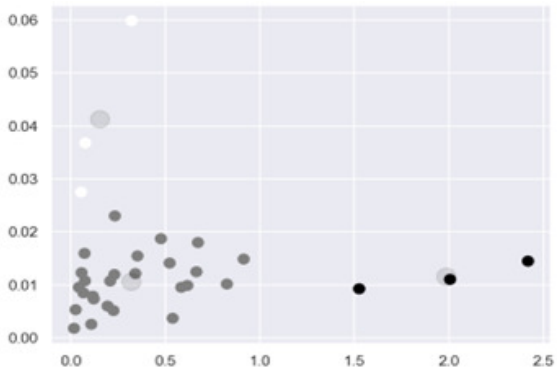



Рис. 6. Кластеризация лесничеств по уязвимости к пожарам и плотности пожаров

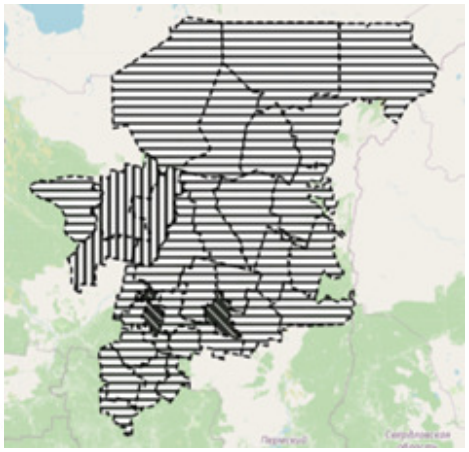


Рис. 7. Карта Республики Коми с лесничествами, разделенными на три кластера по уязвимости к пожарам и плотности пожаров

За период 2010–2023 годов причиной 49 % лесных пожаров в Республике Коми являлись грозы, 27 % пожаров случилось по вине местного населения, причины возникновения 22 % пожаров не были выявлены, 2 % пожаров произошли по прочим причинам.

Начиная с 2016 года причины всех пожаров установлены, далее анализ причин пожаров произведен за период 2016–2023 годов. Грозы стали причиной **65,5 %** пожаров, по вине местного населения случилось 33,7 % пожаров, 0,8 % пожаров произошли по иным причинам. Площадь «грозовых» пожаров составила **95,8 %** от общей площади пожаров. Средняя площадь пожара, вызванного грозами, составляет 86 га. А средняя площадь пожара, произошедшего по вине людей, в 11,8 раз меньше — 7,3 га.

Разделение лесничеств на три кластера по доле «грозовых» пожаров в общем количестве пожаров по лесничеству и разделение лесничеств на три кластера по доле площади, пройденной «грозовыми» пожарами, в общей площади пожаров по лесничеству представлено в табл. 2. В 12 лесничествах в общей площади пожаров с 2016 по 2023 год более 95 % приходится на пожары, вызванные грозами. В двух лесничествах — Летском и Чернамском — за этот период не произошло ни одного «грозового» пожара.

*Таблица 2*

**Кластеризация лесничеств по доле пожаров, вызванных грозами**

| Кластеры по доле количества пожаров | | | Кластеры по площади пожаров | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Лесничество | Доля | Центр кластера | Лесничество | Доля | Центр кластера |
| Летское | 0,000 | 0,148 | Летское | 0,000 | 0,068 |
| Чернамское | 0,000 | | Чернамское | 0,000 | |
| Сыктывкарское | 0,059 | | Сыктывкарское | 0,002 | |
| Усть-Куломское | 0,127 | | Сторожевское | 0,083 | |
| Айкинское | 0,154 | | Айкинское | 0,096 | |
| Сыктывдинское | 0,235 | | Усть-Куломское | 0,226 | |
| Железнодорожное | 0,273 | | Пруптское | 0,431 | 0,565 |
| Корткеросское | 0,333 | | Помоздинское | 0,461 | |
| Троицко-Печорское | 0,426 | 0,565 | Корткеросское | 0,491 | |
| Койгородское | 0,467 | | Сыктывдинское | 0,539 | |
| Помоздинское | 0,467 | | Усть-Немское | 0,553 | |
| Кажимское | 0,500 | | Сысольское | 0,618 | |
| Сторожевское | 0,500 | | Троицко-Печорское | 0,637 | |
| Пруптское | 0,538 | | Ухтинское | 0,670 | |
| Усть-Немское | 0,592 | | Кажимское | 0,689 | |
| Печоро-Илычское | 0,615 | | Койгородское | 0,819 | 0,939 |
| Сосногорское | 0,616 | | Каджеромское | 0,821 | |
| Прилузское | 0,636 | | Прилузское | 0,837 | |
| Ухтинское | 0,638 | | Печоро-Илычское | 0,844 | |
| Сысольское | 0,667 | | Сосногорское | 0,896 | |
| Удорское | 0,680 | | Комсомольское | 0,952 | |
| Междуреченское | 0,724 | 0,841 | Усинское | 0,966 | |
| Каджеромское | 0,758 | | Мещурское | 0,971 | |
| Локчимское | 0,783 | | Междуреченское | 0,971 | |
| Вуктыльское | 0,800 | | Железнодорожное | 0,971 | |
| Мещурское | 0,813 | | Локчимское | 0,977 | |
| Комсомольское | 0,854 | | Удорское | 0,982 | |
| Печорское | 0,857 | | Ёртомское | 0,984 | |
| Усинское | 0,890 | | Вуктыльское | 0,989 | |
| Ёртомское | 0,917 | | Печорское | 0,992 | |
| Усть-Цилемское | 0,925 | | Усть-Цилемское | 0,993 | |
| Ижемское | 0,932 | | Ижемское | 0,994 | |

Метод кластеризации $k$-means относится к разделительным методам, основанным на поэтапном улучшении разбиения исходных данных на непересекающиеся группы. Для группировки пространственных данных больше подходят алгоритмы кластеризации на основе плотности. Для выявления размещения зон, в которых чаще всего случаются «грозовые» пожары, был использован алгоритм DBSCAN библиотеки Scikit-learn. В этом алгоритме количество кластеров определяется в процессе кластеризации.

Алгоритм DBSCAN (Density-based spatial clustering of applications with noise, пространственная кластеризация приложений с шумом) рассматривает кластеры как области высокой плотности, разделенные областями низкой плотности. В алгоритме есть два параметра: min_samples и eps. Более высокие значения min_samples или более низкие значения eps указывают на более высокую плотность, необходимую для формирования кластера.

За период 2010–2023 годов произошло 1746 пожаров, для которых установлена причина «от гроз». Координаты пожаров размещены в файле f-geo.xlsx. Значения параметров min_samples и eps определяются эмпирически (табл. 3). Значение eps = 0,05 соответствует приблизительно 5,5 км.

*Таблица 3*

**Результаты кластеризации DBSCAN при различных значениях параметров**

| Параметры | | Номера кластеров и количество элементов в них |
|---|---|---|
| eps | min_samples | |
| *1* | *2* | *3* |
| 0,05 | 20 | {-1: 1746} |
| 0,05 | 10 | {-1: 1725, 1: 11, 0: 10} |
| 0,1 | 10 | {-1: 1657, 1: 20, 3: 16, 4: 16, 0: 15, 2: 14, 5: 8} |
| 0,1 | 20 | {-1: 1746} |
| 0,2 | 20 | {-1: 1586, 0: 62, 3: 27, 2: 25, 1: 23, 4: 23} |
| 0,2 | 30 | {-1: 1746} |
| 0,3 | 30 | {-1: 1519, 0: 137, 3: 30, 1: 30, 2: 30} |
| 0,3 | 40 | {-1: 1672, 0: 74} |
| 0,4 | 40 | {-1: 1484, 0: 175, 1: 87} |

*Окончание табл. 3*

| *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|
| 0,4 | 50 | {-1: 1591, 0: 155} |
| 0,5 | 50 | {-1: 1225, 0: 270, 2: 131, 1: 120} |
| 0,5 | 100 | {-1: 1746} |
| 0,6 | 50 | {-1: 633, 0: 389, 1: 251, 2: 204, 3: 198, 4: 71} |
| 0,6 | 100 | {-1: 1551, 0: 195} |
| 0,9 | 100 | {-1: 517, 0: 513, 2: 481, 1: 235} |

Кластеризация при eps = 0,5, min_samples = 50 (листинг 2) определила три кластера (270, 131, 120 пожаров), 1225 пожаров трактуются как шум (рис. 8). Кластеризация при eps = 0,6, min_samples = 100 (рис. 9) выделила один участок с высокой плотностью «грозовых» пожаров — для каждого из 195 пожаров в окрестности радиуса eps = 0,6 находится не менее 100 пожаров. Если снизить требование к количеству пожаров в заданной окрестности eps = 0,6 до 50, получим пять кластеров (рис. 10).

*Листинг 2*

**Кластеризация при помощи алгоритма DBSCAN при eps = 0,5, min_samples = 50**

```
# импорт библиотек
import numpy as np
from openpyxl import load_workbook
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns; sns.set()
from sklearn.cluster import DBSCAN

#  загружаем файл Excel
wb = load_workbook(filename='f-geo.xlsx')
sheet = wb.worksheets[0]
data = np.array([row for row in sheet.iter_rows(min_row=2,
                max_row= 1747, min_col=2, max_col= 3,
                values_only=True)], dtype=np.float32)
```

*Окончание листинга 2*

```
# кластеризуем
clusters = DBSCAN(eps = 0.5, min_samples = 50).fit(data)

# получаем метки кластеров
cl_labels = clusters.labels_

# выводим номера кластеров, значение -1 соответствует точкам шума
print('cluster numbers',set(cl_labels))
from collections import Counter
print(Counter(clusters.labels_))

# выводим результаты кластеризации
sns.scatterplot(data = data, x = data[:,0], y =data[:,1],
                hue = cl_labels, size = cl_labels,
                sizes=(10, 200),  legend = "full",
                palette = "deep")
plt.show()

# сохраняем массив с номерами кластеров
for i in range(1746):
    sheet.cell(i+2, 5, value=cl_labels[i])
wb.save('f-geo.xlsx')
```

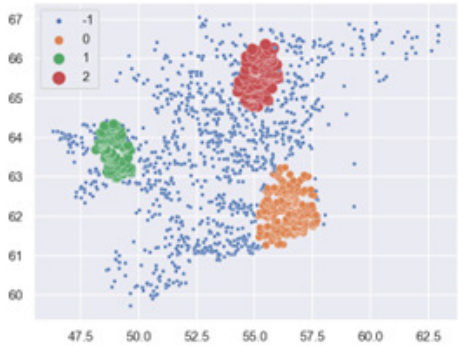



Рис. 8. Выделение участков высокой плотности «грозовых» пожаров (eps = 0,5, min_samples = 50)

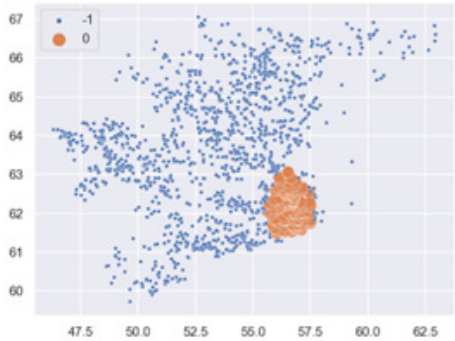



Рис. 9. Выделение участков высокой плотности «грозовых» пожаров (eps = 0,6, min_samples = 100)

Рис. 10. Выделение участков высокой плотности «грозовых» пожаров (eps = 0,6, min_samples = 50)

## 4. Заключение

Грозы стали причиной **65,5 %** пожаров в 2016–2023 годах. Площадь «грозовых» пожаров составила **95,8 %** от общей площади пожаров. При этом **91 %** «грозовых» пожаров произошел в местностях с нулевой плотностью населения.

В коллективной монографии 2012 года Института глобального климата и экологии Федеральной службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды и Российской академии наук указывается: «На пожары, вызванные грозами, в среднем по России приходится 10 % общего числа лесных пожаров. ... Проявляется значительная зависимость интенсивности грозовой деятельности и пожарной активности от широты. ... Наибольшая доля пожаров, вызванных молниями, в общем числе пожаров приходится на интервал широт 60–65° с. ш., она составляет около 39 %» [6, с. 268]. Территория Республики Коми простирается между 59° 12’ и 68° 25’ северной широты. Таким образом, значительное количество «грозовых» пожаров в Республике Коми является нормой.

Предсказать, куда ударит молния, и сократить количество «грозовых» пожаров — затруднительно. Уменьшить площадь «грозовых» пожаров можно за счет совершенствования систем раннего обнаружения пожаров в труднодоступных местностях.

На основе проведенного исследования разработаны лабораторные работы, которые используются в процессе обучения студентов направления «Прикладная информатика» по дисциплинам «Интеллектуальный анализ данных», «Эконометрика: многомерный анализ данных». Опыт работы с реальными данными в процессе обучения повышает интерес студентов и мотивацию к более глубокому изучению предмета.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность за сотрудничество Государственному бюджетному учреждению Республики Коми «Территориальный фонд информации Республики Коми» в лице директора Терентьева Алексея Витальевича и заведующего отделом программирования Ложкина Виктора Владимировича.

## Список источников

1. **Колеров Д. А.** Совершенствование методов мониторинга и реагирования на лесные пожары в Республике Коми (на примере искусственного интеллекта) // *ОБЖ: Основы безопасности жизни.* 2022. № 1. С. 56–59.

2. **Волокитина А. В., Софронова Т. М., Корец М. А.** Региональные шкалы оценки пожарной опасности в лесу: усовершенствованная методика составления // *Сибирский лесной журнал.* 2017. № 2. С. 52–61. DOI: 10.15372/SJFS20170206.

3. Геоинформационный портал Республики Коми [Электронный ресурс]. URL: https://gis.rkomi.ru/ (дата обращения: 11.11.2023).

4. **Котелина Н. О., Матвийчук Б. Р.** Кластеризация изображения методом k-средних // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 3 (32). С. 101–112.

5. Scikit-learn documentation [Электронный ресурс]. URL: https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html#hdbscan (дата обращения: 11.11.2023).

6. **Анисимов О. А., Борщ С. В., Георгиевский В. Ю. и др.** Методы оценки последствий изменения климата для физических и биоло-

гических систем / Институт глобального климата и экологии Федеральной службы по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды и Российской академии наук. М.: Научно-исследовательский центр космической гидрометеорологии «Планета», 2012. 512 с.

# References

1. **Kolerov D. A.** Improving methods for monitoring and responding to forest fires in the Komi Republic (using the example of artificial intelligence). *OBZH: Osnovy bezopasnosti zhizni* [FLS. Fundamentals of Life Safety]. 2022. No 1. Pp. 56–59. (In Russ.)

2. **Volokitina A. V., Sofronova T. M., Korec M. A.** Regional Scales of Fire Danger Rating in the Forest: Improved Technique. *Sibirskij lesnoj zhurnal* [Siberian Journal of Forest Science]. 2017. No 2. Pp. 52–61. DOI: 10.15372/SJFS20170206. (In Russ.)

3. *Geoinformatsionnyy portal Respubliki Komi* [Geoinformation portal of the Komi Republic] [Electronic resource]. Available at: https://gis.rkomi.ru/ (accessed: 11.11.2023). (In Russ.)

4. **Kotelina N. O., Matvijchuk B. R.** Image clustering by the k-means method. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of the Syktyvkar University. Ser. 1: Math. Mechanics. Informatics]. 2019. No 3 (32). Pp. 101–112. (In Russ.)

5. *Scikit-learn documentation* [Electronic resource]. Available at: https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html#hdbscan (accessed: 11.11.2023).

6. **Anisimov O. A., Borsch S. V., Georgievsky V. Yu. et al.** *Metody ocenki posledstvij izmeneniya klimata dlya fizicheskih i biologicheskih sistem* [Methods for assessing the effects of climate change on physical and biological systems]. Institute of Global Climate and Ecology of the Federal Service for Hydrometeorology and Environmental Monitoring and the Russian Academy of Sciences. Moscow: Scientific Research Center of Space Hydrometeorology «Planet», 2012. 512 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Бабикова Надежда Николаевна / Nadezhda N. Babikova
к.пед.н., доцент, доцент кафедры прикладной информатики / PhD (Pedagogy), Associate Professor, Associate Professor of Applied Informatics Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Котелина Надежда Олеговна / Nadezhda O. Kotelina
к.ф.-м.н., доцент кафеды прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Тентюков Фёдор Николаевич / Fyodor N. Tentyukov
обучающийся бакалавриата/ undergraduate student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 27.11.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 01.12.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 06.12.2023

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

THEORY AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.*
*Выпуск 4 (49)*
*Bulletin of Syktyvkar University.*
*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)*

Научная статья

УДК 378, 520.88
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_47

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ

**Андрей Васильевич Ермоленко**
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, ea74@list.ru

***Аннотация.*** В статье обсуждаются вопросы знакомства студентов с математическим моделированием на младших курсах. Предлагаются способы знакомства через индивидуальную подготовку, привитие интереса через исторические и филосовские экскурсы, знакомство с математическим моделированием на фундаментальных дисциплинах. Рассматриваются задачи, позволяющие студентам познакомиться с моделированием на ранних курсах. В качестве примера рассмотрена математическая модель Лотки – Вольтера.

***Ключевые слова:*** численные методы, подготовка научных кадров, модель Лотки – Вольтера, математическое моделирование

***Для цитирования:*** Ермоленко А. В. Введение в теорию математического моделирования при обучении студентов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 4 (49). С. 47–58. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_47

© Ермоленко А. В., 2023.

Article

**Introduction to the theory of mathematical modeling when teaching students**

**Andrey V. Yermolenko**
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

***Abstract.*** The article discusses the issues of introducing students to mathematical modeling in junior years. Ways of getting to know each other through individual training, instilling interest through historical and philosophical excursions, and familiarization with mathematical modeling in fundamental disciplines are proposed. Problems that allow students to become familiar with modeling in early courses are considered. As an example, the Lotka-Voltaire mathematical model is considered.

***Keywords:*** numerical methods, training of scientific personnel, Lotka-Voltaire model, mathematical modeling

***For citation:*** Yermolenko A. V. Introduction to the theory of mathematical modeling when teaching students. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 47–58. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_47

## 1. Введение

В Сыктывкарском университете работают представители научной школы механики академика В. В. Новожилова [1], которые занимаются математическим моделированием в области теорий пластин и оболочек, см., например, [2]. Однако данная тематика зачастую отпугивает студентов-математиков, так как требует достаточно высокого порога вхождения — необходимо знание дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Численные методы», «Уравнения математической физики», которые изучаются на 2-м и 3-м курсах. Возникают вопросы: как вводить студентов в тематику научной работы? Как привить интерес к математическому моделированию?

С учетом сказанного ставится цель — сформулировать собственное видение процесса вовлечения студентов в научную деятельность в области математического моделирования.

## 2. Материалы и методы

Данное исследование построено на базе использования теоретического и практического материалов. Применение теоретического метода в совокупности с преподавательским опытом позволило сформулировать рекомендации в области вовлечения обучающихся в научную деятельность.

## 3. Результаты

### 3.1. Особенности знакомства с математическим моделированием

Знакомство с математическим моделированием студентов направлений «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», как правило, начинается со второго курса в рамках выполнения курсовых работ по дисциплинам «Технологии программирования», «Дифференциальные уравнения». При этом полноценное понимание математического (и компьютерного) моделирования приходит к студентам только на 3-м курсе после изучения специализированных дисциплин и выполнения курсовых работ [3].

Причины неспособности студентов в массе своей к научной работе на ранних курсах видятся в следующем:

1. Недостаточная школьная математическая и компьютерная подготовка, которая не позволяет усваивать математический материал на высоком уровне абстракции.

2. Низкая заинтересованность студентов. Выражается в том, что большинство студентов не видят цели в выполнении научной работы, так как это требует дополнительных усилий, а также отсутствует мгновенная отдача.

3. Сложность подведения студентов к решению актуальных задач, так как для полного понимания желательно изучить ряд дисциплин старших курсов.

Существует ряд работ, предлагающих пути устранения данных причин, см., например [3–5]. Кратко рекомендации можно сформулировать так:

- привитие интереса к науке через исторические или философские микроэкскурсы, например [6];

- включение элементов математического моделирования на фундаментальных математических предметах, практических занятиях по программированию;
- участие обучающихся в молодежных конференциях и чемпионатах по программированию, начиная с 1-го курса;
- использование индивидуальной траектории обучения на основе удачных практических наработок педагога.

Таким образом, первые две рекомендации можно свести к тому, что интерес к науке в первую очередь должен формироваться всеми педагогами, участвующими в учебном процессе, это не должна быть обязанность только куратора или заведующего кафедрой. Это может выражаться во введении отдельных лекций, или в интересных замечаниях на занятиях, или же в объяснении практического применения формул.

Студентам с первого курса также должен прививаться интерес к научным и научно-практическим исследованиям через олимпиады по программированию, кружковой деятельности, участие в конференциях.

При этом очень важным является индивидуальная работа со студентами. В работе [3] описан процесс индивидуального знакомства студентов с математическими моделями механики пластин и оболочек. Положительным опытом такого подхода стало то, что два студента стали стипендиатами премий Правительства и Президента РФ – Ю. Жибалова и Н. Филиппова [7].

### 3.2. Пример простого исследования методов решения дифференциальных уравнений

Кроме решения задач механики пластин и оболочек с ранних курсов можно практически изучать известные математические модели. Например, к конференции «Математическое моделирование и информационные технологии» студентом подготовлен доклад по изучению погрешности методом Эйлера решения дифференциального уравнения. Учитывая, что работу выполняет студент первого курса, пришлось на этапе объяснения модели раскрыть, что такое дифференциальное уравнение, что является его решением. Аналитические методы решения дифференциальных уравнений не рассматривались, однако учитывая, что на первом курсе уже изучается дисциплина «Технология программирования», итерационная схема метода оказалась достаточно понятной. Далее с использованием языка программирования Python [8] схема Эйлера

была реализована. При этом при использовании различных разбиений подтверждается известный факт – метод Эйлера является методом 1-го порядка и имеет погрешность $O(h)$.

Дальнейшим изучением математического моделирования с использованием дифференциальных уравнений стала работа [9], в которой изучается модель «Хищник – жертва» (см. листинг 1). Студент разобрался с моделью, написал небольшую программу на языке Python. При этом первоначально был построен график зависимости популяций хищников и жертв от времени (см. рис. 1).

*Листинг 1*

**Код программы**

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def f(t,x,y):
return alpha * x - beta * x * y
def g(t,x,y):
return - gamma * y + delta * x * y

t0, A = 0, 35
n = 1000
h = A / n
alpha = gamma = 0.5
beta = delta = 0.002
t=[t0 + h * i for i in range(n+1)]
x=[500]
y=[501]
for i in range(1, n + 1):
x.append(x[i - 1] + h * f(t[i - 1], x[i - 1], y[i - 1]))
y.append(y[i - 1] + h * g(t[i - 1], x[i - 1], y[i - 1]))
plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y,linestyle="dashed")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x, y")
plt.title("Модель Хищник-жертва. Метод Эйлера")
plt.grid()
plt.show()
```

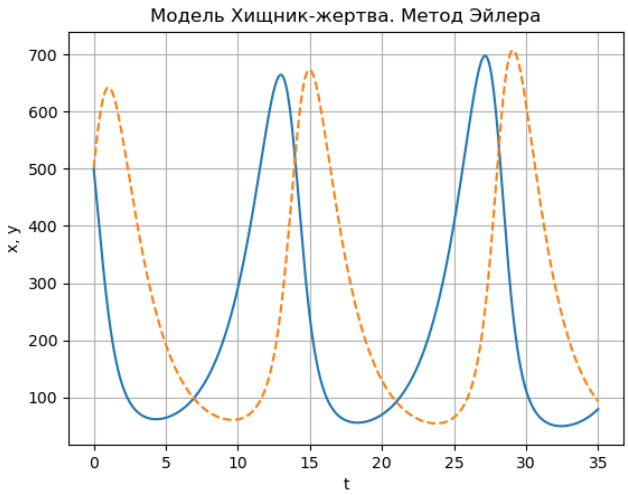



Рис. 1. Графики популяций хищников и жертв в зависимости от периода времени

При анализе данных необходимо, чтобы студент смог описать полученные результаты, оценить их адекватность. Для лучшего понимания рузультатов также был построен график зависимости числа хищников от числа жертв (см. рис. 2). Для этого заменили последние 6 строк кода так, как это показано в листинге 2. По представленному рисунку четко видно, что при увеличении одной популяции вторая сокращается и наоборот. Полезным также является проведение именно численного эксперимента, а не просто запуск программы при одних параметрах. В качестве задачи для численного эксперимента можно выяснить, при каких исходных параметрах популяции исчезнут.

*Листинг 2*

**Изменения в первоначальный код**

```
plt.plot(x,y, linewidth=0.8)
plt.xlabel("Количество жертв")
plt.ylabel("Количество хищников")
plt.title("Модель Хищник-жертва. Метод Эйлера")
plt.grid()
plt.show()
```

При построении математических моделей неодходимо проверять полученные результаты с известными. Полученные результаты сверялись с аналитическим решением статьи [11].

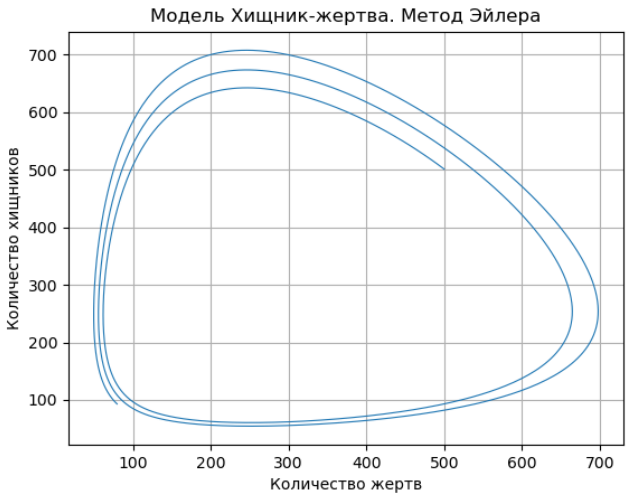



Рис. 2. График зависимости количества хищников от количества жертв

Таким образом, студент не только разобрался с математической моделью Лотки – Вольтера, но и провел обширный численный эксперимент.

### 3.3. Обзор простых задач математического моделирования

Студенты на младших курсах стремятся в первую очередь к знакомству с передовым технологиями в области программирования. Поэтому как общий подход можно использовать следующий. Научить студентов строить математические модели некоторых процессов. Затем построенные математические модели реализовать их на компьютере, используя знания и навыки, связанные с программированием [10].

Каждый педагог может сформулировать постановку задачи, связанную с преподаваеммыми дисциплинами. В качестве примеров простых математических моделей можно рассмотреть следующие:

- модель разгона стрелы, выпущенной из лука или арбалета некоторого конкретного класса [4];
- расчет прогиба прямоугольной пластины [2];
- реализация численных методов решения дифференциальных уравнений;
- реализация численных методов решения алгебраических уравнений, включая итерационные;

- простые модели кластеризации, например байессовский классификатор или метод к-средних;
- всплытие подводной лодки;
- I и II задачи Циолковского;
- прогнозирование социально-экономических параметров с использованием стандартных библиотек.

Пусть для студентов старших курсов это будут задачи на одно лабораторное занятие, но для студента-первокурсника — это целое открытие. И задача педагога в индивидуальной работе — помочь не только реализовать эти задачи, но и оформить полученный маленький научный результат.

## 4. Обсуждение

В заключении хочется отметить, что студент, занимающийся научной работой в области математики и математического моделирования, был всегда «штучным товаром», поэтому в первую очередь речь должна идти об индивидуальной работе с такими студентами, начиная с первого семестра первого курса.

Использование элементов математического моделирования с первого курса усиливает мотивацию студентов к изучению математики и информатики.

# Список источников

1. **Михайловский Е. И.** Школа механики оболочек академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2005. 172 с.
2. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В., Миронов В. В., Тулубенская Е. В.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2009. 141 с.
3. **Ермоленко А. В.** Классические контактные задачи со свободной границей // *Проблемы математического образования в вузах и школах России в условиях его модернизации: IV Всероссийская научно–методическая конференция : сборник материалов*. Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2014. С. 160–167.

4. **Фокин Р. Р., Атоян А. А., Абиссова М. А.** Изучение математики, информатики, математического и информационного моделирования: пути роста мотивации студента // *Научный альманах.* 2022. № 1–1 (87). С. 111–114.

5. **Жаркова Ю. С.** Преподавание элементов математического моделирования в педагогическом вузе как средство развития профессиональных компетенций // *Вестник Челябинского государственного педагогического университета.* 2014. № 9–1. С. 85–93.

6. **Асланов Р. М., Сушков В. В.** Исторические пути возникновения и развития теории функций комплексного переменного // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 47–63.

7. Студенты СГУ им. Питирима Сорокина – стипендиаты Президента и Правительства России [Электронный ресурс]. URL: https://www.syktsu.ru/news/17286/ (дата обращения: 21.11.2023).

8. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. № 4 (33). С. 86–95.

9. **Ермоленко А. В., Лотоцкая С. Р.** Численное решение задачи «Хищник – жертва» // *Актуальные вопросы современной науки : сборник научных статей по материалам III Международной научно-практической конференции (21 ноября 2023 г., г. Уфа)* : в 3 ч. Уфа: Изд. НИЦ Вестник науки, 2023.Ч. 1. С. 11–16.

10. **Фокин Р. Р., Атоян А. А., Абиссова М. А.** О мотивации к изучению в высшей школе дисциплин из областей математики, информатики, математического и информационного моделирования // *Современные наукоемкие технологии.* 2017. № 2. С. 172–176.

11. **Попов Н. И., Адиганова Н. А.** Об одной математической модели биологической задачи «хищник – жертва» // *Вестник МГПУ «Естественные науки».* 2017. № 4 (28). С. 119–126.

# References


1. **Mikhailovskii E. I.** *Shkola mekhaniki obolochek akademika Novozhilova* [Academic Novozhilov's school of mechanics of shells]. Syktyvkar: Publishing House of Syktyvkar University, 2005. 172 p. (In Russ.)

2. **Mikhailovskii E.I., Yermolenko A.V., Mironov V.V., Tulubenskaya E.V.** *Utochnennye nelinejnye uravneniya v neklassicheskih zadachah mekhaniki obolochek : uchebnoe posobie* [Refined nonlinear equations in non-classical tasks of mechanics of shells]. Syktyvkar: Publishing House of Syktyvkar University, 2009. 141 p. (In Russ.)

3. **Yermolenko A. V.** Classical contact problems with free boundary. *Problemy matematicheskogo obrazovaniya v vuzah i shkolah Rossii v usloviyah ego modernizacii: IV Vserossijskaya nauchno–metodicheskaya konferenciya : sbornik materialov* [Problems of mathematical education in universities and schools of Russia in the context of its modernization: IV All-Russian Scientific and Methodological Conference: collection of materials]. Syktyvkar: Publishing house of Syktyvkar University, 2014. Pp. 160–167. (In Russ.)

4. **Fokin R. R., Atoyan A. A., Abissova M. A.** Studying mathematics, computer science, mathematical and information modeling: ways to increase student motivation. *Nauchnyj al'manah* [Scientific almanac]. 2022. No 1–1 (87). Pp. 111–114. (In Russ.)

5. **Zharkova YU. S.** Teaching elements of mathematical modeling at a pedagogical university as a means of developing professional competencies. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State Pedagogical University]. 2014. No 9–1. Pp. 85–93. (In Russ.)

6. **Aslanov R. M., Sushkov V. V.** Historical ways of emergence and development of complex analysis. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2022. No 3 (44). Pp. 47–63. (In Russ.)

7. *Studenty SGU im. Pitirima Sorokina – stipendiaty Prezidenta i Pravitel'stva Rossii* [Students of SSU named after Pitirim Sorokina – scholarship recipients of the President and Government of Russia] [Electronic resource]. Available at: https://www.syktsu.ru/news/17286/ (accessed: 21.11.2023). (In Russ.)

8. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2019. 4 (33). Pp. 86–95. (In Russ.)

9. **Yermolenko A. V., Lotockaya S. R.** Numerical solution of the problem "Predator – prey". *Aktual'nye voprosy sovremennoj nauki : Sbornik nauchnyh statej po materialam III Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (21 noyabrya 2023 g., g. Ufa) : v 3 ch.* [Current issues of modern science: Collection of scientific articles based on the materials of the III International Scientific and Practical Conference (November 21, 2023, Ufa) : in 3 parts]. Ufa: Publishing house. Scientific Research Center Bulletin of Science, 2023. Part 1. Pp. 11–16. (In Russ.)

10. **Fokin R. R., Atoyan A. A., Abissova M. A.** On motivation to study disciplines from higher education fields of mathematics, computer science, mathematical and information modeling. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii* [Modern high technology]. 2017. No 2. Pp. 172–176. (In Russ.)

11. **Popov N. I., Adiganova N. A.** About one mathematical model of the biological problem "predator – prey". *Vestnik MGPU "Estestvennye nauki"* [Bulletin of MSPU "Natural Sciences"]. 2017. No 4 (28). Pp. 119–126. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Ермоленко Андрей Васильевич / Andrei V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 23.11.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 30.11.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 04.12.2023

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.*
*Выпуск 4 (49)*
*Bulletin of Syktyvkar University.*
*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)*

Научная статья

УДК 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

# СЕМАНТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ В МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

**Ольга Александровна Сотникова**
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, sotnikovaoa@syktsu.ru

***Аннотация.*** Приведен анализ методологии математики, касающейся семантики математического материала. Автор исходит из необходимости достижения понимания при изучении математики. Обосновано, что семантические аспекты обучения математике ориентируют на организацию установления содержательных связей в математическом материале.

***Ключевые слова:*** понимание математики в обучении, содержательные связи, осмысление математических понятий

***Для цитирования:*** Сотникова О. А. Семантические аспекты в методике обучения математике // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 4 (49). С. 59–69. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

Article

## Semantic aspects in the methods of math teaching

**Olga A. Sotnikova**
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, sotnikovaoa@syktsu.ru

***Abstract.*** The article features the analysis of methodology of mathematics in relation to the semantics of mathematical

© Сотникова О. А., 2023.

matter. The author's assumptions are based on the need to gain understanding in learning mathematics. It is justified that semantic aspects of teaching math involve establishing meaningful connections within mathematical matter.

***Keywords:*** understanding mathematics in teaching, meaningful connections, comprehension of mathematical concepts

***For citation:*** Sotnikova O. A. Semantic aspects in the methods of math teaching. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 59–69. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

В вузовском преподавании мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда приходится констатировать факт, что содержание дисциплины студентам «затруднительно для понимания», да и студенты часто утверждают, что тот или иной раздел им «непонятен». В общем, чувствуется различие в понятиях «знание» и «понимание»: можно «знать», но «не понимать», а потому «понять» куда важнее, чем просто «знать». В этой связи целесообразно вести речь об обучении математике, нацеленном на понимание. Но чтобы разработать положения такого обучения, необходимо обратиться к методологической трактовке понятия «понимание», а для методики обучения математике – его связи с семантическими аспектами.

В «знаниевой» модели обучения понимание рассматривается с рациональной точки зрения, как «понимание фактологического знания». Отсюда и известная трактовка понимания в обучении: «понимать — значит запомнить и научиться применять». В культуротворческой модели образования понимание трактуется «герменевтическим кругом» (Х. Г. Гадамер): «Чтобы понять, надо объяснить, а чтобы объяснить, надо понять». Герменевтическая тенденция в обучении ориентирует на понимание в идейном аспекте: «в итоге — получить ИДЕЮ познания (а не само познание), т. е. метод» [1, с. 398]. Таким образом, можно выделить два основных вида понимания в познании мира: понимание-объяснение, характерное для методологии естественных наук, и понимание-истолкование, характерное для гуманитарных наук.

Математика является специфической наукой, не вписывающейся аккуратно ни в один из названных видов наук ни по предмету исследования, ни по методам. И в то же время она имеет их составляющие.

С одной стороны, математика изучает формы и отношения реального мира (естественно-научный компонент), поэтому методология математики связана с «объясняющими» методами. Но формы и отношения реального мира математика рассматривает в отвлечении от их содержания с помощью абстракций, которые являются продуктом человеческой деятельности, т. е. культуры. Следовательно, другая сторона предмета математики (гуманитарная) состоит в том, что он не существует «сам по себе», а создается человеком. Творения, выраженные на математическом языке, требуют истолкования, расшифровки замысла (конструирования абстракции, идеи доказательства и т. п.), воплощенного математиками в своих трудах. Потому изучение математики связано с пониманием-истолкованием. Необходимо осознавать основу (идею) «получения» математических фактов, способы их выражения и те виды человеческой деятельности, которые к ним приводят (образные, языковые, мыслительные и т. д.).

Таким образом, говоря о понимании в обучении математике, необходимо иметь в виду, что оно имеет два компонента: естественно-научный (компонент рациональной модели понимания) и гуманитарный (компонент антропологической модели понимания).

Понимание с методологических позиций связано с понятиями осмысления, объяснения, интерпретации [2; 3]:

1. Понимание как осмысление означает выделение смысла, который содержится во взаимосвязях существенных сторон понятий, расшифровка результата человеческой деятельности.

2. Понимание как объяснение («рациональное объяснение») требует согласования структур (структуры науки и структуры культуры), выделения составляющих знания, их причинно-следственной связи.

3. Понимание как интерпретация есть отношение субъекта к знанию, некоторое истолкование, определение того, что это знание означает, т. е. установление соответствия между знанием и реальной действительностью.

В каждой трактовке понятия понимания процессуальная составляющая понимания требует *выделения взаимосвязей* в объекте изучения.

Следовательно, с методологических позиций понимание связано с установлением взаимосвязей (существенных сторон понятия, структур знания, в отношениях к знанию). И если обучение будет нацелено на понимание, то познавательный его аспект требует акцента на установление взаимосвязей в материале (объекте изучения).

С психологических позиций работа понимания при усвоении знаний описывается двумя механизмами: осмыслением значений и означением смысла, и характеризуется установлением взаимосвязей, их значимости и построением концепта [4]. Осмысление значений характеризует первое направление работы понимания: движение от значения к смыслу. Второе направление является обратным, оно характеризует «приписывание» значений смысловым составляющим знания: движение от смысла к значению. Если эта работа выполняется, то знание получает двойную окраску: окраску означенности и осмысленности. Таким образом, в процессе понимания с психологических позиций происходит как бы «построение» знания посредством *установления взаимосвязей* от смысла к значению и обратно. Эти связи мы называем содержательными.

Таким образом, ключевыми понятиями для трактовки понимания (как процесса, так и результата) являются понятия «смысл» и «значение». Если речь идет о понимании *в обучении* математике, то эти ключевые понятия должны рассматриваться под призмой работы с учебным математическим текстом (устным или письменным), что имеет непосредственную связь с выражениями языка.

Г. Фреге, исследуя отношения между выражениями языка, определил, что собственные имена в языке имеют два значения: предметное и смысловое [5] (рис.).

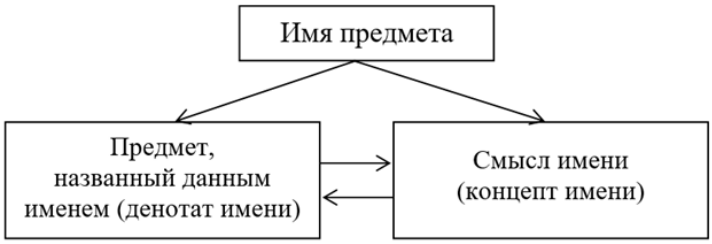



Рис. Треугольник значений имени предмета по Г. Фреге

Предметное значение имени (денотат, или просто «значение») — это тот конкретный объект (или класс предметов), которому приписано

данное имя. Имя имеет другое значение — косвенное, которое называют смыслом (концептом), его объективное содержание.

А. Черч концепт понимал иначе. Его сущность он раскрывает следующим образом: «Смысл (или концепт) — это постулированный абстрактный объект с определенными постулированными свойствами» [6, с. 343]. То есть можно вести разговор о смысле имени, ничего не зная о его денотате, кроме того, что он определяется этим смыслом. Так что смысл имени, по Черчу, тоже предметен (раз это «объект»), но его «предметность» выражается свойствами предметного значения.

Г. Фреге утверждает, что денотат имени может не существовать, но концепт есть всегда. Он приводит пример имени «в наименьшей степени сходящийся ряд», которое имеет смысл, но не имеет значения [5, с. 36]. Можно привести и другие примеры. Скажем, «порядок числа 2 аддитивной группы целых чисел». Смысл имени в том натуральном числе $n$, что $n$-кратное двойке равно 0. Понятно, что такого натурального числа не существует, т. е. значения нет. Аналогичные примеры можно привести из школьной математики. Скажем, $\log_2 0$ обозначает число $n$, такое, что $2^n = 0$. Значения нет, но смысл есть в воображаемом числе $n$ с «постулированным» свойством.

А. Черч придерживался другой точки зрения: «Если дан смысл, то этим определяется существование и единственность денотата» [6, с. 20]. Видимо, речь идет о совпадении концепта и денотата.

Расхождение точек зрения Г. Фреге и А. Черча, на наш взгляд, связано с тем, что понятия концепта и денотата они применяют к разным понятиям. Г. Фреге говорит о собственных именах, которые являются выражением языка для обозначения конкретных вещей, А. Черч ведет разговор о самих «вещах». Именно поэтому с одной позиции денотат существует всегда, с другой — нет. Заметив это расхождение, В. В. Мадер пришел к новой концепции [7], которой мы придерживаемся. В ней он ограничивается рассмотрением концептов и денотатов имен абстрактных объектов, что достаточно для математических понятий.

Имена являются языковыми выражениями понятий теории. Поэтому всякое введение имен (описание теории) должно начинаться с явного описания предметной области (принцип Э. Шредера). Тогда денотатом обладают только те имена, которые находятся в предметной области. Все остальные имена обладают другим статусом существования. Понятие «концепт имени абстрактных предметов» В. В. Мадер раскрывает следующими положениями.

1. Абстрактный (математический) предмет существует только как элемент некоторой системы. Поэтому смысл имени абстрактного предмета сводится к пониманию роли этого предмета как элемента объемлющей системы. Другими словами, смысл математических понятий в их связях с другими понятиями некоторого целого (например, алгебраической системы). Например, концепт комплексных чисел определяется описанием поля комплексных чисел.

2. Смысл имени обеспечивает возможность его правильного употребления. В математике, по мнению В. В. Мадера, это происходит в теоретических выкладках дедуктивного характера. Мы добавим, что это обеспечение в математике гарантируется точностью математического языка. Например, можно сформулировать на естественном языке следующее определение подгруппы, порожденной множеством.

Пусть $\mathbf{G}$ – группа и $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{G}$. Подгруппой $\mathbf{H}$, порожденной множеством $\mathbf{M}$, называется наименьшая подгруппа группы $\mathbf{G}$, содержащая множество $\mathbf{M}$, т. е. с условием $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{H}$.

Языковое выражение «наименьшая подгруппа, содержащая множество», конечно, с математической точки зрения означает не наименьшее число элементов (подгруппа может быть бесконечного порядка), а только то, что «любая подгруппа, содержащая множество $\mathbf{M}$, содержит и множество $\mathbf{H}$». В математической символике это выражается наиболее точно, не позволяя двойственного толкования (особенно «начинающему» изучение математики):

$$(\forall \mathbf{T} \prec \mathbf{G})(\mathbf{M} \subseteq \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{H} \subseteq \mathbf{T})$$

(здесь запись $\mathbf{T} \prec \mathbf{G}$ означает «$\mathbf{T}$ является подгруппой группы $\mathbf{G}$»).

3. Смысл имени абстрактного предмета содержит возможность представления, позволяющего связать это имя с наглядным образом.

Последнее положение автор аргументирует фактами истории математики, когда долгое время отвергались некоторые понятия в связи с тем, что в свое время не был найден для них наглядный образ. Такой ситуацией, например, сопровождалось введение комплексных чисел.

В этом плане мы хотели бы уточнить точку зрения В. В. Мадера. Смысл не всех математических понятий, изучаемых в вузовском курсе, можно с легкостью наглядно иллюстрировать. Например, каким образом наглядно иллюстрировать смысл понятия кольца? Кольцо является множеством с двумя бинарными алгебраическими операциями

на нем, для которых выполняется ряд требований (аксиом). Скорее всего, смысл имен математических объектов содержит возможность связать их с уже освоенными знаниями (иногда их называют фоновыми знаниями), отраженными (сформированными) в сознании понятиями, закрепленными личностным опытом студента. Последние знания в своей совокупности мы называем *интуитивным арсеналом.*

Исходя из высказанных соображений, третье положение применительно к концепту абстрактных предметов целесообразно принять в следующей трактовке.

3*. Смысл имени абстрактного предмета содержит возможность представления, позволяющего связать это имя с освоенными знаниями (интуитивным арсеналом).

Предыдущие три положения, характеризующие смысл имен абстрактных объектов, относятся к объектам, которые имеют предметную природу. «Непредметная» природа объектов в математике тоже проявляется, это выражается в виде свойств, отношений, функций и др. В. В. Мадер отмечает сложность описания концепта для таких математических объектов, поскольку денотат может быть истолкован различными способами. В своих рассуждениях он приходит к выводу (и мы с ним согласны), что в теоретических построениях не возникает надобности обращаться к денотату таких имен, такие понятия определяются исключительно концептом, а «денотат — это просто “нечто”, соответствующее концепту» [7, с. 105].

Таким образом, взаимосвязь денотата и концепта математического понятия двусторонняя (рис.): концепт характеризует денотат (с помощью свойств предмета, его связей, интуитивных представлений и т. д.); денотат, в свою очередь, является «воплощением» смысла, опредмеченным смыслом.

Из семантической трактовки понятия смысла вытекают следующие выводы, полезные для построения методики обучения математике.

1. Для *использования* математических понятий бóльшую важность имеет содержательное значение имен объектов (смысл, концепт), чем их предметные значения (денотат). Назовем этот вывод принципом *доминирования концепта* (смысла).

2. Смысл математических понятий содержится во взаимосвязях этого понятия в системе математического знания, как объективного, так и субъективного (интуитивного арсенала).

Во всяком математическом понятии как форме мышления выделяется его *содержание* и *объем*. В содержание понятия включается множество существенных признаков данного понятия, в объем — множество объектов, к которым применимо данное понятие. Термин как языковое выражение понятия в семантическом плане характеризует «имя предмета». Тогда объем понятия отражает денотат имени (термина), содержание понятия — концепт имени (термина). Поэтому можно сказать, что денотат понятия «отражает» его объем, а концепт понятия — его содержание. Именно «отражают», а не «являются». Например, в объем понятия «знак подстановки степени $n$» входят два числа: 1 и –1. Денотат имени (термина) обозначает предмет, который заименовывается. Именем «знак подстановки» заименовывается не множество $\{1, -1\}$, а связь (в данном случае, функциональная) между подстановками и множеством $\{1, -1\}$. В содержание понятия «знак подстановки» входят его существенные свойства, которые фиксируются определением и теоремами. К ним относятся: способ вычисления знака подстановки (по формулам, с помощью графов и пр.), свойство мультипликативности и т. д. Концепт же понятия «знак подстановки» как элемент *системы*, помимо его свойств, включает связи между этими свойствами. То есть он отвечает на вопросы «почему так», «как можно иначе», «что лежит в основе свойства» и т. д. Иначе говоря, объем понятия и его содержание фиксирует («материализует») связи понятия (между объектами, к которым применимо понятие, между его характеристическими признаками). Денотат и концепт отражают процесс этой фиксации («материализации») и его результат.

Таким образом, содержательные связи понятий отражают процессуальную сторону отношения между объемом и содержанием понятий.

В вузовском обучении математике обычно понятия рассматриваются по объему и содержанию: приводятся примеры понятий, изучаются (доказываются и «применяются» при решении задач) свойства понятия. То есть изучаются фиксированные свойства, а не сам процесс такой фиксации. Если обучение нацелено на понимание (а понимание — это, прежде всего, установление связей), то понятия целесообразно рассматривать по их концепту и денотату, т. е. с точки зрения смысла.

Связь является отношением взаимной зависимости, взаимной обусловленности, а значит, в основе любой связи есть некоторая основа, позволяющая это отношение установить. Поскольку материал математики составляют абстракции различного рода (отождествления, идеа-

лизации, осуществимости и т. д.) [8], то основу математических взаимосвязей — специфические идеи (идеи математики) и действия, которые повлекли за собой возникновение этих абстракций. Характеристика идей математики, составляющих основу математических абстракций, дана в работах Е. М. Вечтомова [9]: координатизация (термин Г. Вейля [10]), изморфность, факторизация, идеи двойственности, предельного перехода, непрерывности, упорядоченности и др. Заметим, что между идеями математики порой трудно провести четкое разграничение. Так, координатизация по сути задает предметность рассматриваемых понятий, т. е. опредмечивает объем понятия. А изоморфность теорий позволяет применить формализацию. Поскольку основные идеи лежат в основе установления взаимосвязей в математическом материале, то организация обучения, нацеленного на понимание, должна их учитывать.

Таким образом, с семантической точки зрения организация обучения математике, нацеленного на понимание, должна быть ориентирована на установление содержательных связей в учебном материале. Содержательные связи в математическом материале (тексте) имеют двунаправленный характер: от смысла термина к его значению и обратно. Процесс установления содержательных связей позволяет «построить» знание, вскрыть идею изучаемого математического понятия.

## Список источников

1. **Библер В. С.** От наукоучения – к логике культуры: Два философских введения в двадцать первый век [Электронный ресурс]. URL: https://platona.net/load/knigi_po_filosofii/kulturologija/bibler_v_s_ot_naukouchenija_k_logike_kultury_dva_filosofskikh_vvedenija_v_dvadcat_pervyj_vek/16-1-0-1042 (дата обращения: 28.11.2023).

2. **Доблаев В. П.** Смысловая структура учебного текста и проблемы его понимания. М.: Педагогика, 1982. 176 с.

3. **Рузавин Г. И.** Понимание как комплексная методологическая проблема // *Проблемы объяснения и понимания в научном познании : сб. ст.* / АН СССР, Ин-т философии; отв. ред. Г. И. Рузавин. М.: Б. и., 1982. С. 1–23.

4. **Зинченко В. П.** Психологические основы педагогики. М.: Гардарики, 2002. 431 с.

5. **Фреге Г.** Смысл и значение [Электронный ресурс]. URL: https://kant.narod.ru/frege1.htm (дата обращения: 12.11.2023).

6. **Черч А.** Введение в математическую логику. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 485 с.

7. **Мадер В. В.** Введение в методологию математики [Электронный ресурс]. URL: https://fileskachat.com/view/42260_f37ce0eec2526c065cec09140f140be3.html (дата обращения: 03.10.2023).

8. **Шафаревич И. Р.** Основные понятия алгебры. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. 348 с.

9. **Вечтомов Е. М.** Метафизика математики. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. 508 с.

10. **Вейль Г.** Математическое мышление. М.: Наука, 1989. 400 с.

# References

1. **Bibler V. S.** *Ot naukoucheniya – k logike kul'tury: Dva filosofskikh vvedeniya v dvadtsat' pervyy vek* [From science studies to the logic of culture: Two philosophical introductions to the twenty-first century] [Electronic resource]. Available at: https://platona.net/load/knigi_po_filosofii/kulturologija/bibler_v_s_ot_naukouchenija_k_logike_kultury_ dva_filosofskikh _vvedenija_v_dvadcat_pervyj_vek/16-1-0-1042 (accessed: 28.11.2023). (In Russ.)

2. **Doblaev V. P.** *Smyslovaya struktura uchebnogo teksta i problemy ego ponimaniya* [The semantic structure of the educational text and the problems of its understanding]. Moscow: Pedagogy, 1982. 176 p. (In Russ.)

3. **Ruzavin G. I.** Understanding as a complex methodological problem. *Problemy ob"yasneniya i ponimaniya v nauchnom poznanii : sb. st.* [Problems of explanation and understanding in scientific cognition : digest of articles]. USSR Academy of Sciences, Institute of Philosophy;

answer ed. G. I. Ruzavin. Moscow: Institute of Philosophy, 1982. Pp. 1–23. (In Russ.)

4. **Zinchenko V. P.** *Psihologicheskie osnovy pedagogiki* [Psychological foundations of pedagogy]. Moscow: Gardariki, 2002. 431 p. (In Russ.)

5. **Frege G.** *Smysl i znacheniye* [Meaning and significance] [Electronic resource]. Available at: https://kant.narod.ru/frege1.htm (accessed: 12.11.2023) (In Russ.)

6. **Cherch A.** *Vvedenie v matematicheskuyu logiku* [Introduction to Mathematical Logic]. Moscow: Izdvo foreign. lit., 1960. 485 p. (In Russ.)

7. **Mader V. V.** *Vvedeniye v metodologiyu matematiki* [Introduction to the methodology of mathematics] [Electronic resource]. Available at: https://fileskachat.com/view/42260_f37ce0eec2526c065cec09140f140be3.html (accessed: 03.10.2023) (In Russ.)

8. **Shafarevich I. R.** *Osnovnye ponyatiya algebry* [Basic concepts of algebra]. Izhevsk: Izhevsk Republican Printing House, 1999. 348 p. (In Russ.)

9. **Vechtomov E. M.** *Metafizika matematiki* [Metaphysics of Mathematics]. Kirov: Izd-v VyatGGU, 2006. 508 p. (In Russ.)

10. **Vejl' G.** *Matematicheskoe myshlenie* [Mathematical thinking]. Moscow: Nauka, 1989. 400 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Сотникова Ольга Александровна / Olga A. Sotnikova
д.пед.н., доцент, ректор СГУ им. Питирима Сорокина /
PhD (Pedagogics), Associate Professor, Rector of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 28.11.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 05.12.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 07.12.2023

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

METHODICAL MATERIALS

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.*
*Выпуск 4 (49)*
*Bulletin of Syktyvkar University.*
*Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 4 (49)*

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_70

# О РАБОТАХ МАТЕМАТИКА, ЗАЩИТНИКА МОСКВЫ, КОРЕЙЦА ШИН ДЕН ЮНА (1912–1942)

**Владимир Петрович Одинец**
W.P.Odyniec@mail.ru

***Аннотация.*** В статье идет речь о работах по квазидифференциальным уравнениям и квазидифференциальным операторам в гильбертовом пространстве корейца Шин Ден Юна (1912–1942), аспиранта мех.-мата МГУ, позднее преподавателя педвуза в Махачкале, докторанта Математического института Академии наук СССР и, наконец, участника обороны Москвы.

***Ключевые слова:*** квазидифференциальное выражение, квазидифференциальный оператор, гильбертово пространство, линейно независимые решения, оборона Москвы

***Для цитирования:*** Одинец В. П. О работах математика, защитника Москвы, корейца Шин Ден Юна (1912–1942) // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 4 (49). С. 70−79. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_70

© Одинец В. П., 2023.

Article

**On the works of the mathematician, defender of Moscow, Korean Shin Deng Yun (1912–1942)**

**Vladimir P. Odinets**
W.P.Odyniec@mail.ru

***Abstract.*** The article discusses the works on quasi-differential equations and quasi-differential operators in the Hilbert space by Korean Shin Deng Yun (1912–1942), post-graduate student at the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University. Later he was a teacher of pedagogical institute in Makhachkala, a doctoral student of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR, and finally a participant in the defense of Moscow.

***Keywords:*** quasi-differential equations, quasi-differential operators, Hilbert space, linearly independent Solutions, defense of Moscow

***For citation:*** Odinets V. P. On the works of the mathematician, defender of Moscow, Korean Shin Deng Yun (1912–1942). *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 4 (49), pp. 70−79. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_70

Шин Ден Юн родился в 1912 году в деревне Чендолаза Южно-Уссурийской части Приморской области [1]. Нам неизвестно, где и как учился Шин Ден Юн до 1930 года, но с 1930 года он учится на физико-математическом факультете МГУ. В 1935 году он по окончании учебы в университете был принят в аспирантуру Научно-исследовательского института Московского государственного университета. 6 января 1938 года академик С. Н. Бернштейн (1880–1968) представил в «Доклады Академии наук СССР» (ДАН) сразу три работы Шин Ден Юна [2–4].

Первая из этих работ является обобщением результатов профессора С. А. Янчевского[1], посвященных изучению самосопряженной дифференциальной системы 4-го порядка и опубликованных последним в 1928 и 1930 годах [6; 7].

[1] Янчевский Сергей Аркадьевич (1900–1941) родился в Санкт-Петербурге, учился в Московском, а со второго курса – в Петроградском университете. В 1923 г. принят

В работах [2], [3] Д. Шин уже получает результаты, опирающиеся на его собственные идеи. Развиты эти идеи были в работе [4]. Подробно все доказательства были даны в большой статье «О решениях линейного квазидифференциального уравнения $n$-го порядка» [8] в журнале «Математический сборник», посланной им в 1939 году из г. Махач-Кала[2], куда после окончания аспирантуры (1938) был распределен Д. Шин.

Пусть $P_{k,\gamma}$, $\gamma \leq k$; $k, \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n$ — комплексные измеримые по Лебегу функции от действительного переменного $x$, определенные в конечном замкнутом интервале $[a, b]$. Для произвольной комплексной функции $u(x)$, следуя [9, с. 485–487], рассмотрим квазидифференциальное уравнение $u^{[n]} - lu = 0$ $n$-го порядка. При этом выполняется условие о неравенстве нулю детерминанта типа Вронского

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \det|f_k^{(j-1)}|, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

и где

$$u^{[0]} = P_{0,0}u, \ u^{[1]} = IP_{1,1}du^{[0]}/dx + P_{1,0}u^{[0]},$$
$$u^{[2]} = IP_{2,2}du^{[1]}/dx + P_{2,1}u^{[1]} + P_{2,0}u^{[0]},$$
$$\ldots$$
$$u^{[n]} = IP_{n,n}du^{[n-1]}/dx + \ldots + P_{n,1}u^{[1]} + P_{n,0}u^{[0]}.$$

Д. Шин утверждает, что если функции $|1/P_{k,k}|^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $|P_{k,\gamma}|^2$, $\gamma < k$, и $|f(x)|^2$ интегрируемы по Лебегу в интервале $[a, b]$, (т. е. $f(x) \in L_2[a, b]$), то существует единственная функция $u(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) выражения $u^{[k]}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, равны абсолютно непрерывным функциям почти всюду в интервале $[a, b]$;

2) $u^{[n]}(x) = f(x)$ почти всюду в интервале $[a, b]$ и

---

в аспирантуру ЛГУ, став учеником профессора Н. М. Гюнтера. Профессор (1934). В 1926–1931 гг. преподавал в ЛГПИ им. А. И. Герцена, а с 1931 г. до самой смерти (от голода в блокадном Ленинграде) преподавал в Ленинградском ин-те железнодорожного транспорта (подробнее о его работах и жизни см.: [5, с. 14–21]).

[2]Город Махачкала (столица Дагестана) до 1921 г. назывался Петровск. (Махач – сокращенная форма от имени Магомед, Кала – город, крепость). Город был переименован в память об одном из первых организаторов Советской власти в Дагестане Магомеде Али Дахадаеве (1882–1918). До 50-х годов XX века название города писалось через дефис: Махач-Кала.

3) $u^{[k]}(c) = C_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $a \le c \le b$, где $C_k$ – произвольные постоянные.

Функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям 1)–3), будем называть *решением уравнения* $u^{[n]}(x) = f(x)$, принимающим начальные значения 3).

В следующей работе [8] изучаются решения уравнения $u^{[n]}(x) = 0$ при условии, что комплексные функции $1/P_{k,k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $P_{k,\gamma}(x), \gamma < k$, принадлежат к $L_2(0, b)$, где $b$ – произвольное положительное число. Тогда существуют $n$ линейно независимых решений, принадлежащих $L_2(0, b)$.

Дифференциальное выражение $u^{[n]}$ Д. Шин называет *самосопряженным*, если функции $P_{k,\gamma}$ удовлетворяют условиям: $\overline{P_{n-k,n-k}} = P_{k,k}$, $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$, (где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$), $(\overline{P_{n-\gamma,n-k} \cdot P_{n-k,n-\gamma}/P_{n-\gamma,n-\gamma}}) = P_{k,\gamma}$, $\gamma < k$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$. В этом случае можно получить явно и билинейную форму и изучить решения уравнений $u^{[n]} = lu$, $v^{[n]} = l^{-}v$, при некотором дополнительном условии: неравенство нулю детерминанта типа Вронского при начальных условиях $f^{[k]}(c) = c_k$, $c_k \in (a, b)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ([9, с. 485–487]).

28 января 1938 года академик С. Н. Бернштейн представил в ДАН ещё одну статью Д. Шина «О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве» [10]. В статье рассматривается дифференциальный оператор вида:

$$H^{[n]}, \text{ где } H^{[0]} = P_{0,0}H, \ \ldots, \ H^{[k]} = iH_{k,k}dH^{[k-1]}/dx + \sum_{j=1}^{k-1} P_{k,j}H^{[j]}.$$

Комплексные функции $P_{k,\gamma}$ определены в конечном или бесконечном интервале $a < x < b$ и удовлетворяющие условиям: $1/P_{k,k}$ и $P_{k,\gamma}$ принадлежат $L_2(\alpha, \beta)$ для любого $[\alpha, \beta] : (a, b) \supset [\alpha, \beta]$, кроме того, $H^{[k]}$ для $k \le n-1$ абсолютно непрерывны; наконец, $H^{[n]} \in L_2(a, b)$.

Оператор $G^{\{n\}}$, сопряженный с $H^{[n]}$, определяется равенством:

$$G^{\{k\}} = iQ_{k,k}dG^{\{k-1\}}/dx + \sum_{\gamma=0}^{n-1} Q_{k,\gamma}G^{\{\gamma\}},$$

где $Q_{k,\gamma} = (\overline{P_{n-\gamma,n-k} \cdot P_{n-k,n-\gamma}/P_{n-\gamma,n-\gamma}})$.

Оператор является самосопряженным, если

$$Q_{k,\gamma} = P_{k,\gamma},\ \gamma < k,\ k = 0, 1, \ldots, n;\ \gamma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Далее, рассматривается уравнение $H^{[n]} - lH = 0$ с *самосопряженным* оператором $H^{[n]}$ и комплексным параметром $l$ (для определенности, пусть $\operatorname{Im} l > 0$). Для этого уравнения ищется число линейно независимых решений на правом конце, т. е. в интервале $(c, b)$, где $a < c < b$, удовлетворяющих условию: они принадлежат $L_2(c, b)$. Обобщая метод Г. Вейля[3] Д. Шин доказывает, что *существует $n$ или $[n/2]$ линейно независимых решений, удовлетворяющих этому условию.*

Аналогично, если поставить условие на левом конце, т. е. рассматривать интервал $(a, c)$ и требовать, чтобы решения принадлежали $L_2(a, c)$, то оказывается, что *существует $n$ или $n - [n/2]$ линейно независимых решений, удовлетворяющих этому условию.*

Наконец, при условии на обоих концах: *решения принадлежат $L_2(a, b)$ – возможны следующие значения для числа линейно независимых решений*: 0, $[n/2]$, $n - [n/2]$, $n$.

В июне 1938 года Д. Шин оканчивает аспирантуру с защитой кандидатской диссертации. По распределению его направляют в Дагестан, в образованный в 1931 году в г. Махач-Кала Дагестанский педагогический институт на физико-техническое отделение. Там в октябре 1939 года он посылает большую (на 80 стр.) статью в журнал «Математический сборник» [8], подытожившую его результаты в «Докладах АН СССР», а в мае 1940 года ещё одну статью в ДАН [11], представленную уже академиком А. Н. Колмогоровым (1903–1987), где часть уже опубликованных результатов по решениям системы квазидифференци-

[3]Вейль Герман (Hermann Weyl: 1885–1955) — немецкий математик, физик-теоретик, логик и философ, чл. Национальной АН (США), окончил Геттингенский ун-т (1908) с защитой диссертации «Вырожденные интегральные уравнения с особым учетом интегральных теорем Фурье», ученик Д. Гильберта, преподавал в Геттингенском ун-те (1908–1913, 1930–1933). В 1913–1930 гг. – профессор Цюрихского политехнического ин-та. С 1933 г. – в США в Принстонском ин-те перспективных исследований. В математике – Г. Вейль, создатель спектральной теории дифференциальных операторов, внёс большой вклад в теорию интегральных и дифференциальных уравнений и комплексный анализ (теоремы и область Вейля), теорию чисел (суммы Вейля), теорию непрерывных групп и их представлений в геометрии и физике, в дифференциальной геометрии ввел понятие аффинной связности (за что в 1927 г. получил в СССР премию им. Лобачевского); в физике получил результаты, относящиеся к теории атомных спектров; в философии он – один из творцов интуиционизма.

альных уравнений удаётся получить существенно проще с применением $n$-мерных квадратных матриц, обобщающих результаты Г. Вейля (Ann. of Math., 36 (1935), pp. 230–254) для $n = 2$.

Летом 1940 года Д. Шин едет в Москву для поступления в докторантуру Математического института АН СССР. В итоге, в докторантуру на два места зачисляются: Витольд Шмулян (1914–1944) из Одессы и Ден Юн Шин из Махач-Калы. Чуть позже к ним присоединяется будущий академик Сергей Михайлович Никольский (1905–2012), для которого было получено дополнительное место в докторантуре ([12, с. 10–11]).

В мае 1941 года Д. Шин представляет в журнал «Математический сборник» большую статью «О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве» [13], в которой, кроме подробных доказательств результатов, представленных в статье [11], изучаются резольвенты и спектры этих операторов.

В начале августа 1941 года Д. Шина, С. М. Никольского, а также А. А. Ляпунова (1911–1973) (будущего чл.-корр. АН СССР, одного из основоположников кибернетики) посылают от Математического института в составе 1000 человек от каждого из районов Москвы на строительство грандиозного противотанкового рва на сотни км с севера на юг в 150 км от Москвы. Ров в разрезе в виде перевёрнутой трапеции должен был иметь глубину 3 м, внизу тоже 3 м, вверху 7 м. Каждый из прибывших должен был за смену выбросить лопатой 12 кубометров грунта. Как пишет С. М. Никольский [12], они с Д. Шином справлялись с заданным «уроком», а А. А. Ляпунов при всём старании не справлялся, хотя внешне выглядел как гвардеец: высокий, широкий в плечах. Поэтому он почти постоянно работал на кухне, чистя картошку, что, как оказалось, «дало возможность С. Никольскому и Д. Шину наедаться супами до сыта» [12, с. 12].

В августе и сентябре работали в мирной обстановке. Как пишет С. М. Никольский, они с Д. Шином в эти месяцы сдружились. Фронт был ещё далеко. Однако в начале октября обстановка изменилась: немецкие самолёты летали уже низко и периодически сбрасывали на работавших бомбы. 10 октября все работы были свёрнуты, хотя практически ров был вырыт, и неорганизованной толпой все двинулись на восток к Киевской железной дороге. На одном из полустанков этой дороги стало известно, что немцы уже в Мало-Ярославце. Толпа двинулась на север, параллельно двигались немцы. Пришли в Тарутино, где встретились воинские части, в основном из курсантов, идущие на

фронт. Оттуда побрели до Подольска. К этому времени А. А. Ляпунову удалось сесть на машину, ехавшую в Подольск, и с ним ни Шин, ни Никольский уже не встречались. Добравшись до Подольска, Д. Шин и С. М. Никольский дождались электрички и доехали на ней до Курского вокзала Москвы. Было уже 14 октября.

На вокзале всех прибывших жёстко контролировали. С. М. Никольского в конце концов отпустили, а Д. Шина как корейца задержали. Попытка защитить Д. Шина, закончилась угрозами в адрес С. М. Никольского. Дело в том, что на основании Постановления ЦК ВКП(б) и Совнаркома за № 1428-326 от 21.08.1937 г. «О выселении корейского населения из пограничных районов Дальневосточного края», подписанного И. В. Сталиным и В. М. Молотовым, 173 тысячи корейцев были выселены на необитаемые пустынные и необжитые районы Казахстана и Средней Азии. Позже действие этого постановления распространилось на всю территорию СССР. Итак, Шин Ден Юн был выслан в Северный Казахстан. По дороге он простудился и в начале 1942 года умер.

С. М. Никольский очень переживал, что Шин Ден Юн был одет по-летнему.

С. М. Никольскому в конце сентября теща прислала теплую куртку, и он предложил её Ден Юну, но тот отказался, говоря «потерплю до Москвы».

За эпопею с противотанковым рвом С. М. Никольского наградили медалью «За оборону Москвы» [12, с. 19]. Ни Шин Ден Юн, ни А. А. Ляпунов такой медали не получили.

## Список источников

1. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957. Т. 2. Биобиблиография. М.: Физ.-мат. лит., 1959. 819 с.

2. **Шин Ден Юн.** Теоремы колебания граничных проблем самосопряженной дифференциальной системы 4-го порядка // *ДАН.* 1938. 18. № 6. С. 323–324.

3. **Шин Ден Юн.** Теоремы существования квазидифференциального уравнения n-го порядка // *ДАН.* 1938. 18. № 8. С. 515–518.

4. **Шин Ден Юн.** О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u[n] = lu$, $I(l) \neq 0$, принадлежащих к $L_2(0, \infty)$ // *ДАН.* 1938. 18. № 8. С. 519–522.

5. **Одинец В. П.** О ленинградских математиках, погибших в 1941–1944 годах. II. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2021. 108 с.

6. **Janchevski S.** Oscillation theorem for the differential boundary value problem of the fourth order // *Annals of Mathematics.* 1927–1928. 29. Pp. 521–542.

7. **Janchevski S.** Oscillation theorem for the differential boundary value problem of the fourth order // *Annals of Mathematics.* 1930. 31. Pp. 663–680.

8. **Шин Ден Юн.** О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // *Матем. сб.* 1940. Т. 7 (49). С. 479–532.

9. Математика в СССР за тридцать лет 1917–1947 / под ред. А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского М.; Л.: ОГИЗ. Изд-во тех.-теор. лит-ры, 1948, 1045 с.

10. **Шин Ден Юн.** О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // *ДАН.* 1938. 18. № 8. С. 523–526.

11. **Шин Ден Юн.** О решениях системы квазидифференциальных уравнений // *ДАН.* 1940. 28. № 5. С. 392–396.

12. **Никольский С. М.** Воспоминания. М.: МИАН, 2003. 160 с.

13. **Шин Ден Юн.** О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве. // *Матем. сб.* 1943. Т. 13 (55). С. 39–70.

# References

1. *Matematika v SSSR za sorok let 1917–1957. T. 2. Biobibliografiya* [Mathematics in the USSR for Forty Years 1917–1957. Bd. 2. Biobibliography]. Moscow: Fizmatlit, 1959. 819 p.

2. **Shin Deng Yun**. Oscillation theorems of boundary problems of a self-adjoint differential system of the 4th order. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1938. 18. No 6. Pp. 323–324. (In Russ.)

3. **Shin Deng Yun**. Theorems for the existence of a quasi-differential equation of the nth order. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1938. 18. No 8. Pp. 515–518. (In Russ.)

4. **Shin Deng Yun.** Solutions of a self-adjoint differential equation $u[n] = lu$, $I(l) \neq 0$, belonging to $L_2(0, \infty)$. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1938. 18. No 8. Pp. 519–522. (In Russ.)

5. **Odyniec V. P.** *O Leningradskih matematikah, pogibshih v 1941–1944 godah. II* [About Leningrad mathematicians, who died in 1941–1944. II]. Syktyvkar: Izd-vo SGU named after Pitirim Sorokin, 2021. 108 p.

6. **Janchevski S.** Oscillation theorem for the differential boundary value problem of the fourth order. *Ann. of Math.* 1927–1928. 29. Pp. 521–542.

7. **Janchevski S.** Oscillation theorem for the differential boundary value problem of the fourth order. *Ann. of Math.* 1930. 31. Pp. 663–680.

8. **Shin Deng Yun**. Solutions of a linear quasi-differential equation of nth order. *Matem. sb.* [Mathematical collection]. 1940. 7(49). Pp. 479–532. (In Russ.)

9. *Matematika v SSSR za tridcat' let 1917–1947* [Mathematics in the USSR for Thirty Years 1917–1947]. Edited by A. G. Kurosh, A. I. Markushevich, P. K. Rashevsky. M.; L.: OGIZ, Izd-vo tekhn.-teor. litters, 1948. 1045 p.

10. **Shin Deng Yun**. Quasi-differential operators in Hilbert space. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1938. 18. No 8. Pp. 523–526. (In Russ.)

11. **Shin Deng Yun**. Solutions of the System of Quasi-Differential Equations. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1940. 28. No 5. Pp. 392–395. (In Russ.)

12. **Nikolsky S. M.** *Vospominaniya* [Memories]. Moscow: Izd-vo MIAN, 2003. 160 p.

13. **Shin Deng Yun**. Quasi-differential operators in Hilbert space. *Matem. sb.* [Mathematical collection]. 1943. 13 (55). Pp. 39–70. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Одинец Владимир Петрович / Vladimir P. Odinets
д.ф.-м.н., профессор / Doctor of in Physics and Mathematics, Professor

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 14.10.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 06.11.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 08.11.2023

# Contents

**Applied mathematics and mechanics**

**Makarov P. A.** *Some features of production angles of particles born in decay reactions in relativistic and nonrelativistic cases* . . . . . 4

**Computer sciences**

**Babikova N. N., Kotelina N. O., Tentyukov F. N.** *Analysis of data on forest fires in the Komi Republic using Excel and Python* . 29

**Theory and methods of teaching mathematics and computer science**

**Yermolenko A. V.** *Introduction to the theory of mathematical modeling when teaching students* . . . . . 47

**Sotnikova O. A.** *Semantic aspects in the methods of math teaching* . . 59

**Methodical materials**

**Odinets V. P.** *On the works of the mathematician, defender of Moscow, Korean Shin Deng Yun (1912–1942)* . . . . . 70

*Научное периодическое издание*

**Вестник Сыктывкарского университета**
**Серия 1: Математика. Механика. Информатика**
**Выпуск 4 (49) 2023**

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет Е. Н. Старцевой
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 15.12.2023. Дата выхода в свет 25.12.2023.
Формат $70 \times 108\frac{1}{16}$.
Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 9,4.
Тираж 32 экз. Заказ № 109.

---

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru