МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 3 (48)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 3 (48)

Научная статья

УДК 512.55
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_3_4

О СТРОЕНИИ ИДЕАЛОВ ПОЛУКОЛЬЦА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Даниил Евгениевич Меняев, Василий Владимирович Чермных
Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина, dahnny@yandex.ru, vv146@mail.ru

Аннотация. В статье исследуются идеалы полукольца натуральных чисел. Получен критерий принадлежности натурального числа идеалу в терминах целочисленных решений некоторой системы линейных неравенств. Продемонстрированы применения этого критерия.

Ключевые слова: полукольцо, идеал, константа Фробениуса, теорема Сильвестра

Для цитирования: Меняев Д. Е., Чермных В. В. О строении идеалов полукольца натуральных чисел // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 3 (48). С. 4–17. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_3_4

Article

On the structure of the ideals of the semiring of natural numbers

Daniil E. Menyaev, Vasily V. Chermnykh
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, dahnny@yandex.ru, vv146@mail.ru

Abstract. The article investigates the ideals of the semiring of natural numbers. A criterion is obtained for a natural number to belong to an ideal in terms of integer solutions of a certain system of linear inequalities. Applications of this criterion are demonstrated.
Keywords: semiring, ideal, Frobenius constant, Sylvester's theorem

For citation: Menyaev D. E., Chermnykh V. V. On the structure of the ideals of the semiring of natural numbers. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 3 (48), pp. 4–17. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_3_4

Введение и первоначальные понятия

Полукольцо $\mathbb{N}$ натуральных чисел (с нулем) с обычными операциями сложения и умножения является одним из первых и наиболее естественных примеров полукольца. Его строение напоминает строение кольца целых чисел $\mathbb{Z}$, но при этом имеются и существенные отличия. Нас интересует устройство идеалов в $\mathbb{N}$, поэтому отметим, что, как и $\mathbb{Z}$, полукольцо натуральных чисел является нётеровым (каждый идеал конечно порожден), однако не является полукольцом главных идеалов. Описание строения идеала из $\mathbb{N}$ сводится к случаю, когда система образующих идеала $A = A(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из взаимно простых в совокупности чисел. Тогда, начиная с некоторого элемента $C(x_1, \ldots, x_n)$, и это число, и все последующие лежат в A. Одной из первых и естественных задач при описании идеала $A(x_1, \ldots, x_n)$ является нахождение $C(x_1, \ldots, x_n)$. С ней связана одна классическая задача элементарной теории чисел, возникшей вне рамок теории полуколец и теории полугрупп. Именно для взаимно простых натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ требуется найти наибольшее число $F(x_1, \ldots, x_n)$, не представимое в виде $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Число $F(x_1, \ldots, x_n)$ носит название *константы Фробениуса*, и ясно, что $F(x_1, \ldots, x_n) = C(x_1, \ldots, x_n) - 1$. Разными авторами и различными методами было установлено, что $F(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1 - x_2$.

Однако в общем случае не известно какой-либо подобной формулы для константы Фробениуса от трех и более чисел. В частных случаях, когда образующие $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, константа Фробениуса может быть записана как функция от образующих. Так, в [1] установлено, что $F(x, x+d, \ldots, x+(n-1)d) = [(x-2)/(n-1)]x + (x-1)d$ — формула, когда образующие составляют арифметическую прогрессию; через $[r]$ обозначена целая часть числа r. Понятно, что в этой формуле числа x и d являются взаимно простыми. Также существуют формулы для $F(x, x+1, x+2, x+k)$ при $k = 4; 5; 6$ [2], для $F(x, x+d, x+td \ldots, x+t^n d)$ [3], для $F(x, x+1, x+2, x+2^2, \ldots, x+2^n)$ [4] и некоторые другие.

Второй задачей, связанной со строением идеалов в $\mathbb{N}$, является нахождение элементов из идеала $A(x_1, \ldots, x_n)$ меньших, чем $C(x_1, \ldots, x_n)$. Нахождение числа $K(x_1, \ldots, x_n)$ таких элементов опять же возможно только в некоторых специальных случаях. Для идеала с двумя образующими значение $K(x_1, x_2)$ легко вытекает из теоремы Сильвестра [5], в которой установлено число элементов, не представимых в виде комбинации чисел x_1, x_2.

Как правило, основные методы, используемые для нахождения констант Фробениуса, лежат в области элементарной теории чисел (делимость, сравнения, цепные дроби). В нескольких работах имеются интересные применения методов с использованием производящих функций, но нам не известно, имеются ли существенные результаты для трех и более порожденных идеалов, полученных с помощью производящих функций.

В настоящей работе дается критерий, по которому можно установить, принадлежит ли натуральное число m идеалу $A(x_1, x_2)$. Рассматриваемое для этого условие связано с принадлежностью некоторому отрезку целочисленной точки, а концы отрезка — рациональные числа, зависящие от m. Получено обобщение критерия для произвольного идеала $A(x_1, \ldots, x_n)$. Характеризующее условие связано с наличием целочисленного решения системы линейных неравенств, а геометрическая интерпретация этого условия — с наличием целочисленной точки у симплекса, который задается системой. Критерий позволяет получить алгоритм, определяющий принадлежность произвольного числа идеалу

$A(x_1, \ldots, x_n)$. Алгоритм используется для описания идеала с двумя образующими, показано применение критерия для нахождения $C(x_1, x_2)$.

Отметим несколько работ, в которых можно получить информацию о полукольцах [6; 7] и об идеалах полукольца натуральных чисел [7, § 8; 8; 9].

Основной критерий для идеала с двумя образующими

Наибольший общий делитель (НОД) целых чисел $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать через $(x_1, \ldots, x_n)$. Ниже неоднократно будем пользоваться хорошо известным утверждением о линейном представлении НОД. *Пусть* $(x_1, \ldots, x_n) = m$. *Тогда найдутся такие целые числа* $a_1, \ldots, a_n$, *что* $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = m$.

Заметим, что если $(x_1, x_2) = 1$, то для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем $m = ax_1 + bx_2$ для некоторых целых a, b. Таких представлений бесконечно много, однако a определяется «однозначно по модулю x_2». Это означает, что если $m = ax_1 + bx_2 = a'x_1 + b'x_2$, то $(a - a')x_1$ делится на x_2, поэтому $a \equiv a' (\operatorname{mod} x_2)$. Аналогично, $b \equiv b' (\operatorname{mod} x_1)$.

Пусть x_1, x_2 — натуральные взаимно простые числа, отличные от 1. *Если* $m \in A(x_1, x_2)$ *и* $m = ax_1 + bx_2$ *— представление с наименьшим возможным целым неотрицательным числом* a, *то* b *также будет целым неотрицательным.* Действительно, из $m \in A(x_1, x_2)$ следует $m = a'x_1 + b'x_2$ для некоторых целых неотрицательных a', b', причем $a \leq a'$. Тогда $(a' - a)x_1 = (b - b')x_2 \geq 0$, и поэтому $b \geq b' \geq 0$.

Предложение 1. (Основной критерий.) *Пусть* $1 < x_1 < x_2 \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2) = 1$ *и* $ax_1 + bx_2 = 1$ *для некоторых целых* a, b. *Тогда равносильны следующие условия*:

1) $m \in A(x_1, x_2)$;

2) *отрезок* $[-bm/x_1; am/x_2]$ *содержит хотя бы одно целое число.*

Доказательство. Пусть $m \in A(x_1, x_2)$, тогда из условия получаем $m = ax_1m + bx_2m$. По теореме о делении с остатком $am = x_2q + r$ и $0 \leq r < x_2$, поэтому $x_2q \leq am$ и $q \leq am/x_2$. Далее:

$$m = ax_1m + bx_2m = rx_1 + (x_1q + bm)x_2.$$

Используя замечание перед предложением, заключаем, что $x_1q + bm \geq 0$. Следовательно, $q \geq -bm/x_1$. Получили, что $q \in [-bm/x_1; am/x_2]$.

Обратно, пусть s — целое число, лежащее в $[-bm/x_1; am/x_2]$. Тогда из $-bm/x_1 \leq s$ получаем $x_1 s + bm \geq 0$. Из $s \leq am/x_2$ получаем $am - sx_2 \geq 0$. Тогда

$$x_1(am - sx_2) + x_2(x_1 s + bm) = x_1 am + x_2 bm = m(x_1 a + bx_2) = m$$

и $m \in A(x_1, x_2)$. □

Замечания. 1) Отрезок, фигурирующий в Предложении 1, зависит от параметров a и b и определяется неоднозначно. Но при любом выборе a и b и при любом $m > 0$ отрезок является невырожденным, т. е. $-bm/x_1 < am/x_2$. Действительно,

$$am/x_2 - (-bm/x_1) = m(ax_1 + bx_2)/(x_1 x_2) = m/(x_1 x_2) > 0.$$

2) Произвольный идеал $A(x_1, \ldots, x_n)$ со взаимно простыми в совокупности образующими обладает следующим свойством: *если x_1 подряд идущих чисел лежат в идеале $A(x_1, \ldots, x_n)$, то и все идущие за ними числа лежат в $A(x_1, \ldots, x_n)$.*

Наличие особенности идеала из Замечания 2) и основного критерия позволяет построить два алгоритма. Первый из них устанавливает константу $C(x_1, x_2)$:

1. $y := \min\{x_1, x_2\}$.
2. *Проверка критерием чисел y, $y+1, \ldots, y+\min\{x_1, x_2\}-1$ на принадлежность $A(x_1, x_2)$.*
3. *Если результат проверки на шаге 2 положительный, то алгоритм прекращает работу, а иначе $y := y + 1$ и переходит на шаг 2. В переменной y по окончании будет $C(x_1, x_2)$, так как алгоритм находит первое такое число, что число перед ним не будет входить в идеал, а все последующие — будут.*

При проверке пункта 2 используется условие, когда целая часть am/x_2 не меньше, чем число $-bm/x_1$.

Алгоритм для нахождения числа $K(x_1, x_2)$ элементов идеала, которые меньше, чем $C(x_1, x_2)$, можно посчитать, если модифицировать алгоритм выше:

1. $y := \min\{x_1, x_2\}$ $n := 0$.

2. *Если* $y \in A(x_1, x_2)$, *то* $n := 1 + n$.

3. *Проверка критерием чисел* y, $y+1, \ldots, y+\min\{x_1, x_2\}-1$ *на принадлежность* $A(x_1, x_2)$.

4. *Если результат проверки на шаге* 3 *положительный, то* $n := n-1$ *и алгоритм прекращает работу, а иначе* $y := y+1$ *и переходит на шаг* 2. *В переменной* y *по окончании будет* $C(x_1, x_2)$, *а в* n *— количество элементов из* $A(x_1, x_2)$, *которые меньше, чем* $C(x_1, x_2)$.

Приведем результаты работы алгоритма при вычислениях $C(x_1, x_2)$ и $K(x_1, x_2)$ для начальных значений образующих. Пустые места таблицы соответствуют образующим идеала, которые не являются взаимно простыми.

Таблица

Результаты работы алгоритма при вычислениях $C(x_1, x_2)$ и $K(x_1, x_2)$

	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2;1		4;2		6;3		8;4	
3		6;3	8;4		12;6	14;7		18;9
4	6;3		12;6		18;9		24;12	
5	8;4	12;6		20;10	24;12	28;14	32;16	
6			20;10		30;15			
7	12;6	18;9	24;12	30;15		42;21	48;24	54;27
8	14;7		28;14		42;21		56;28	
9		24;12	32;16		48;24	56;28		72;36
10	18;9				54;27		72;36	
11	20;10	30;15	40;20	50;25	60;30	70;35	80;40	90;45
12			44;22		66;33			
13	24;12	36;18	48;24	60;30	72;36	84;42	96;48	108;54
14	26;13		52;26				104;52	

Окончание таблицы

15		42;21			84;42	98;49		
16	30;15		60;30		90;45		120;60	
17	32;16	48;24	64;32	80;40	96;48	112;56	128;64	144;72
18			68;34		102;51			
19	36;18	54;27	72;36	90;45	108;54	126;63	144;721	162;81
20	38;19				114;57		152;76	
21		60;30	80;40			140;70		180;90
22	42;21		84;42		126;63		168;84	
23	44;22	66;33	88;44	110;55	132;66	154;77	176;88	198;99
24			92;46		138;69			
25	48;24	72;36		120;60	144;72	168;84	192;96	
26	50;25		100;50		150;75		200;100	
27		78;39	104;52		156;78	182;91		234;117
28	54;27		108;54				216;108	
29	56;28	84;42	112;56	140;70	168;84	196;98	224;112	252;126
30					174;87			

Как видно из данной таблицы, возникают гипотезы, что

$$C(x_1, x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1) \text{ и } K(x_1, x_2) = C(x_1, x_2)/2,$$

которые ниже доказываются. Отметим, что доказательство Предложения 2 опирается на основной критерий.

Предложение 2. *Если* $(x_1, x_2) = 1$, *то* $C(x_1, x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Доказательство. Пусть $ax_1 + bx_2 = 1$ и $[-bm/x_1; am/x_2] = [u(m); v(m)]$ — отрезок, рассматриваемый в основном критерии. Покажем, что выполняются следующие утверждения:

1) если $m = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1 = x_1x_2 - x_1 - x_2$, то $[u(m), v(m)]$ не содержит ни одного целого числа;

2) если $m = x_1x_2 - x_1 - x_2 + t$, то для всех $1 \le t \le x_1$ отрезок $[u(m), v(m)]$ содержит хотя бы одно целое число.

Докажем 1). Пусть $m = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1 = x_1x_2 - x_1 - x_2$. Тогда

$$v(m) = a(x_1x_2 - x_1 - x_2)/x_2 = ax_1 + b - a - 1 + (x_2 - 1)/x_2.$$

Обозначим через $[v(m)] = ax_1 + b - a - 1$ целую часть числа $v(m)$. Получаем:

$$\begin{aligned}[v(m)] - u(m) &= ax_1 + b - a - 1 + b(x_1x_2 - x_1 - x_2)/x_1 = \\ &= (ax_1 + bx_2 - 1) + b - b - a + (-bx_2)/x_1 = \\ &= -a - bx_2/x_1 = (-ax_1 - bx_2)/x_1 = -1/x_1 < 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $[v(m)]$, а значит, и никакое другое целое число не лежит в отрезке $[u(m); v(m)]$. По основному критерию получаем, что

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1 \notin A(x_1, x_2).$$

Докажем 2). Без ограничения общности можем считать, что $x_1 < x_2$. Пусть $m = x_1x_2 - x_1 - x_2 + t$ для $1 \le t \le x_1$, тогда

$$\begin{aligned}u(m) &= -b(x_1x_2 - x_1 - x_2 + t)/x_1 = -bx_2 + b + (bx_2 - bt)/x_1 = \\ &= ax_1 - 1 + b - a + (1 - bt)/x_1.\end{aligned}$$

По теореме о делении с остатком

$$1 - bt = x_1q + r,\ 0 \le r < x_1, \tag{1}$$

поэтому $u(m) = ax_1 - 1 + b - a + q + r/x_1$ и $[u(m)] = ax_1 - 1 + b - a + q$. Если $r = 0$, то $u(m)$ — целое число, лежащее в $[u(m); v(m)]$. С помощью непосредственных вычислений получаем:

$$v(m) = a(x_1x_2 - x_1 - x_2 + t)/x_2 = ax_1 + b - a + q + (t + rx_2 - x_1 - x_2)/(x_1x_2).$$

Если $r = 1$, то из (1) получаем $-bt = x_1q$, а поскольку x_1 и b взаимно просты, то b делит q, поэтому $|b| \le q$. Воспользовавшись тем, что $t \le x_1$, получаем $t = x_1$. Следовательно, $[v(m)] = ax_1 + b - a + q \in [u(m); v(m)]$.

Если $1 < r < x_1$, то

$$0 < t + x_2 - x_1 \le t + rx_2 - x_1 - x_2 < rx_2 < x_1x_2,$$

и вновь получаем $[v(m)] = ax_1 + b - a + q \in [u(m); v(m)]$.

С помощью основного критерия делаем вывод, что x_1 чисел, начиная с числа $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$, а значит, и все последующие, лежат в $A(x_1, x_2)$ в силу Замечания 2). Таким образом, из доказанных пунктов 1) и 2) следует, что $C(x_1, x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. $\square$

Предложение 3. *Пусть* $(x_1, x_2) = 1$, *тогда*

$$K(x_1, x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)/2 = C(x_1, x_2)/2.$$

Доказательство. Пусть $(x_1, x_2) = 1$. Назовем упорядоченную пару (a, b) *хорошей* (для чисел x_1, x_2), если

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 \notin A(x_1, x_2),\\ ax_1 + bx_2 > 0,\\ -x_2 < a < 0, 0 < b < x_1. \end{aligned}$$

Отметим два очевидных факта:

1) если натуральное число m не лежит в $A(x_1, x_2)$, то существует такая единственная хорошая пара (a, b), что $m = ax_1 + bx_2$;

2) различные хорошие пары (a, b) задают различные числа $m = ax_1 + bx_2 \in \mathbb{N} \setminus A(x_1, x_2)$.

Тогда понятно, что натуральных чисел, не лежащих в $A(x_1, x_2)$, в точности столько, сколько найдется хороших пар для чисел x_1, x_2. Положим $b = 1$ и определим, сколько существует хороших пар вида $(a, 1)$. Пусть по теореме о делении с остатком $x_2 = x_1 q_1 + r_1$, причем в силу взаимной простоты x_1 и x_2 имеем $0 < r_1 < x_1$. Проверим, что пары $(-1, 1), (-2, 1), \ldots, (-q_1, 1)$ хорошие и других хороших пар вида $(a, 1)$ нет. Пусть $1 \leq k \leq q_1$. Тогда

$$-kx_1 + x_2 = (q_1 - k)x_1 + r_1 > 0.$$

С другой стороны, $(q_1 - k)x_1 + r_1 < x_2$, поэтому выполнимость условия $-kx_1 + x_2 \in A(x_1, x_2)$ влекло бы, что $(q_1 - k)x_1 + r_1$ кратно x_1, противоречие. Очевидно, что $-x_2 < -k < 0$, поэтому пара $(-k, 1)$ хорошая. Наконец, если $a < -q_1$, то $ax_1 + x_2 = (a + q_1)x_1 + r_1 < 0$, и пара $(a, 1)$ не является хорошей.

Аналогично, при $b = i, i < x_1$, имеется в точности q_i хороших пар вида (a, i), где $ix_2 = x_1 q_i + r_i$, $0 \leq r_i < x_1$, а именно пары $(-1, i), (-2, i), \ldots, (-q_i, i)$. Получаем систему равенств:

$$\begin{cases} x_2 & = x_1 q_1 + r_1 \\ 2x_2 & = x_1 q_2 + r_2 \\ & \ldots \\ (x_1 - 1)x_2 & = x_1 q_{x_1 - 1} + r_{x_1 - 1}, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 \leq r_i < x_1$. Из системы (2) следует, что хороших пар в точности $q_1 + q_2 + \ldots + q_{x_1 - 1}$. Заметим, что остатки r_i отличны от нуля и попарно различны. Поэтому

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{x_1 - 1} = 1 + 2 + \ldots + (x_1 - 1) = x_1(x_1 - 1)/2.$$

Просуммировав равенства (2), получаем

$$x_1(x_1 - 1)x_2/2 = x_1(q_1 + q_2 + \ldots + q_{x_1 - 1}) + x_1(x_1 - 1)/2,$$

откуда выражаем

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{x_1 - 1} = (x_1 - 1)(x_2 - 1)/2 = C(x_1, x_2)/2.$$

Таким образом,

$$K(x_1, x_2) = C(x_1, x_2) - C(x_1, x_2)/2 = C(x_1, x_2)/2.$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 1 [5]. *Для взаимно простых натуральных чисел x_1, x_2 количество натуральных чисел, не представимых в виде $ax_1 + bx_2$ с целыми неотрицательными a, b, равно $(x_1 - 1)(x_2 - 1)/2$.*

Обобщение критерия на случай большего числа порождающих элементов

Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ — n-порожденный идеал, $(x_1, \ldots, x_n) = 1$ и $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 1$ для некоторых $a_i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим такие параметры k_i, что $k_1 + \ldots + k_n = 0$. Положим также $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ и $\bar{x}_i = x/x_i$.

Пусть $m \in A(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $m = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ для некоторых $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$. Заметим, что

$$m = (ma_1 + \bar{x}_1 k_1)x_1 + \ldots + (ma_n + \bar{x}_n k_n)x_n.$$

Для каждого i положим $t_i = \bar{x}_i k_i = \alpha_i - ma_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $t_i + ma_i \geq 0$ и непосредственно проверяется справедливость равенства $t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n = 0$. Получили, что если $m \in A(x_1, \ldots, x_n)$, то система

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i & = 0 \\ ma_1 + t_1 & \geq 0 \\ & \ldots \\ ma_n + t_n & \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение. Верно и обратно, пусть система (3) имеет целочисленное решение $(s_1, \ldots, s_n)$. Тогда $ma_i + s_i \in \mathbb{Z}^+$ и

$$\sum_{i=1}^{n} (ma_i + s_i)x_i = m \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} s_i x_i = m1 + 0 = m \in A(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, имеем следующий критерий.

Пусть $A(x_1, \ldots, x_n)$ *— n-порожденный идеал,* $(x_1, \ldots, x_n) = 1$ *и* $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 1$ *для некоторых* $a_i \in \mathbb{Z}$. *Тогда* $m \in A(x_1, \ldots, x_n)$ *в точности тогда, когда система* (3) *имеет целочисленное решение.*

Покажем, что этот критерий является обобщением ранее рассмотренного Основного критерия (для идеала с двумя образующими). Для взаимно простых x_1, x_2 и соотношения $ax_1 + bx_2 = 1$ система (3) примет вид

$$\begin{cases} x_1 t_1 + x_2 t_2 & = 0 \\ ma + t_1 & \geq 0 \\ mb + t_2 & \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

и пусть (s_1, s_2) — ее некоторое целочисленное решение. Тогда из $x_1 s_1 + x_2 s_2 = 0$ и взаимной простоты x_1 и x_2 следует, что x_1 делит t_2, x_2 делит t_1, поэтому $t_2/x_1 = -t_1/x_2 \in \mathbb{Z}$ и $-bm/x_1 \leq t_2/x_1 \leq am/x_2$. Обратно, если $[-bm/x_1; am/x_2]$ содержит целое число s, то легко проверяется, что система (4) имеет целочисленное решение $(-sx_2; sx_1)$.

Если проводить геометрическую интерпретацию, то получается, что система (3) задает $(n-1)$-мерный симплекс, т. е. для $n = 2, 3, 4, \ldots$ — отрезок, треугольник, тетраэдр и т. д. соответственно. Вид системы показывает, что вершины симплексов имеют рациональные координаты.

Заключение

Обобщенный критерий и его геометрическая интерпретация показывают, что нахождение константы Фробениуса в общем случае можно свести к задаче о существовании целочисленной точки некоторого симплекса. Возникает вопрос, удобно ли применение этого критерия для решения конкретных задач при описании n-порожденных идеалов полукольца $\mathbb{N}$, в частности, указанных в первой части статьи?

Список источников

1. **Roberts J. B.** Note on linear form // *Proc. AMS*. 1956. Vol. 7. Pp. 465–469.

2. **Dulmage A. L., Mendelsohn N. S.** Gaps in the exponent set of primitive matrices // *Illinois J. Math.* 1964. Vol. 8. Pp. 642–656.

3. **Hofmeister G. R.** Zu einem Problem von Frobenius // *Norske Videnskabers Selskabs Skrifter*. 1966. Vol. 5. Pp. 1–37.

4. **Selmer E. S.** On the linear diophantine problem of Frobenius // *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1977. Vol. 293–294. Pp. 1–17. doi:10.1515/crll.1977.293-294.1.

5. **Sylvester J. J.** Mathematical questions, with their Solutions // *Educational Times*. 1884. Vol. 41. Pp. 21.

6. **Golan J. S.** Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 365 p.

7. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец. Киров: ВятГГУ, 2010. 224 с.

8. **Allen P. J., Dale L.** Ideal theory in the semiring Z^+ // *Publ. Math. Debrecen*. 1975. Vol. 22 (3–4). Pp. 219–224.

9. **Чермных В. В., Николаева О. В.** Об идеалах полукольца натуральных чисел // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*. 2009. Vol. 11. С. 118–121.

References

1. **Roberts J. B.** Note on linear form. *Proc. AMS*. 1956. Vol. 7. Pp. 465–469.

2. **Dulmage A.L., Mendelsohn N.S.** Gaps in the exponent set of primitive matrices. *Illinois J. Math.* 1964. Vol. 8. Pp. 642–656.

3. **Hofmeister G.R.** Zu einem Problem von Frobenius. *Norske Videnskabers Selskabs Skrifter*. 1966. Vol. 5. Pp. 1–37.

4. **Selmer E. S.** On the linear diophantine problem of Frobenius. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. 1977. Vol. 293–294. Pp. 1–17. doi:10.1515/crll.1977.293-294.1.

5. **Sylvester J. J.** Mathematical questions, with their Solutions. *Educational Times*. 1884. Vol. 41. *P. 21.*

6. **Golan J. S.** *Semirings and their applications*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 365 p.

7. **Chermnykh V. V.** *Funktsional'nye predstavleniya polukolets* [Functional representations of semirings]. Kirov: VyatGU, 2010. P. 224. (In Russ.)

8. **Allen P. J., Dale L.** Ideal theory in the semiring Z^+. *Publ. Math. Debrecen*. 1975. Vol. 22 (3–4). Pp. 219–224.

9. **Chermnykh V. V., Nikolaeva O. V.** On ideals of semirings of natural numbers. *Matematicheskiy vestnik pedvuzov i unirsitetov Volgo-Vyatskogo regiona* [Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Universities of the Volga-Vyatka Region]. 2009. Vol. 11. Pp. 118–121. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Меняев Даниил Евгениевич / Daniil E. Menyaev
обучающийся бакалавриата/ undergraduate student
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Чермных Василий Владимирович / Vasily V. Chermnykh
д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник / Doctor of in Physics and Mathematics, Associate Professor, Chief Scientific Officer
Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 17.07.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 01.09.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 07.09.2023