Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Научная статья

УДК 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА КАК ЗАВЕРШЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Елена Юрьевна Яшина
Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена, elyashina@mail.ru

Аннотация. В статье приведено оригинальное доказательство теоремы Фробениуса о конечномерных алгебрах с делением над полем вещественных чисел. Теорема показывает невозможность расширения понятия числа, поэтому ее доказательство полезно для формирования профессиональных компетенций будущих учителей математики.

Ключевые слова: линия числа, вещественные числа, конечномерная алгебра с делением, теорема Фробениуса

Для цитирования: Яшина Е. Ю. Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 69–82. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

Article

Proof of Frobenius' Theorem as Completion of Algebra and Numerical Systems Course at Pedagogical University

Elena Yu. Yashina
The Herzen State Pedagogical University of Russia, elyashina@mail.ru

Abstract. The article presents an original proof of Frobenius' theorem on finite-dimensional division algebras over a field of real numbers. The theorem shows the impossibility of extension of the concept of number, so its proof is useful for the formation of professional competencies of future mathematics teachers.
Keywords: number line, real numbers, finite-dimensional division algebra, Frobenius' theorem

For citation: Yashina E. Yu. Proof of Frobenius' Theorem as Completion of Algebra and Numerical Systems Course at Pedagogical University. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 69–82. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

Понятие числа является одним из основных в школьном курсе математики, а числовая линия – одной из фундаментальных содержательно-методических линий этого курса [1; 2]. Поэтому так важно, чтобы при подготовке будущих учителей математики введению и теоретическому обоснованию числовых систем было уделено особое внимание. Обычно это делается как в курсе алгебры, так и более строго в курсе числовых систем. Порядок изучения чисел в вузе практически такой же, как и в школе, – натуральные числа (обычно аксиоматика Пеано), кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле вещественных чисел, поле комплексных чисел:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

В школе возможен разный порядок изучения рациональных и целых чисел, свойства сложения и умножения формулируются без доказательства, действительные (вещественные) числа (как правило) вводятся как бесконечные десятичные дроби. Мы изучали вопрос изучения школьниками чисел, их свойств в различных учебниках, но не предполагали останавливаться на этом здесь. На наш взгляд, это достаточно подробно сделано в работе [2]. В вузе помимо аккуратного построения каждой числовой системы мы должны показать возможности каждой следующей системы по отношению к предыдущей [1]. В частности – в множестве натуральных чисел мы имеем возможность только выполнять сложение и умножение, множество целых чисел уже коммутативное кольцо с единицей, то есть в нем определено вычитание. Рациональные числа – поле, то есть множество замкнуто относительно четырех арифметических операций (с ограничением для деления на ноль), но не для каждого рационального числа, даже положительного, определено значение корня n-й степени. Множество вещественных чисел также образует поле и в нем появляется возможность из каждого неотрицательного числа извлечь корень n-й степени. В поле комплексных чисел корень n-й степени можно извлечь из любого числа. Но в комплексных числах теряется возможность сравнивать числа по величине.

И тогда естественным образом возникает вопрос: а возможно ли дальнейшее расширение понятия числа, то есть существуют ли множества, содержащие комплексные числа и имеющие более богатый набор свойств по отношению к ним? Оказывается нет, если будем вкладывать множество комплексных чисел в большее множество (например, кватернионы), то некоторые свойства (коммутативность умножения) будут потеряны, и дальше вкладывать без потери свойств невозможно, что и утверждает теорема Фробениуса. Доказательство этой теоремы есть, например, в [3], но оно далеко выходит за рамки курса математики педагогического вуза. В настоящей статье предложено оригинальное доказательство теоремы Фробениуса, которое опирается только на материал базового курса алгебры педагогического вуза. Идея доказательства принадлежит доценту кафедры алгебры ЛГПИ им. Герцена Анне Яковлевне Айзенштат, которая работала в вузе в 60–80-х гг. прошлого века. Нами доказательство несколько переработано, уменьшено количество лемм и приведено в соответствие с современным курсом алгебры вуза.

Предварительно введем несколько определений.

Определение. Пусть K – поле; Λ – множество, рассматриваемое вместе с введенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля K. Λ называется *алгеброй* над K, если

1) $(\Lambda, +, \cdot)$ – кольцо;

2) Λ – линейное пространство над K;

3) $\forall\,\alpha \in K\ \forall\,a, b \in \Lambda\ \ \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Замечание. Размерность алгебры – это размерность ее линейного пространства. Соответственно, если существует конечный базис алгебры Λ над полем K, то алгебра называется *конечномерной.*

Подалгебра – это подпространство и подкольцо. Соответственно, подмножество Λ' алгебры Λ является подалгеброй тогда и только тогда, когда выполнено

$$\forall\,\alpha \in K\ \forall\,a, b \in \Lambda'\ \ a \pm b \in \Lambda',\ ab \in \Lambda',\ \alpha a \in \Lambda'.$$

Определение. Пусть Λ_1, Λ_2 – алгебры над полем K. Отображение $\phi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ называется *изоморфизмом алгебр*, если ϕ – биекция, и выполнено

$$\forall\,\alpha \in K\ \forall\,a, b \in \Lambda\ \phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b),\ \phi(ab) = \phi(a)\phi(b),\ \phi(\alpha a) = \alpha\phi(a).$$

То есть ϕ – изоморфизм колец и линейных пространств. В этом случае алгебры Λ_1, Λ_2 называют *изоморфными.*

Определение. Если Λ – коммутативное кольцо, то алгебра Λ называется *коммутативной.* Если Λ – кольцо с единицей, то говорят, что Λ – *алгебра с единицей.* Единицу алгебры будем обозначать e (чтобы не путать с единицей поля $1 \in K$). Ноль алгебры будем обозначать $\mathbf{0}$ (чтобы не путать с нулем поля $0 \in K$).

Если $\Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ – группа относительно умножения, то есть

$$\forall\,a \in \Lambda\ a \neq \mathbf{0}\ \exists\,a^{-1} \in \Lambda\ aa^{-1} = a^{-1}a = e,$$

то Λ называется *алгеброй с делением.*

Примеры алгебр.

1. Пусть K – произвольное поле. $M_n(K)$ – множество квадратных матриц над полем K образует алгебру относительно сложения, умножения матриц и умножения матриц на элементы поля K. При $n > 1$ эта алгебра некоммутативна, с единицей (единичная матрица), не является алгеброй с делением, $dim_K M_n = n^2$.

2. Пусть K – произвольное поле. $K[x]$ – множество многочленов над полем K относительно сложения, умножения многочленов и умножения многочленов на элементы поля K образует алгебру. Эта алгебра коммутативна, с единицей, не является алгеброй с делением и не имеет конечной размерности над K.

3. Пусть $K = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Тогда $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ – конечномерные алгебры с делением над полем $\mathbb{R}$ (здесь $\mathbb{H}$ – тело кватернионов). Причем $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{H} = 4$.

Свойство алгебры с делением.

Пусть Λ – алгебра над полем K, e – единица алгебры, и для некоторого $\alpha \in K$ имеет место $\alpha e = \mathbf{0}$. Тогда $\alpha = 0$.

Действительно, пусть $\alpha \neq 0$, тогда существует $\alpha^{-1} \in K$. Имеем

$$e = 1e = (\alpha^{-1}\alpha)e = \alpha^{-1}(\alpha e) = \alpha^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Откуда получаем $\Lambda = \{\mathbf{0}\}$, что противоречит определению алгебры с делением.

Теорема Фробениуса. Всякая конечномерная алгебра с делением над полем вещественных чисел изоморфна либо алгебре вещественных чисел ($\mathbb{R}$), либо алгебре комплексных чисел ($\mathbb{C}$), либо алгебре кватернионов ($\mathbb{H}$).

Лемма 1. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$. Тогда в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{R}}$, изоморфная алгебре $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть e – единица алгебры Λ. Рассмотрим множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \{\alpha e \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Нетрудно проверить по определению, что $\overline{\mathbb{R}}$ – подалгебра Λ.

Покажем, что $\overline{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$, для чего рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, такое, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ $\phi(\alpha) = \alpha e$. Нетрудно проверить, что ϕ удовлетворяет всем условиям определения изоморфизма.

Лемма 2. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}$. Тогда для любого элемента $a \in \Lambda$, $a \notin \overline{\mathbb{R}}$ существует элемент $t \in \Lambda$, $t \notin \overline{\mathbb{R}}$, такой, что $t^2 = -e$ и a линейно выражается через e, t.

Доказательство. Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = n$. Рассмотрим элементы $e, a, a^2, \ldots, a^n \in \Lambda$. Так как их количество превосходит количество элементов в базисе, то они линейно зависимы, то есть

$$\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ \ \alpha_0 a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \ldots + \alpha_n e = \mathbf{0},$$

причем существует $\alpha_i \neq 0$.

Данное равенство означает, что элемент $a \in \Lambda$ является корнем ненулевого многочлена $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ над полем $\mathbb{R}$. Разложим $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$, где s – наименьший номер, такой, что $\alpha_s \neq 0$:

$$f(x) = \alpha_s (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_k)(x^2 + \rho_1 x + \delta_1) \ldots (x^2 + \rho_m x + \delta_m),$$

где $\rho_i^2 - 4\delta_i < 0$.

Так как $f(a) = \mathbf{0}$, то один из многочленов в разложении $f(x)$ должен обратиться в $\mathbf{0}$ при $x = a$ (алгебра с делением не содержит делителей нуля). Предположим, что при $x = a$ обращается в $\mathbf{0}$ многочлен первой степени, то есть $a - \beta_i e = \mathbf{0}$. Это означает, что $a = \beta_i e \in \overline{\mathbb{R}}$, что противоречит условию леммы. Значит, в $\mathbf{0}$ обращается многочлен второй степени, то есть

$$\exists\, \rho, \delta \in \mathbb{R} \ \ a^2 + \rho a + \delta e = \mathbf{0}, \ \ \rho^2 - 4\delta < 0.$$

Далее

$$(a + \frac{\rho}{2} e)^2 = \frac{\rho^2}{4} e - \delta e = \frac{\rho^2 - 4\delta}{4} e,$$

так как $a^2 + \rho a = -\delta e$.

Обозначим $\frac{\rho^2 - 4\delta}{4} = -\gamma^2 \in \mathbb{R}$.

Домножим обе части равенства на $\frac{1}{\gamma^2}$: $(\frac{1}{\gamma} a + \frac{\rho}{2\gamma} e)^2 = -e$.

Обозначим $\frac{1}{\gamma} a + \frac{\rho}{2\gamma} e = t$, т. е. $t^2 = -e$, также $a = \gamma t - \frac{\rho}{2} e$, то есть a линейно выражается через e, t.

Покажем, что $t \notin \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $t = \beta e$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\frac{1}{\gamma} a + \frac{\rho}{2\gamma} e = \beta e$, значит, $a = (\gamma\beta - \frac{\rho}{2}) e \in \overline{\mathbb{R}}$, что противоречит условию Леммы.

Лемма доказана.

Следствие. Для всякого элемента a конечномерной алгебры с делением Λ над полем $\mathbb{R}$, такого, что $a \notin \overline{\mathbb{R}}$, существует многочлен $x^2 + \rho x + \delta$, $\rho, \delta \in \mathbb{R}$, $\rho^2 - 4\delta < 0$, для которого имеет место $a^2 + \rho a + \delta e = \mathbf{0}$.

Лемма 3. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}$. Тогда в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{C}}$, изоморфная алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть e – единица алгебры Λ. Зафиксируем элемент $t \in \Lambda$ $t^2 = -e$ (такой элемент существует по Лемме 2). Рассмотрим множество

$$\overline{\mathbb{C}} = \{\alpha e + \beta t \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Нетрудно проверить по определению, что $\overline{\mathbb{C}}$ – подалгебра Λ.

Покажем, что $\overline{\mathbb{C}}$ изоморфна $\mathbb{C}$, для чего рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, такое, что $\forall\, z \in \mathbb{C}\;\; z = \alpha + \beta i\;\; \phi(z) = \alpha e + \beta t$. Нетрудно проверить, что ϕ удовлетворяет всем условиям определения изоморфизма.

Лемма 4. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{C}}$, то есть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда существуют такие элементы $i, j \in \Lambda$, что

1) $i, j \notin \overline{\mathbb{R}},\;\; i^2 = -e, j^2 = -e, i \neq \pm j$;

2) e, i, j линейно независимы;

3) $ij + ji = \mu e,\;\; \mu \in \mathbb{R},\;\; |\mu| < 2$.

Доказательство. 1) Так как $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}$, то по Лемме 2

$$\forall\, a \in \Lambda\;\; a \notin \overline{\mathbb{R}}\;\; \exists\, i \in \Lambda\;\; i \notin \overline{\mathbb{R}}\;\; i^2 = -e.$$

Пусть никакого другого элемента, отличного от $\pm i$, который в квадрате дает $-e$, в алгебре Λ нет. Тогда по Лемме 2 любой элемент из Λ линейно выражается через e, i, откуда следует, что $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 2$. Получили противоречие с условием. Значит, найдется элемент $j \notin \overline{\mathbb{R}},\;\; j^2 = -e, i \neq \pm j$.

2) Пусть

$$\alpha e + \beta i + \gamma j = \mathbf{0},\;\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\alpha e + \beta i = -\gamma j$. Возведем в квадрат, получим:

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)e = -2\alpha\beta i.$$

Еще раз возведем в квадрат:

$$((\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2)e = \mathbf{0}.$$

По свойству алгебры с делением

$$(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)^2+4\alpha^2\beta^2=0,$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \alpha\beta=0 \\ \alpha^2-\beta^2+\gamma^2=0. \end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases} \beta=0 \\ \alpha^2+\gamma^2=0, \end{cases}$$

а значит, имеем $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Второй случай:

$$\begin{cases} \alpha=0 \\ -\beta^2+\gamma^2=0, \end{cases}$$

то есть $\gamma=\pm\beta$. Подставим в исходное равенство: $\beta i\pm\beta j=\mathbf{0}$. Если $\beta=\gamma=0$, получаем требуемое, если же $\beta\neq 0$, получаем $i=\pm j$, что противоречит доказанному п. 1).

3) Элементы $i+j$, $i-j$ не принадлежат $\overline{\mathbb{R}}$ (в противном случае e,i,j были бы линейно зависимы). Тогда по следствию из Леммы 2 найдутся многочлены

$$f(x)=x^2+\rho_1x+\delta_1,\ g(x)=x^2+\rho_2x+\delta_2,\ \rho_i^2-4\delta_i<0,$$

такие, что $f(i+j)=\mathbf{0}, g(i-j)=\mathbf{0}$. Это значит

$$\begin{cases} (i+j)^2+\rho_1(i+j)+\delta_1e=\mathbf{0} \\ (i-j)^2+\rho_2(i-j)+\delta_2e=\mathbf{0}. \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} -2e+ij+ji+\rho_1i+\rho_1j+\delta_1e=\mathbf{0} \\ -2e-ij-ji+\rho_2i-\rho_2j+\delta_2e=\mathbf{0}. \end{cases}$$

Сложим получившиеся равенства:

$$(\delta_1+\delta_2-4)e+(\rho_1+\rho_2)i+(\rho_1-\rho_2)j=\mathbf{0},$$

откуда ввиду линейной независимости e, i, j получаем:

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 - 4 = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 = 0. \end{cases}$$

Из последних двух равенств $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Тогда $ij + ji = (2 - \delta_1)e$. Обозначим $\mu = 2 - \delta_1$ и покажем, что $|\mu| < 2$, значит, нужно показать, что $-2 < 2 - \delta_1 < 2$, то есть $0 < \delta_1 < 4$.

Имеем $\rho_1^2 - 4\delta_1 < 0$, $\rho_2^2 - 4\delta_2 < 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$, $\delta_1 + \delta_2 = 4$, следовательно, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, откуда и получаем требуемое.

Лемма доказана.

Лемма 5 (Малая Теорема Фробениуса). Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$. Если Λ коммутативна, то Λ изоморфна либо алгебре вещественных чисел ($\mathbb{R}$), либо алгебре комплексных чисел ($\mathbb{C}$).

Доказательство. Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 1$. Тогда по Лемме 1 существует подалгебра $\overline{\mathbb{R}} \subset \Lambda$, такая, что $\overline{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Так как $dim_{\mathbb{R}}\overline{\mathbb{R}} = 1$, то $\Lambda = \overline{\mathbb{R}}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 2$. Тогда по Лемме 3 существует подалгебра $\overline{\mathbb{C}} \subset \Lambda$, такая, что $\overline{\mathbb{C}}$ изоморфна $\mathbb{C}$. Так как $dim_{\mathbb{R}}\overline{\mathbb{R}} = 2$, то $\Lambda = \overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. По Лемме 4

$$\exists\, i, j \in \Lambda \ i^2 = -e,\ j^2 = -e,\ ij + ji = \mu e,\ |\mu| < 2.$$

Так как Λ коммутативна, то $2ij = \mu e$, возводя в квадрат, получим $4e = \mu^2 e$, то есть $|\mu| = 2$, что противоречит условию.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть Λ – некоммутативная конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, то есть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда существуют элементы $\bar{i}, \bar{j} \in \Lambda$, такие, что

1) $\bar{i}^2 = -e$, $\bar{j}^2 = -e$, $\bar{i} \neq \pm\bar{j}$,

2) $\overline{ij} + \overline{ji} = \mathbf{0}$,

3) $e, \bar{i}, \bar{j}, \overline{ij}$ линейно независимы.

Доказательство. По Лемме 4

$$\exists\, i, j \in \Lambda\ i^2 = -e,\ j^2 = -e,\ ij + ji = \mu e,\ |\mu| < 2.$$

Пусть $\overline{i} = i$, $\overline{j} = \alpha i + \beta j$. Будем искать $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, чтобы выполнялись 1), 2) условия Леммы. Тогда по условию 1) должно выполняться

$$\overline{j}^2 = (\alpha i + \beta j)^2 = (-\alpha^2 - \beta^2)e + \alpha\beta(\overline{ij} + \overline{ji}) = (-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta\mu)e = -e,$$

что равносильно $-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta\mu = -1$.

По 2) условию Леммы должно выполняться:

$$i(\alpha i + \beta j) + (\alpha i + \beta j)i = \mathbf{0},$$

$$-2\alpha e + \beta \underbrace{(ij + ji)}_{\mu e} = \mathbf{0}.$$

Что равносильно $\beta\mu - 2\alpha = 0$. Таким образом, $\overline{i}$, $\overline{j}$, удовлетворяющие 1) и 2) условиям Леммы существуют, если в поле $\mathbb{R}$ разрешима следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \beta\mu - 2\alpha = 0 \\ -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta\mu = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $\alpha = \frac{\beta\mu}{2}$. Подставляем во второе:

$$\beta^2 - \frac{\beta^2\mu^2}{4} = 1,\ \beta^2(1 - \frac{\mu^2}{4}) = 1,\ \beta = \pm\frac{2}{\sqrt{4 - \mu^2}}.$$

Так как $|\mu| < 2$, то корень определен в $\mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

Проверим 3) условие Леммы. Нетрудно показать, что элементы $e, \overline{i}, \overline{j}$ линейно независимы. Пусть

$$\lambda_1 e + \lambda_2\overline{i} + \lambda_3\overline{j} + \lambda_4\overline{ij} = \mathbf{0},\ \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R},$$

и предположим, что существует $\lambda_k \neq 0$. Тогда, по крайней мере, $\lambda_4 \neq 0$, иначе получим противоречие с линейной независимостью e, i, j. Тогда можем выразить $\overline{ij}$:

$$\overline{ij} = \eta e + \xi\overline{i} + \chi\overline{j}. \tag{1}$$

Домножим равенство (1) на $\bar{j}$ справа:

$$-\bar{i} = \eta\bar{j} + \xi\overline{ij} - \chi. \tag{2}$$

Подставим выражение $\overline{ij}$ из (1) в (2):

$$\underbrace{(\xi^2+1)}_{\neq 0}\bar{i} + (\xi\eta - \chi)e + (\xi\chi + \eta)\bar{j} = \mathbf{0},$$

что противоречит линейной независимости $e, \bar{i}, \bar{j}$.

Лемма доказана.

Следствие. $(\overline{ij})^2 = -e$.

Действительно, $(\overline{ij})^2 = \overline{ij}\,\overline{ij} = \overline{ij}(-\overline{ji}) = -(-e)(-e) = -e$.

Лемма 7. Пусть Λ – некоммутативная конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, то есть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{H}}$, изоморфная алгебре кватернионов $\mathbb{H}$.

Доказательство. По Лемме 6

$$\exists\, \bar{i},\, \bar{j},\, \overline{ij} \in \Lambda \;\; \bar{i}^2 = -e,\; \bar{j}^2 = -e,\; (\overline{ij})^2 = -e.$$

Рассмотрим множество

$$\overline{\mathbb{H}} = \{\alpha e + \beta\bar{i} + \gamma\bar{j} + \delta\overline{ij} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Нетрудно проверить по определению, что $\overline{\mathbb{H}}$ – подалгебра Λ. Покажем, что $\overline{\mathbb{H}}$ изоморфна $\mathbb{H}$, для чего рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{H}}$, такое, что

$$\forall\ h \in \mathbb{H}\;\; h = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \quad \phi(h) = \alpha e + \beta\bar{i} + \gamma\bar{j} + \delta\overline{ij}.$$

Нетрудно проверить, что ϕ удовлетворяет всем условиям определения изоморфизма.

Доказательство теоремы Фробениуса.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 1$. Тогда по Лемме 5 алгебра Λ изоморфна $\mathbb{R}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 2$. Тогда по Лемме 5 алгебра Λ изоморфна $\mathbb{C}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда по Лемме 7 в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{H}}$, изоморфная алгебре кватернионов $\mathbb{H}$. Покажем, что $\Lambda = \overline{\mathbb{H}}$. То есть осталось показать, что $\Lambda \subset \overline{\mathbb{H}}$.

Рассмотрим произвольный элемент $a \in \Lambda$. По Лемме 2 существует $t \in \Lambda$, что $t^2 = -e$ и a линейно выражается через e, t. Рассмотрим несколько случаев:

Первый случай: $t = \bar{i}$. Тогда a линейно выражается через $e, \bar{i}$, то есть $a \in \overline{\mathbb{H}}$ (аналогично для случаев $t = \bar{j}$, $t = \overline{ij}$).

Второй случай: $t \neq \bar{i}$, $t \neq \bar{j}$, $t \neq \overline{ij}$. Тогда по Лемме 4 для некоторых $\tau, \mu, \zeta \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\bar{i}t + t\bar{i} = \tau e, \;\; |\tau| < 2; \tag{4}$$

$$\bar{j}t + t\bar{j} = \mu e, \;\; |\mu| < 2; \tag{5}$$

$$\overline{ij}t + t\overline{ij} = \zeta e, \;\; |\zeta| < 2. \tag{6}$$

Умножим равенство (4) на $\bar{i}$ слева, равенство (5) на $\bar{j}$ слева, равенство (6) на $\bar{i}$ слева, на $\bar{j}$ справа и сложим полученные результаты:

$$-t + \bar{i}t\bar{i} - t + \bar{j}t\bar{j} - \bar{j}t\bar{j} - \bar{i}t\bar{i} = \tau\bar{i} + \mu\bar{j} + \zeta\overline{ij},$$

то есть $-2t = \tau\bar{i} + \mu\bar{j} + \zeta\overline{ij}$, значит, t линейно выражается через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\overline{ij}$. Следовательно, a линейно выражается через e, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\overline{ij}$. Таким образом, $a \in \overline{\mathbb{H}}$.

Теорема доказана.

Отметим, что уже в Лемме 5 было доказано, что $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ – единственные коммутативные алгебры с делением над $\mathbb{R}$, то есть без потери свойств расширить понятие числа мы не можем.

Основная техника доказательства – основы теории линейных пространств, неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$, изоморфизмы алгебр (то есть колец и линейных пространств) – материал, известный из базового курса алгебры.

Значимость же самой теоремы Фробениуса для формирования общепрофессиональных компетенций будущего учителя математики трудно переоценить. Безусловно, учитель, конструируя процесс изучения линии числа в курсе школьной математики, должен понимать строение числовых систем. Представление же о том, каким образом происходит расширение числовых систем и владение обоснованием конечности цепочки таких расширений, придает предметным знаниям учителя свойство целостности. Именно это обеспечивает теорема Фробениуса.

Список источников

1. **Жмурова И. Ю.** Изучение числовых систем в педагогическом вузе в контексте реализации интеграционных связей // *Международный научно-исследовательский журнал.* 2020. № 8-3 (98) С. 28–31.

2. **Пантелеймонова А. В., Белова М. А.** Развитие понятия числа в школьном курсе математики // *Continuum. Математика. Информатика. Образование.* 2019. № 4 (16). С. 31–37.

3. **Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.** Конечномерные алгебры. Киев: Вища школа, 1980. 192 с.

References

1. **Zhmurova I. Yu.** The study of Numerical Systems in a Pedagogical University in the context implementing links. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal* [International Research Journal]. 2020, no 8-3 (98), pp. 28–31. (In Russ.) https://doi.org/10.23670/IRJ.2020.98.8.073

2. **Panteleymonova A. V., Belova M. A.** Development of the concept of number in the school mathematics course. *Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovaniye* [Continuum. Mathematics. Computer science. Education]. 2019, no 4 (16), pp. 31–37. (In Russ.)

3. **Drozd Yu. A., Kirichenko V. V.** *Konechnomernye algebry* [Finite-dimensional algebras]. Kiev: Visha shkola, 1980. 192 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Яшина Елена Юрьевна / Elena Yu. Yashina
к.ф.-м.н., доцент / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена / The Herzen State Pedagogical University of Russia
191186, Россия, г. Санкт-Петербург, набережная реки Мойки, 48 / 191186, Russia, Saint Petersburg, Moika River embankment, 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 20.06.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 30.06.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 03.07.2023