ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

2(47) выпуск **23**

Вестник Сыктывкарского университета	Серия 1: *Математика* *Механика* *Информатика*	12+ ISSN 1992-2752
Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год		Выпуск 2 (47) 2023

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2023. — 2 (47). 2023. — 95 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень отечественных изданий, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования и в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)», «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included in the list of editions included in international abstract databases and citation systems, and in which the main scientific results of dissertations for the degree of Candidate or Doctor of Sciences should be published, approved by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. The journal publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)», «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)».

Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.

Адрес редакции
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Свободная цена © ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2023

Главный редактор:
д.пед.н., доцент, ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»
Сотникова О. А.

Ответственный редактор:
Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)

Редакционная коллегия:
Аббасов М. Э., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Беляева Н. А., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Вечтомов Е. М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой (ВятГУ)
Головач П. А., к.ф.-м.н., доцент, исследователь (Университет Бергена, Норвегия)
Григорьев С. Г., член-корреспондент РАО, д.т.н., профессор, профессор (МГПУ)
Дворяткина С. Н., д.пед.н., доцент, профессор (ЕГУ им. И.А. Бунина)
Дорофеев С. Н., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ТолГУ)
Калинин С. И., д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ВятГУ)
Колесников Г. Н., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Колпак Е. П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ)
Крылатов А. Ю., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Махнев А. А., член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник (ИММ УрО РАН)
Одинец В. П., д.ф.-м.н., профессор
Орлов В. В., д.пед.н., профессор, профессор (Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена)
Парилина Е. М., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Певный А. Б., д.ф.-м.н., профессор
Петров Н. Н., д.ф.-м.н., профессор, профессор (УдмГУ)
Петраков А. П., д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Питухин Е. А., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Попов Н. И., д.пед.н., , к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Рудикова-Фронхёфер Л. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой
(ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь)
Тихомиров А. Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник
(Коми НЦ УрО РАН)
Чермных В. В., д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник
(СГУ им. Питирима Сорокина)
Щербатых С.В., д.пед.н., профессор, ректор ЕГУ им. И.А. Бунина

Техническая редакция:
Руденко Л. Н., руководитель издательского центра (СГУ им. Питирима Сорокина),
Котелина Н. О., к.ф-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Мазур В. В., к.г.н., преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)
Старцева Е. Н., ст. преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)

Содержание

Прикладная математика и механика

Ермоленко А. В., Туркова О. И. *Определение напряжений на лицевых поверхностях пластины* 4

Информатика

Мельников В. А. *Об особенностях фильтрации коллизий в физическом движке для трёхмерных игр* 17

Методические материалы

Одинец В. П. *О трудах пяти московских математиков, погибших в годы Великой Отечественной войны* 29

Устюгов В. А., Лавреш И. И., Истомин Ю. Н., Макаров П. А. *О применении устройств SDR в образовательном процессе для технических специальностей вуза* 56

Яшина Е. Ю. *Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете* 69

Хроника университетской жизни

Канева Е. А. *О работе научно-методологического семинара по проблемам образования и методике обучения математике* 83

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Научная статья

УДК 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПЛАСТИНЫ

Андрей Васильевич Ермоленко, Оксана Игоревна Туркова
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, ea74@list.ru

Аннотация. При решении контактных задач необходимо ставить условия взаимодействия с использованием перемещений лицевых поверхностей пластины. Как правило, полевые уравнения определяют прогиб срединной поверхности пластины, поэтому условия контакта записываются достаточно громоздко. Для устранения этой трудности предложена теория типа Кармана – Тимошенко – Нагди относительно произвольной отсчетной поверхности. С использованием данной теории в статье выводятся выражения для определения напряжений на лицевых поверхностях пластины.

Ключевые слова: теория пластин, отсчетная поверхность, напряжения

Для цитирования: Ермоленко А. В., Туркова О. И. Определение напряжений на лицевых поверхностях пластины // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 4–16. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_4

© Ермоленко А. В., Туркова О. И., 2023.

Article

Determination of stresses on the front surfaces of the plate

Andrey V. Yermolenko, Oksana I. Turkova
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

Abstract. When solving contact problems, it is necessary to set the interaction conditions using the displacements of the front surfaces of the plate. As a rule, the field equations determine the deflection of the middle surface of the plate; therefore, the contact conditions are written rather cumbersomely. To eliminate this difficulty, the theory of the Karman–Timoshenko–Nagdi type with respect to an arbitrary reference surface is proposed. Using this theory, the article derives expressions for determining the stresses on the front surfaces of the plate.

Keywords: plate theory, reference surface, stresses

For citation: Yermolenko A. V., Turkova O. I. Determination of stresses on the front surfaces of the plate. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 4–16. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_4

1. Введение

Классическая теория плоских пластин предполагает, что нормаль к недеформированной поверхности переходит в нормаль к деформированной поверхности, не изменяя своей длины (т. н. геометрическая гипотеза) [1]. Как следствие, на основании закона Гука перезывающие силы равны нулю, что не позволяет уравновесить нормальную нагрузку. Для устранения данного формального противоречия строятся теории пластин на основе отказа от гипотез Кирхгофа.

В рамках школы механики академика В. В. Новожилова [2] построен пример такой теории — теория типа Кармана – Тимошенко – Нагди [3], в которой учитываются поперечные сдвиги в соответствии с подходом С. П. Тимошенко [4], а поперечное обжатие — путем постулирования линейного закона изменения тангенциальных перемещений и квадратичного закона для прогиба по толщине пластины [5].

При этом для учета поперечного обжатия по аналогии с монографией [6] вводятся параметры λ_ξ, κ_ξ, однако, в отличие от подхода данной

работы, эти параметры, так же как и искомые функции u_1, u_2, w, рассматриваются как варьируемые.

Используя теорию типа Кармана – Тимошенко – Нагди решен ряд контактных задач со свободной границей, например [7; 8]. Показано, что при использовании уточненных теорий контактные реакции не содержат сосредоточенные силы, а моменты, связанные с кривизной и с изменением поперечных сдвигов, находятся в противофазе, т. е. максимальные значения совокупного момента уменьшаются.

При этом оказалось, что при формулировке условий контакта необходимо использовать величины, отнесенные к одной из лицевых поверхностей, в то время как все неизвестные величины отнесены к срединной поверхности. Из-за этого все выражения становятся громоздкими, на каждой итерации приходится пересчитывать контактные величины через функции срединной поверхности. Поэтому возникает потребность в получении уравнений равновесия, отнесенных к той или иной отсчетной поверхности, так как такой выбор искомых функций позволяет представить разрешающие уравнения теории оболочек в достаточно компактной форме [9].

На необходимость совмещать отсчетную поверхность с лицевой контактируемой поверхностью оболочки при решении контактных задач указывается в работе [10].

В статье [11] утверждается, что «если в формулировке конечного элемента пластины/оболочки не предусмотрено управление положением отсчетной поверхности, то некоторые задачи деформирования пластин и оболочек в принципе не решаются с использованием таких элементов».

Отметим также работы [12–17], в которых при рассмотрении лицевых поверхностей оболочек в качестве отсчетных построены варианты геометрически линейной и нелинейной теорий оболочек.

В работе [18] на основе алгоритма, изложенного в работах [3; 8], выводятся полевые и граничные уравнения теории типа Кармана – Тимошенко – Нагди, приведенные к произвольной базовой (не обязательно лицевой) поверхности[1]. Пример использования названной теории приведен в работе [19].

Однако при построении теории типа Кармана – Тимошенко – Нагди относительно произвольной отсчетной поверхности [18] не приведены

[1]В дальнейшем данная поверхность названа отсчетной.

напряжения на лицевых поверхностях пластины, что делает представленную работу недостаточно завершенной.

Целью представленной статьи является вывод напряжений на лицевых поверхностях пластины с использованием уточненной теории пластин типа Кармана – Тимошенко – Нагди.

2. Материалы и методы

Данное исследование построено на базе использования теоретического исследования. Применение теоретического метода позволило провести анализ существующих источников в области построения теорий механики пластин и оболочек и получить выражения для напряжений на лицевых поверхностях пластины.

3. Результаты

Трехмерное тело, занимающее область

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \mathring{\Omega}, x_3 \equiv \xi \in [\frac{1}{2}(b - \mathring{h}), \frac{1}{2}(b + \mathring{h}))]\},$$

где $b \in [-\mathring{h}, \mathring{h}]$, называется пластиной, если длина отрезка $\mathring{h}$, называемого толщиной пластины, намного меньше любого характерного размера односвязной области $\mathring{\Omega}$. Поверхности $\xi = \frac{1}{2}(b - \mathring{h})$ и $\xi = \frac{1}{2}(b + \mathring{h})$ называют лицевыми, а поверхность $\xi = \frac{1}{2}b$ — срединной. Отметим также, что параметр b характеризует положение отсчетной поверхности. Если $b = 0$, то отсчетная поверхность совпадает с традиционной срединной. Если $b = h$, то отсчетная поверхность совпадает с нижней лицевой поверхностью.

Тангенциальные перемещения $(u_i^\xi, i = 1, 2)$ и прогиб (w) изменяются по толщине пластины следующим образом [18]:

$$u_i^\xi = u_i + \xi\vartheta_i, \vartheta_i = -\frac{\partial w}{\partial x_i}, i = 1, 2; \tag{1}$$

$$w^\xi = w + (\lambda_\xi - 1)\xi + \frac{1}{2}\xi^2\lambda_\xi\kappa_\xi. \tag{2}$$

Параметры λ_ξ, κ_ξ характеризуют поперечную деформацию [18].

Для описания деформации пластины используем тензор Грина – Лагранжа с компонентами

$$\gamma_{ij}^{\xi} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{\xi} + u_{j,i}^{\xi} + u_{k,i}^{\xi} u_{k,j}^{\xi}),\ i,j = 1,2,3$$

$$(u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j,\ u_3 \equiv w,\ x_3 \equiv \xi) \tag{3}$$

при следующих допущениях:

i) поперечная деформация описывается компонентами тензора деформации Коши ($\gamma_{i3}^{\xi} \approx e_{i3}^{\xi} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$);

ii) в тангенциальных компонентах тензора Грина из квадратичных слагаемых учитываются лишь связанные с нормальными перемещениями w;

iii) слагаемыми, содержащими производные от функций λ_ξ, κ_ξ, можно пренебречь.

В соответствии с допущениями (1), (2), i)-iii) компоненты тензора Грина – Лагранжа (3) записываем так:

$$\gamma_{i3}^{\xi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w^{\xi}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{\xi}}{\partial \xi}\Big) = \frac{1}{2}(w_{,i} + \vartheta_i) = \frac{1}{2}\psi_i;$$

$$\gamma_{33}^{\xi} = \frac{\partial w^{\xi}}{\partial \xi} = \lambda_\xi - 1 + \xi\lambda_\xi\kappa_\xi;$$

$$\gamma_{ij}^{\xi} = \gamma_{ij} + \xi(\kappa_{ij} + \mu_{ij}),\ i,j = 1,2, \tag{4}$$

где

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}w_{,i}w_{,j},\ e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$$\kappa_{ij} = -w_{,ij},\ \mu_{ij} = \frac{1}{2}(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}).$$

В качестве упругого потенциала применительно к жесткогибким оболочкам хорошо зарекомендовали себя соотношения закона упругости для стандартного материала второго порядка [1]. Эти формулы в случае пластины *совпадают по форме* с соотношениями закона Гука и имеют вид

$$\sigma_{ij}^{\xi} = 2\mu\gamma_{ij}^{\xi} + \lambda I_\Gamma \delta_{ij}, \tag{5}$$

где λ, μ – упругие константы Ламе; δ_{ij} – символ Кронекера; I_Γ – первый главный инвариант тензора деформаций Грина – Лагранжа: $I_\Gamma = \gamma^\xi_{\alpha\alpha}$[2].

Рассматриваем поперечный изгиб под действием только нормальной нагрузки. Записывая граничные условия на лицевых поверхностях пластины в виде

$$J\sigma^\xi_{33}(\mathring{h}/2 + b/2) = q^+_n,\ \sigma^\xi_{33}(-\mathring{h}/2 + b/2) = q^-_n, \tag{6}$$

на основании (4), (6) нетрудно получить следующие формулы для параметров, характеризующих поперечное обжатие:

$$\lambda_\xi = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\gamma_{\alpha\alpha} + \frac{m_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}},$$

$$\lambda_\xi \kappa_\xi = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\kappa_{\alpha\alpha} + \mu_{\alpha\alpha}) + \frac{q_n}{(\lambda + 2\mu)\mathring{h}}, \tag{7}$$

где

$$q_n = q^+_n - q^-_n,\ m_n = \frac{1}{2}(\mathring{h} - b)q^+_n + \frac{1}{2}(\mathring{h} + b)q^-_n. \tag{8}$$

С учетом формул (7) на основании (4) получаем

$$\gamma^\xi_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\gamma^\xi_{\alpha\alpha} + \frac{m_n + \xi q_n}{(\lambda + 2\mu)\ ooh}.$$

Далее, принимая во внимание эквивалентную равенствам (8), (5) формулу

$$\sigma^\xi_{33} = \frac{1}{h}(m_n + \xi q_n),$$

находим

$$\sigma^\xi_{11} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma^\xi_{33} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\gamma^\xi_{11} + \nu\gamma^\xi_{22}),$$

$$\sigma^\xi_{22} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\sigma^\xi_{33} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\gamma^\xi_{22} + \nu\gamma^\xi_{11}),\ \sigma^\xi_{12} = \frac{E}{1 + \nu}\gamma^\xi_{12}, \tag{9}$$

[2]В данной работе по повторяющемуся в одночлене дважды индексу α следует суммировать от 1-го до 2-х.

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, связанные с константами λ и μ соотношениями [1]

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1=2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

.

Усилия и моменты вводим следующим образом:

$$T_{ij} = \int_{-\mathring{h}/2+b/2}^{\mathring{h}/2+b/2} (\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij})d\xi,$$

$$M_{ij} = \int_{-\mathring{h}/2+b/2}^{\mathring{h}/2+b/2} (\sigma_{ij}^{\xi} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{33}^{\xi}\delta_{ij})\xi d\xi.$$

Отсюда с учетом (9), (4) находим

$$T_{11} = B(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}) + \frac{bE\mathring{h}}{2(1-\nu^2)}[(\kappa_{11}+\mu_{11}) + \nu(\kappa_{22}+\mu_{22})],$$

$$T_{22} = (1 \rightleftharpoons 2)T_{11}, T_{12} = (1-\nu)B\gamma_{12},\ B = Eh/(1-\nu^2);$$

$$M_{11} = \frac{E\mathring{h}(\mathring{h}^2+3b^2)}{12(1-\nu^2)}[(\kappa_{11}+\mu_{11}) + \nu(\kappa_{22}+\mu_{22})]+$$

$$+\frac{bE\mathring{h}}{2(1-\nu^2)}(\gamma_{11}+\nu\gamma_{22}), M_{22}^{''} = (1 \rightleftharpoons 2)M_{11}^{''},$$

$$M_{12} = \frac{bE\mathring{h}}{2(1+\nu)}\gamma_{12} + \frac{E\mathring{h}(\mathring{h}^2+3b^2)}{12(1+\nu)}(\kappa_{12}+\mu_{12}). \qquad (10)$$

Получим выражения для напряжения $\sigma_{11}^{\mathring{h}/2+b/2}$ на верхней лицевой поверхности пластины. Для этого рассмотрим выражения для T_{11}, M_{11} из соотношений (10) как систему для неизвестных $(\gamma_{11}+\nu\gamma_{22})$ и $(\kappa_{11}+\mu_{11})+\nu(\kappa_{22}+\mu_{22})$, из которой получаем следующие выражения:

$$\gamma_{11}+\nu\gamma_{22} = \frac{T_{11}}{B} - \frac{b}{2}\frac{M_{11}}{D} + \frac{3b^2(1-\nu^2)}{E\mathring{h}^3}T_{11}, D = \frac{E\mathring{h}^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\kappa_{11}+\mu_{11}+\nu(\kappa_{22}+\mu_{22}) = \frac{M_{11}}{D} - \frac{6b(1-\nu^2)}{E\mathring{h}^3}T_{11}.$$

Подставляя полученные значения в формулу (9) для σ_{11}^{ξ} и учитывая соотношения (4) при $\xi = \mathring{h}/2 + b/2$, получим следующее выражение:

$$\sigma_{11}^{h/2+b/2} = \frac{T_{ii}}{h} + \frac{6M_{ii}}{h^2} + \frac{\nu}{1-\nu} q_n^+ - \frac{3bT_{11}}{\mathring{h}^2}.$$

Таким образом получено первое из соотношений ($i = 1, 2$) для вычисления на лицевых поверхностях пластины

$$\sigma_{ii}^{\pm h/2+b/2} = \frac{T_{ii}}{h} \pm \frac{6M_{ii}}{\mathring{h}^2} + \frac{\nu}{1-\nu} q_n^{\pm} \mp \frac{3bT_{ii}}{\mathring{h}^2},$$

$$\sigma_{12}^{\pm h/2} = \frac{T_{12}}{h} \pm \frac{6M_{12}}{h^2} \mp \frac{3bT_{12}}{\mathring{h}^2}. \qquad (11)$$

4. Обсуждение

С использованием соотношений (11) теория типа Кармана – Тимошенко – Нагди принимает завершенный вид и позволяет расчитывать все параметры напряженно-деформированного состояния пластин. Также отметим, что если сравнить соотношения (11) с соотношениями работы [3], то они совпадают при $b = 0$.

Список источников

1. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Сыктывкарский ун-та, 1995. 251 с.

2. **Михайловский Е. И.** Школа механики оболочек академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2005. 172 с.

3. **Михайловский Е. И., Бадокин К. В., Ермоленко А. В.** Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1.* 1999. Вып. 3. С. 181–202.

4. **Тимошенко С. П.** Курс теории упругости. Ч. II. Стержни и пластинки. Петроград: Изд-во ин-та инж. путей сообщения, 1916. 2-е изд. Киев: Наукова думка, 1972. 507 с.

5. **Naghdi P. M.** On the theory of thin elastic shells // *Quarterly of Applied Mathematics.* 1957. 14. No 4. Pp. 369–380.

6. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

7. **Yermolenko A. V., Mironov V. V.** Mechanism of the effect of transverse shifts on the stress state in the problems of plate and shell mechanics // *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE).* 2019. Vol. 7 Issue 5. January. Pp. 318–321.

8. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В., Миронов В. В., Тулубенская Е. В.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2009. 141 с.

9. **Куликов Г. М., Плотникова С. В.** Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсчетных поверхностей // *Механика твердого тела.* 2014. № 4. С. 54–64.

10. **Hallquist J. O., Benson D. J.** A comparison of an implicit and explicit implementation of the Hughes-Liu shell // Finite Element Metdods for Plate and Shell Structures / eds T. J. R. Hughes, E. Hinton. Swansea: Pineridge Press, 1986. Vol. 1. Pp. 394–431.

11. **Коробейников С. Н., Шутов А. В.** Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек // *Вычислительные технологии.* 2003. Т. 8. С. 38–59.

12. **Schoop H.** Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen // *Ing.-Archiv.* 1986. B. 56. No 6. S. 427–437.

13. **Никабадзе М. У.** Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей // *Деп. в ВИНИТИ АН СССР* 12.07.1988. № 5588–В88. 29 с.

14. **Kim Y. H., Lee S. W.** A solid element formulation for large deflection analysis of composite shell structures // *Comp. Struct.* 1988. Vol. 30. No 1–2. Pp. 269–274.

15. **Куликов Г. М., Плотникова С. В.** Сравнительный анализ двух алгоритмов численного решения нелинейных задач статики многослойных анизотропных оболочек вращения. 2. Учет поперечного обжатия // *Мех. композит. материалов.* 1999. Т. 35. № 4. С. 435–446.

16. **Никабадзе М. У.** Некоторые геометрические соотношения теории оболочек с двумя базовыми поверхностями // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 4. С. 129–139.

17. **Kulikov G. M., Plotnikova S. V.** Finite deformation plate theory and large rigid-body motions // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2004. Vol. 39. No 7. Pp. 1093–1109.

18. **Ермоленко А. В.** Теория плоских пластин типа Кармана – Тимошенко – Нагди относительно произвольной базовой плоскости // *В мире научных открытий.* Красноярск: НИЦ, 2011. № 8.1 (20). С. 336–347.

19. **Ермоленко А. В.** Выбор базовой поверхности в контактных задачах со свободной границей // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1.* 2013. Вып. 18. С. 42–47.

References

1. **Mikhailovskii E. I., Toropov A. V.** *Matematicheskiye modeli teorii uprugosti* [Mathematical models of theory of elasticity]. Syktyvkar: Syktyvkarskij un-t [Syktyvkar: Syktyvkar State University], 1995. 251 p. (In Russ.)

2. **Mikhailovskii E. I.** *Shkola mekhaniki obolochek akademika Novozhilova* [Academic Novozhilov's school of mechanics of shells]. Syktyvkar: Izd-vo Syktyvkarskogo un-ta [Syktyvkar: Publishing House of Syktyvkar University], 2005. 172 p. (In Russ.)

3. **Mikhailovskii E. I.,Badokin K. V., Ermolenko A. V.** Karman type theory of flexure of plates without Kirhgof's hypotheses. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1], 1999, issue 3, pp. 181–202. (In Russ.)

4. **Timoshenko S. P.** *Kurs teorii uprugosti, ch. II. Sterzhni I plastinki* [Course of theory of elasticity, part II. Shafts and plates]. Petrograd: Izd-vo in-ta inzh. putej soobscheniya, 1916. Izd. 2-e. Kiev: Naukova dumka [Petrograd: Publishing House of institute of Railway Engineers, 1916. Vol. 2. Kiev: Publishing House of Naukova Dumka], 1972. 507 p. (In Russ.)

5. **Naghdi P. M.** On the theory of thin elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1957, 14, no 4, pp. 369–380.

6. **Chernyh K. F.** *Nelinejnaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah.* [Nonlinear theory of elasticity in mechanical engineering calculations] L.: Mashinostroenie [Leningrad: Mechanical engineering], 1986. 336 p. (In Russ.)

7. **Yermolenko A. V., Mironov V. V.** Mechanism of the effect of transverse shifts on the stress state in the problems of plate and shell mechanics. *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE).* 2019, vol. 7, issue 5, January, pp. 318–321.

8. **Mikhailovskii E. I., Ermolenko A. V., Mironov V. V., Tulubenskaya E. V.** *Utochnennye nelinejnye uravneniya v neklassicheskih zadachah mekhaniki obolochek : uchebnoe posobie* [Refined nonlinear equations in non classical tasks of mechanics of shells]. Syktyvkar: Izd-vo Syktyvkarskogo un-ta [Syktyvkar: Publishing House of Syktyvkar University], 2009. 141 p. (In Russ.)

9. **Kulikov G. M., Plotnikova S. V.** Solvation of three dimensional tasks for thick elastic shells based on method of base surfaces. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of solid body], 2014, no 4, pp. 54–64. (In Russ.)

10. **Hallquist J. O., Benson D. J.** A comparison of an implicit and explicit implementation of the Hughes-Liu shell. *Finite Element Metdods for Plate and Shell Structures* / eds T. J. R. Hughes, E. Hinton. Swansea: Pineridge Press, 1986. Vol. 1. Pp. 394–431.

11. **Korobejnikov S. N., Shutov A. V.** The choice of basic surface in equations of plates and shells. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computing technologies], 2003, vol. 8, pp. 38–59. (In Russ.)

12. **Schoop H.** Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen. *Ing.-Archiv.* 1986. B. 56, no 6, s. 427–437.

13. **Nikabadze M. U.** Parameterization of shells based on two basic surfaces. *Dep. V VINITI AN SSSR* [Department of All-Union Institute for Scientific and Technical Information of USSR Academy of Sciences], 12.07.1988. № 5588–V88. 29 p. (In Russ.)

14. **Kim Y. H., Lee S. W.** A solid element formulation for large deflection analysis of composite shell structures. *Comp. Struct*, 1988, vol. 30. no 1–2, pp. 269–274.

15. **Kulikov G. M., Plotnikova S. V.** Comparative analysis of two algorithms of numerical solution of nonlinear tasks of static of multilayer anisotropic shells of rotation. 2. Accounting of transverse compression. *Mekh. kompozit. materialov* [Mechanics of composite materials], 1999, vol. 35, no 4, pp. 435–446. (In Russ.)

16. **Nikabadze M. U.** Some geometry ratios of theory of shells with two basic surfaces. *Izv. RAN. MTT* [Mechanics of Solids. A Journal of Russian Academy of Sciences], 2000, no 4., pp. 129–139. (In Russ.)

17. **Kulikov G. M., Plotnikova S. V.** Finite deformation plate theory and large rigid-body motions. *Int. J. Non-Linear Mech*, 2004, vol. 39, no 7, pp. 1093–1109.

18. **Ermolenko A. V.** Theory of Karman-Timoshenko-Nagdi type plane plates regarding of arbitrary basic plane. *V mire nauchnyh otkrytij* [In the World of Scientific Discoveries]. Krasnoyarsk: Science and Innovation Center Publishing House, 2011. No 8.1 (20), pp. 336–347. (In Russ.)

19. **Yermolenko A. V.** The choice of basic surface in contact tasks with free boundary. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1]. 2013, issue 18, pp. 42–47. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Ермоленко Андрей Васильевич / Andrei V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55
Туркова Оксана Игоревна / Oksana I. Turkova
аспирант / postgraduate student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 30.01.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 06.02.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 01.03.2023

ИНФОРМАТИКА

INFORMATICS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Научная статья

УДК 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_17

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ФИЛЬТРАЦИИ КОЛЛИЗИЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ДВИЖКЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНЫХ ИГР

Вадим Андреевич Мельников
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, muller95@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются параллельный и последовательный подход к реализации фильтрации коллизий на основе сортировки массивов и проведены замеры производительности различных сортировок с различным числом потоков.

Ключевые слова: физика, коллизии, столкновения, фильтрация, AABB, сортировка

Для цитирования: Мельников В. А. Об особенностях фильтрации коллизий в физическом движке для трёхмерных игр // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 17–28. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_17

© Мельников В. А., 2023.

Article

About architectural features of collisions filtering in the physics engine for 3D games

Vadim A. Melnikov
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, muller95@yandex.ru

Abstract. The article discusses parallel and sequential approaches to the implementation of collision filtering based on array sorting and measures the performance of various sorts with different numbers of threads.

Keywords: physics, collisions, filtering, AABB, sorting

For citation: Melnikov V. A. About architectural features of collisions filtering in the physics engine for 3D games. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 17–28. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_17

Введение Современные игры представляют собой сложную систему, состоящую из множества игровых объектов, работающих в реальном времени и обращающихся к различным движкам (от английского engine) — рендер, звук, физика, сеть. Графический движок (иногда движок рендеринга, рендерер, визуализатор) отвечает за отрисовку изображения и симуляцию освещения. На основе движка рендеринга строится движок пользовательского интерфейса [1; 2]. Аудиодвижок отвечает за проигрывание звука на устройстве, позиционирование звуковых источников в пространстве для проигрывания объёмного звука, генерацию процедурного звука. Физический движок симулирует взаимодействие твёрдых и деформируемых тел в динамике, динамики жидкости, а также контролирует выполнение ограничений, установленных на взаимное расположение тел [3].

Игровые объекты могут состоять из одного или нескольких компонентов, которые в реальном времени обновляют своё состояние в зависимости от происходящего в игре и взаимодействуют с различными системами для обновления игрового мира. Например, в логике пользовательского интерфейса в главном меню может быть заложена логика асинхронной загрузки последних данных игрока с сервера, а в этот момент игроку показывается прогресс загрузки данных. Таким образом,

в реальном времени сразу задействованы две системы — рендер для отображения интерфейса и сеть для получения данных. Второй пример — полёт снаряда в игровом пространстве. В таком случае задействуются рендер для отрисовки снаряда и физика для расчётов баллистики и столкновений; в каждом кадре пересчитывается физическое состояние мира и обновляется изображение на экране.

В работе [4] игры рассматриваются как системы, с которыми взаимодействует игрок. С такого ракурса дополнительную важность приобретает физический движок, поскольку он обеспечивает симуляцию в реальном времени, расширяющую и углубляющую возможность интерактивного взаимодействия. Например, симуляция автомобиля в гоночной игре или тренажёре, связанном с вождением любого транспорта. К тому же проработанность симуляции будет напрямую влиять и на геймплей, это может быть простое движение твёрдого тела в пространстве без учёта сложных взаимодействий, что подойдёт для аркадных гонок; или же в программе может быть реализована сложная симуляция контакта колёс с ландшафтом для реконструкции поведения автомобиля на сложном рельефе [5]. Пуля, выпущенная из автомата, может быть представлена лучом, пересекающимся с препятствиями, или же будет рассчитано движение по баллистической траектории с учетом сопротивления воздуха.

Одной из важных задач физического движка является регистрация и обработка столкновений между телами. Данную задачу можно разделить на несколько этапов:

1. Фильтрация и обнаружение коллизий, если они есть.
2. Разрешение коллизий.
3. Обновление скоростей сталкивающихся тел.

Целью представленной работы является изучения возможностей оптимизации и особенностей фильтрации коллизий с помощью сортировки массивов [6], а также оптимизация фильтрации с применением современных алгоритмов сортировки [7], включая рассмотрение применимости параллелизма к данной задаче.

Постановка задачи регистрации коллизий и фильтрации

Для проведения численных экспериментов будем рассматривать движение абсолютно твёрдых идеально гладких сфер диаметром 1 метр

и весом 1 килограмм. На старте сферы будут разгоняться стартовой силой в случайном направлении, и после этого сфера будет двигаться под действием только силы тяжести. Максимальное число частиц 8000.

Движение тел описывается принципом Даламбера

$$\sum_{i}^{n} F_i = ma, \tag{1}$$

где F_i — силы, действующие на частицу; m — масса частицы; a — ускорение.

А для того, чтобы сферы считались столкнувшимися, достаточно проверить, что расстояние (в качестве расстояния будем использовать евклидову норму) между центрами сфер строго меньше суммы их радиусов [8]:

$$||P_i - P_j||_2 < r_i + r_j, \tag{2}$$

где $P_i, P_j \in R^3$ — координаты частиц в пространстве, а $r_i, r_j \in R^1$ — радиусы частиц.

Если регистрировать столкновения без дополнительной фильтрации, то для 800 сфер получим $\frac{2}{8000} = 31996000$ проверок с вычислением глубины взаимопроникновения сфер. Вычисление взаимопроникновения использует евклидову норму, а наличие возведений в квадрат и вычисление квадратного корня будет негативно сказываться на производительности программы, при этом будет множество отрицательных проверок, хотя при диаметре мира 160 метров регистрируется всего $450-550$ столкновений при описанном эксперименте, т. е. всего 0.0017 % положительных срабатываний.

Таким образом, для физического движка необходим способ снижения числа отрицательных проверок. Первое, что можно сделать, – это построить для сфер ограничивающие параллелепипеды, выровненные по осям (Axis-aligned bounding box, в дальнейшем AABB) [6], и воспользоваться теоремой о том, что AABB пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются проекции AABB на все оси пространства [9]. Таким образом уже можно отфильтровать часть ложных проверок с вычислением расстояний. Данная теорема основана на основном свойстве AABB, следующем из названия, что грани ограничивающего параллелепипеда направлены вдоль осей координат и координаты углов параллелепипеда находятся в основной («мировой») системе координат,

а не в локальной системе геометрического объекта. А для двумерного случая будет ограничивающий прямоугольник со сторонами, выровненными по осям, что можно видеть на рисунке.

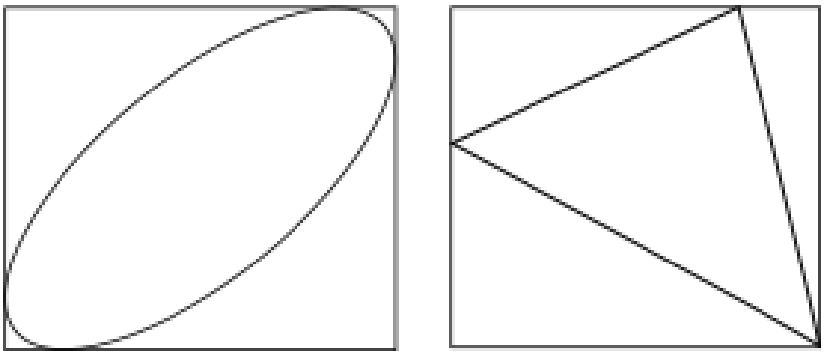

Рис. Пример AABB в 2D пространстве

Дальнейшая структуризация данных позволит ещё сильнее отфильтровать ложные проверки, поскольку если отсортировать AABB по одной из осей, например X, то при итерировании элементов по i и j ($j > i$), если левый край j-го элемента лежит правее, чем правый край i-го, можно прервать итерирование по j и перейти к следующему i.

Фильтрация коллизий с применением сортировки массива

Кроме сортировки массивов существует много способов фильтрации коллизий, например разбиение пространства с помощью октодерева. Недостаток использования деревьев заключается в сложности их организации, они не представляют собой непрерывный участок памяти и менее эффективны в кэшировании. А отсортированный массив линеен в памяти, и его обход линеен и упорядочен, что ведёт к более эффективному использованию кэша [10].

В структуру данных для сферы входят следующие компоненты:

- данные о предыдущих скорости и ускорении, так как интегрирование сил для вычисления движения сфер происходит по методу Верле [11];
- текущая позиция сферы;
- кешированный AABB.

Для представления чисел будем использовать числа с плавающей точкой с одинарной точностью (float), одно такое число занимает 4 байта [12], таким образом, только текущие координаты сфер будут занимать 12 байт. Сортировка таких больших структур будет замедляться большим числом действий по копированию элементов при упорядочивании. Можно хранить указатели на элементы и переставлять только их, но в таком варианте, если сферы создаются просто с помощью оператора *new*, нарушается линейность памяти. Поскольку память нужна и для хранения частицы и указателя, можно хранить сферы в массиве, а в дополнительном, который будет сортироваться, хранить указатель на сферу или индекс сферы. Индекс является более предпочтительным, поскольку размер индекса можно подобрать под максимальное число объектов, 8000 объектов можно разместить и в 16-битном беззнаковом числе. Таким способом получаются две линейные области памяти, в одной – структуры данных сфер, в которых обновляются данные, во второй – индексы, которые можно быстро переставлять местами.

Реализация замеров производительности проводилась на движке Godot 4 [13], а для сравнения эффективности метода использовалось несколько сортировок:

- stable_sort из стандартной библиотеки C++ [14];
- sort_custom из стандартной библиотеки Godot [15];
- array sort [7].

Большинство игр рендерится с частотой 30 или 60 кадров в секунду, т. е. для 30 кадров в секунду построение всего кадра не должно занимать более 33 миллисекунд. В работе рассматриваются замеры производительности только на центральном процессоре (CPU).

Особенность array sort, предложенного в статье [7], — частичная «предсортировка» и определение возрастающих последовательностей в массиве, что в дальнейшем приводит к ускорению сортировки, поскольку слияние выполняется для тегов, обозначающих начала возрастающих последовательностей. Также авторами предлагаются две схемы параллельной сортировки. На самом деле, схема с разделением массива на части и параллельной сортировкой частей может выполняться любой сортировкой, только последний шаг должен быть слиянием (как и в сортировке слиянием, просто не для двух последовательностей, а для n, где n — число ядер процессора) [17].

Результаты

Все замеры производительности проводились на процессоре Ryzen 3900X (12 физических ядер, 24 потока, 3.6 ГГц – базовая частота). Результаты отражают сумму времени за цикл при 30 итерациях разрешения коллизий. Время разрешения коллизий после фильтрации составляет 4.5–5.0 мс. Число коллизий на кадр для 8000 сфер 450–550 коллизий. В таблице приведены результаты замеров сортировок.

Таблица

Результаты измерений скорости сортировки для двух алгоритмов для различного числа потоков

	Array sort, мс	Stable sort, мс
1 поток	4.5–6.0	9.0–10.0
2 потока	6.0–7.0	9.5–10.5
4 потока	8.4–9.1	9.5–11.0
8 потоков	14.0–16.0	20.0–21.0
12 потоков	19.0–20.0	20.0–21.0
24 потока	33.0–36.0	36.0–38.0

Из-за особенности реализаций стандартной библиотеки Godot нельзя отсортировать просто область памяти в отличие от стандартной библиотеки C++. Поэтому для custom sort приводится только один поток: 14.7–16.0 мс. Исходя из двух остальных замеров можно сделать однозначный вывод о неприменимости распараллеливания для оптимизации сортировки в реальном времени.

С ростом числа потоков наблюдается заметное увеличение времени выполнения алгоритма, что свидетельствует о непригодности распараллеливания для выполнения фильтрации коллизий в реальном времени, поскольку обращение к очереди заданий и постановка задачи в неё происходят через обращение к функциям ядра, занимающим много времени. Просто запустить потоки и дождаться их без сортировки занимает 5 мс, что составляет почти 30 % бюджета кадра при частоте 60 кадров в секунду.

Следует отметить, что симуляция физики с использованием вычислительных шейдеров показывает хорошие результаты [16] и параллельная реализация алгоритмов сортировки возможна и для графического процессора (GPU)[1]. Для реализации на GPU достаточно передать массив и места, с которых начинается сортировка.

Применимость параллельных вычислений в статье [16] объясняется отсутствием необходимости синхронизировать в конце потоки и редким обращением к параллелизму, обновление положения частиц происходит всего один раз за кадр. Также параллельные сортировки в конце сводятся фактически к сортировке вставками для слияния результатов всех потоков. И чем больше потоков, тем больше будет сходство с сортировкой вставками.

Возможно параллелизация показала бы лучший результат на построении деревьев, например октодерева [6], так как 8 начальных частей октодерева строятся независимо друг от друга и не требуется дополнительных действий по слиянию после выполнения алгоритма.

Заключение

По результатам работы можно сделать вывод о том, что алгоритмы распараллеливания для сортировок в реальном времени не подходят, поскольку цена постановки задачи на выполнение в многопоточную очередь или создания потока с последующим слиянием результатов выше, чем сортировка всех объектов сразу. О нелинейности оптимизации и ухудшении результатов оптимизации также говорят и в статье [7]. Но применение современного метода сортировки array sort показало его значительное превосходство в скорости работы по сравнению со стандартными методами.

Список источников

1. **Мельников В. А.** Процесс разработки движка для 2D-игр и интерфейсов Sad Lion Engine // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 21—37.

[1]GPU в персональных компьютерах выделен на отдельную плату и имеет собственную дополнительную память, в мобильных устройствах имеет общий чип памяти с CPU.

2. **Melnikov V. A., Yermolenko A. V.** Development of XML-based Markup Language // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 1 (42). С. 61–73.

3. **Gregory J.** Game engine architecture, 3rd edition. Boca Raton: CRC Press, 2019. 1200 p.

4. **Зубек Р.** Элементы геймдизайна. Как создавать игры, от которых невозможно оторваться. М.: Бомбора, 2022. 272 с.

5. **Страшнов Е. В., Торгашев М. А.** Алгоритмы определения коллизий аппроксимирующих цилиндров с моделью рельефа местности // *International Journal of Open Information Technologies.* 2020. Vol. 8. No 7. С. 40–49.

6. **Ericson C.** Real-time collision detection. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Morgan Kaufman Publishers, 2005. 593 p.

7. **Huang X., Liu Z., Li J.** Array sort: an adaptive sorting algorithm on multi-thread // *The Journal of Engineering.* 10.1049/joe.2018.5154. 2019. Pp. 3455–3459.

8. **Millington I.** Game physics engine development. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Morgan Kaufman Publishers, 2007. 456 p.

9. **Huynh J.** Separating axis theorem for oriented bounding boxes [Электронный ресурс]. URL: http://www.jkh.me/files/tutorials/Separating%20Axis%20Theorem%20for%20Oriented%20Bounding%20Boxes.pdf (дата обращения: 30.05.2023).

10. **Bhagrav N.** Cache-friendly code [Электронный ресурс] // Baeldung. URL: https://www.baeldung.com/cs/cache-friendly-code (дата обращения: 30.05.2023).

11. **House D. H., Keyser J. C.** Foundations of physically based modelling and animation. Boca Raton: CRC Press, 2017. 382 p.

12. Fundamental types [Электронный ресурс] // C++ reference. URL: https://en.cppreference.com/w/cpp/language/types (дата обращения 30.05.2023).

13. Godot [Электронный ресурс] // Godot. URL: https://godotengine.org/ (дата обращения 30.05.2023).

14. std::stable_sort [Электронный ресурс] // C++ reference. URL: https://en.cppreference.com/w/cpp/algorithm/stable_sort (дата обращения 30.05.2023).

15. Array [Электронный ресурс] // Godot docs. URL: https://docs.godotengine.org/en/stable/classes/class_array.html (дата обращения 30.05.2023).

16. **Озерицкий А. В.** Моделирование методом частиц на GPU с использованием языка GLSL // Выч. мет. программирование. 2023. Вып. 1 (24). С. 37–54.

17. **Кнут Д.** Искусство программирования. Том 3. Сортировка и поиск. М.: Вильямс. 2001. 824 с.

References

1. **Melnikov V. A.** Development Process of game engine core for 2D-games and interfaces Sad Lion Engine. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33), pp. 21–37. (In Russ.)

2. **Melnikov V. A., Yermolenko A. V.** Development of XML-based Markup Language. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, 1 (42), pp. 61–73.

3. **Gregory J.** *Game engine architecture, 3rd edition.* Boca Raton: CRC Press. 2019, 1200 p.

4. **Zubek P.** *Elementy geymdizayna. Kak sozdavat' igry, ot kotorykh nevozmozhno otorvat'sya* [Elements of game design. How to create

games from which it is impossible to break away]. M.: Bombora, 2022. 272 p. (In Russ.)

5. **Strashnov E. V., Torgrashev M. A.** Collision detection algorithms of bounding cylinders with terrain model. *International Journal of Open Information Technologies.* 2020, vol. 8, no 7, pp. 40–49. (In Russ.)

6. **Ericson C.** *Real-time collision detection.* Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Morgan Kaufman Publishers, 2005. 593 p.

7. **Huang X., Liu Z., Li J.** Array sort: an adaptive sorting algorithm on multi-thread. *The Journal of Engineering.* 10.1049/joe.2018.5154. 2019, pp. 3455–3459.

8. **Millington I.** *Game physics engine development.* Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, New York, Oxford, Paris, San Diego, San Francisco, Singapore, Sydney, Tokyo: Morgan Kaufman Publishers, 2007. 456 p.

9. **Huynh J.** Separating axis theorem for oriented bounding boxes [Electronic resource]. Available at: http://www.jkh.me/files/tutorials/Separating%20Axis%20Theorem%20for%20Oriented%20Bounding%20Boxes.pdf (accessed: 30.05.2023).

10. **Bhagrav N.** Cache-friendly code [Electronic resource].*Baeldung.* Available at: https://www.baeldung.com/cs/cache-friendly-code (accessed: 30.05.2023).

11. **House D. H., Keyser J. C.***Foundations of physically based modelling and animation.* Boca Raton: CRC Press, 2017. 382 p.

12. Fundamental types [Electronic resource]. *C++ reference.* Available at: https://en.cppreference.com/w/cpp/language/types (accessed: 30.05.2023).

13. Godot [Electronic resource]. *Godot.* Available at: https://godotengine.org/ (accessed: 30.05.2023).

14. std::stable_sort [Electronic resource]. *C++ reference.* Available at: https://en.cppreference.com/w/cpp/algorithm/stable_sort (accessed: 30.05.2023).

15. Array [Electronic resource]. *Godot docs.* Available at: https://docs.godotengine.org/en/stable/classes/class_array.html (accessed: 30.05.2023).

16. **Ozeritskiy A. V.** Computational simulation using particles on GPU and GLSL language. *Vych. met. programmirovaniye*[Numerical Methods and Programming]. 2023, issue 1 (24), pp. 37–54. (In Russ.)

17. **Knuth D.** *Iskusstvo programmirovaniya. T. 3. Sortirovka i poisk.* [The art of computer programming. Vol. 3. Sorting and searching]. M.: Vilyams, 2001. 824 p.

Сведения об авторе / Information about author
Мельников Вадим Андреевич / Vadim A. Melnikov
аспирант / postgraduate student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 01.06.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 06.06.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 08.06.2023

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

METHODICAL MATERIALS

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_29

О ТРУДАХ ПЯТИ МОСКОВСКИХ МАТЕМАТИКОВ, ПОГИБШИХ В ГОДЫ ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ

Владимир Петрович Одинец
W.P.Odyniec@mail.ru

Аннотация. В статье описаны работы пяти московских математиков: М. В. Бебутова, Н. Б. Веденисова, М. Е. Глезермана, Д. О. Шклярского, Б. М. Юновича, погибших в 1941–1942 гг. При описании работ приведены также биографии этих математиков.

Ключевые слова: динамическая система, устойчивость по Ляпунову, пространство Хаусдорфа, первая аксиома счётности, вторая аксиома счётности, симплициальный комплекс, упорядоченное множество, нормальное пространство, бикомпактное пространство, выпуклый многогранник, кольцо Лефшеца, покрытие сферы, абсолютная сходимость, абсолютно аддитивная функция множества, М. В. Бебутов, Н. Б. Веденисов, М. Е. Глезерман, Д. О. Шклярский, Б. М. Юнович

Для цитирования: Одинец В. П. О трудах пяти московских математиков, погибших в годы Великой Отечественной войны // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 29–55. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_29

© Одинец В. П., 2023.

Article

On the works of five Moscow mathematicians who died during the Great Patriotic War

Vladimir P. Odinets
W.P.Odyniec@mail.ru

Abstract. The article describes the works of five Moscow mathematicians: M. Bebutov, N. Vedenisov, M. Gleserman, D. Shklyarsky, D. Junovic', who died in 1941–1942. In the description of the works the biographies of these mathematicians are also given.

Keywords: dynamical system, stability in sense of Lyapunov, Hausdorff space, first axiom of countability, second axiom of countability, simplicial complex, ordered set, normal space, bicompact space, convex polytope, Lefschetz ring, covering of sphere, absolute convergence, absolutely additive set function, M. V. Bebutov, N. B. Vedenisov, M. E. Glezerman, D. O. Shklyarsky, B. M. Junovic'

For citation: Odinets V. P. On the works of five Moscow mathematicians who died during the Great Patriotic War. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 29−55. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_29

1. Бебутов Михаил Валерьевич родился в мае 1913 г. в селе Оболенском Московской губернии в семье театрального режиссера Валерия Михайловича Бебутова. В 1938 г. М. В. Бебутов окончил механико-математический факультет Московского государственного университета (МГУ). Первую свою научную работу [1] М. В. Бебутов, будучи еще студентом последнего курса, закончил в декабре 1937 г.

Статья была представлена в Доклады АН СССР академиком С. Н. Бернштейном[1].

[1]Бернштейн Сергей Натанович (1880–1968) родился в Одессе, окончил в Париже ун-т (1899) и там же Политехническую школу (1901), д-р математических наук (1904, Париж), профессор (1907), д-р чистой математики (1914, Харьков). В 1925 г. С. Н. Бернштейн стал академиком АН УССР, а в 1929 г. АН СССР. В 1907–1933 гг. преподавал в Харьковском ун-те, в 1933–1941 гг. – в Ленинградском политехническом ин-те и одновременно в Ленинградском ун-те. С 1935 г. работал в Математическом ин-те АН СССР. Основные труды относятся к теории приближения функций многочленами, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

Основным результатом статьи является следующий:

Если динамическая система[2] *M, являющаяся замкнутым и связным подмножеством n-мерного евклидова пространства E^n, устойчивым*[3] *по Ляпунову*[4]*, то возможно одно из двух: либо M распадается на совокупность минимальных множеств, и все движения в M являются почти периодическими (в частности, M может иметь периодические движения и точки покоя), либо M гомеоморфно семейству параллельных прямых.*

Статья [1] послужила основанием дипломной работы М. В. Бебутова, хотя до защиты дипломной работы им было опубликовано ещё две работы [2; 3]. Так, в январе 1938 г. он вместе с В. Е. Шнейдером[5] получил обобщение одного примера П. С. Урысона[6]: строится счётное

---

[2]Динамической системой M будем называть топологическое пространство, в котором задана однопараметрическая группа $f(p,t)$ $(p \in M, -\infty < t < +\infty)$ отображений M на самого себя, удовлетворяющая следующим условиям: a) $f(p,t) = p$; b) $f[f(p,t_1),t_2] = f(p,t_1+t_2)$; c) если $p_n \to p$ и $t_n \to t$, то $f(p_n,t_n) \to f(p,t)$. Множество $f(p,t)$ при фиксированном p и $-\infty < t < +\infty$, будем называть *траекторией*.

[3]Скажем, что точка p *устойчива по Ляпунову*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(p,\varepsilon) > 0$ такое, что если $\phi(p,q) < \delta$, то для любого t $(f(p,t), f(q,t)) < \varepsilon$.
Заметим, что если p устойчива по Ляпунову, то и всякая точка траектории $f(p,t)$ обладает этим свойством. Если все точки из M устойчивы по Ляпунову, то скажем, что система M устойчива по Ляпунову.

[4]Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918), русский математик и механик, профессор(1892), академик Петербургской АН (с 1901). В 1880 г. блестяще окончил математическое отделение физико-математического факультета Петербургского ун-та. В работе в 1892 г. «Общая задача об устойчивости движения» заложил основы устойчивости динамических систем. В 1902 г. А. М. Ляпунов переезжает из Харькова в Петербург, где он заложил основы теории о фигурах равновесия вращающейся жидкости и решения задачи об устойчивости движения материальных систем. Им же разработан весьма плодотворный метод характеристических функций.

[5]Шнейдер Владимир Евгеньевич родился в 1912 г. в Женеве, окончил МГУ (1938), канд. ф.-м. наук (1941); после ВОВ работал в Московском автомеханическом ин-те.

[6]Урысон Павел Самуилович (1898–1924) родился в Одессе в семье банкира, окончил МГУ (1919), аспирантуру у профессора Н. Н. Лузина (1921); далее сотрудник Института математики и механики МГУ и профессор 2-го Московского ун-та. Основные труды в области общей теории топологических и метрических пространств (один из творцов теории размерности), теории нелинейных дифференциальных уравнений, теории выпуклых тел.

пространство[7] Хаусдорфа[8], в каждой точке которого нарушается 1-я аксиома[9] счётности. Наконец, в марте 1938 г. М. В. Бебутов в статье [2], представленной в ДАН академиком С. Н. Бернштейном, дал ответ на вопрос своего научного руководителя П. С. Александрова[10]:

Симплициальный комплекс K размерности n может быть двойственным симплициальному комплексу только в одном из следующих случаев: при $n = 1$ комплекс K является или простым замкнутым полигоном[11] *, или совокупностью простых замкнутых полигонов, которые не пересекаются; при $n > 1$ комплекс K состоит из одного или нескольких непересекающихся комплексов, изоморфных границе $(n+1)$-мерного симплекса.*

При этом два комплекса K и L называются двойственными, если существует взаимно однозначное соответствие f между элементами K и L, удовлетворяющее следующему условию: если симплекс x' является гранью симплекса x в одном их этих комплексов, то симплекс $f(x)$ является простым симплексом $f(x')$ в другом.

Поступив в 1938 г.в аспирантуру МГУ, где его научным руководителем стал В. В. Степанов, М. В. Бебутов стал заниматься качественной теорией динамических систем и уже к марту 1939 г. получил обобще-

---

[7]Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если любые две различные точки x и y обладают непересекающимися окрестностями $U(x)$ и $V(y)$.

[8]Хаусдорф Феликс (Felix Hausdorff: 1868–1942) – немецкий математик, родившийся в еврейской купеческой семье, окончил Лейпцигский ун-т (1891), там же преподавал до 1902 г., когда стал профессором. Позже преподавал в ун-те Грейсфельда, а с 1921 г – в Боннском ун-те. В 1942 г. перед отправкой в концлагерь покончил собой. Ф. Хаусдорф – один из основателей современной топологии. Им получены важные результаты в теории множеств, теории непрерывных групп, теории чисел, функциональном анализе.

[9]Топологическое пространство удовлетворяет 1-й аксиоме счётности, если система окрестностей каждой его точки обладает счетной базой. Пример Урысона заключался в построении счетного пространства Хаусдорфа без 1-й аксиомы счётности, причем все точки этого пространства, кроме одной, были изолированными.

[10]Александров Павел Сергеевич (1896–1982) родился в г. Богородске (с 1930 г. – Ногинск) Московской губ.; по окончании гимназии с золотой медалью поступил в Московский ун-т (окончил в 1917 г.), с 1921 г. работал в МГУ, профессор (1929), д-р ф.-м.н.(1934), чл.-корр. АН СССР(1929), академик АН СССР (1953). Основные труды относятся к топологии и теории функций действительной переменной. Один из создателей московской топологической школы.

[11]Простой замкнутый полигон на плоскости – это произвольная обратимая деформация окружности, т. е. это полигон, который не пересекает себя и не имеет отверстий.

ние результата В. В. Немыцкого[12] относительно того класса динамических систем, которые гомеоморфны семейству параллельных прямых. В. В. Немыцкий установил также необходимые и достаточные условия для этого.

М. В. Бебутов, используя метод Уитни[13], обобщил [4] эти результаты на более широкий класс динамических систем, расположенных в метрических локально-компактных пространствах со 2-й[14] аксиомой счетности. В апреле 1939 г. академик С. Н. Бернштейн представил в Доклады АН СССР статью [5] М. В. Бебутова и В. В. Степанова[15]. В этой работе в метрическом пространстве R со счётной базой рассматривается динамическая система, в которой $f(p,t)$ есть непрерывная функция от совокупности переменных (p,t). При этом если A – любое множество из R, то $f(p,t)$ обозначает множество всех точек $f(p,t)$, для которых p принадлежит A. Параметр t будем называть «временем». Будем также предполагать, что в R определена мера множества $\mu(A)$; кроме того, предполагается, что для каждой точки p из R существует окрестность $U(p)$, которая имеет конечную меру. Эта мера предполагается *инвариантной* по отношению к группе $f(p,t)$, т. е.

$$\mu(f(p,t)) = \mu(A).$$

Если в пространстве R определена другая динамическая система $f_1(p,t')$, имеющая общие траектории с системой $f(p,t)$ и различающаяся только временем – для первой системы t, а для второй системы t': в соотношении $f(p,t) = f_1(p,t')$ для данной точки p каждому зна-

[12]Немыцкий Виктор Владимирович (1900–1967), окончил МГУ (1925), там же аспирантуру (1929), д-р ф.-м. н. (1935), профессор (1936). Основные труды по качественной теории дифференциальных уравнений, теории операторных уравнений, теории функций действительной переменной, теории метрических пространств.

[13]Хаслер Уитни (Hasler Whitney: 1907–1989), американский математик, чл. Американской Академии наук, окончил Йельский ун-т (1928), с 1933 по 1952 г. работал в Гарвардском ун-те, с 1952 г. – в Институте перспективных исследований в Принстоне. Основные работы: по теории дифференцируемых функций и многообразий, алгебраической геометрии, теории особенностей отображений.

[14]Топологическое пространство X удовлетворяет 2-й аксиоме счетности, если система его открытых множеств (и само X) обладает счетной базой.

[15]Степанов Вячеслав Васильевич (1889–1950), родился в Смоленске, окончил (1908) в Смоленске гимназию с золотой медалью и поступил на физ.-мат. факультет Московского университета. По окончании ун-та (1912) был командирован за границу (Германия, Франция), профессор МГУ (1928), д-р ф.-м. н. (1934),чл.-корр. АН СССР (1946). Основные труды: по теории дифференциальных уравнений и её применений, математической физике, тригонометрическим рядам.

чению t соответствует единственное значение t', и обратно, каждому значению t' соответствует единственное значение t, – то при некоторых дополнительных условиях можно показать, что *в R можно ввести меру μ^*, инвариантную относительно группы $f_1(p, t')$. При этом всякая область положительной меры μ обладает положительной мерой μ^*.*

В заключении статьи сказано, что В. В. Степанов доказал обобщение эргодической теоремы для неразложимых динамических систем с интегральным инвариантом на случай, когда мера всего пространства бесконечна. Добавлю, что М. В. Бебутов был одним из самых активных участников семинара В. В. Степанова, основанного ещё в 1930 г.

В ноябре 1939 г. М. В. Бебутов и В. В. Степанов посылают в статье [6] развёрнутые доказательства предыдущей статьи [5], опирающиеся на результаты М. В. Бебутова из работы [4].

Следующая статья М. В. Бебутова [7] была представлена в Докладах АН СССР академиком А. Н. Колмогоровым[16] в апреле 1940 г. В ней строится новая динамическая система M_U для динамической системы M в пространстве непрерывных функций.

В частности, доказано, что *если пространство динамической системы M является метрическим и компактным, а M имеет не более*

[16]Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) родился во время остановки поезда (ст. города Тамбова), когда его мать возвращалась из Крыма. Дед Андрея Николаевича Яков Степанович Колмогоров забрал мальчика к себе в Ярославль, будучи попечителем народных училищ Ярославской губернии и одновременно предводителем угличского дворянства, не допустив к сыну отца – Николая Матвеевича Катаева, высланного в Ярославскую губернию из Петербурга как правого эсера, агронома по образованию (погиб в 1919 г.). Мать, Мария Яковлевна Колмогорова (1871–1903), умерла во время родов. Её сестра Вера Яковлевна Колмогорова усыновила мальчика. С 1910 г. проживала с Андреем в Москве. Андрей учился в частной гимназии Репман. В годы гражданской войны (1918–1920) работал на строительстве железной дороги Казань – Екатеринбург. В 1920 г. поступил на математическое отделение физ.-мат. ф-та Московского ун-та. В 1931 г. стал проф. МГУ, д-р ф.-м. наук (1934), в 1939 г. избран академиком АН СССР. Им получены важные результаты в теории функций действительной переменной, теории тригонометрических рядов, теории меры, обобщены понятия интеграла; им создана одна из аксиоматик теории вероятностей, получены важные результаты в теории марковских процессов, теории случайных стационарных процессов, в информатике и математической логике, истории математики. В 1960 г. усилиями А. Н. Колмогорова и других математиков и физиков в стране в ходе реформы школьного образования начали создаваться прообразы будущих физ.-мат школ, а с 1963 г. – интернаты при крупнейших университетах страны.

одной точки покоя[17]*, то существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение M в M_U.*

Справедливо также следующее:

Всякую динамическую систему M, расположенную в локально-компактном пространстве Хаусдорфа со второй аксиомой счетности, можно непрерывно отобразить в динамическую систему M_U таким образом, что это отображение будет взаимно однозначным и взаимно непрерывным во всякой точке p, не являющейся точкой покоя в M.

Подробные результаты этой статьи даны в работе [8], вышедшей в 1940 г. В декабре 1940 г. академиком А. Н. Колмогоровым была представлена в ДАН статья [9] М. В. Бебутова.

В этой работе было дано распространение результатов статьи[18] Н. М. Крылова[19] и Н. Н. Боголюбова[20] на недетерминированные процессы. Подробные результаты статьи М. В. Бебутова, посланной еще в декабре 1940 г., были опубликованы в 1942 г. в журнале «Математический сборник» [10].

Весной 1941 г. М. В. Бебутов защитил диссертацию на степень кандидата физ.-мат. наук на тему: «О динамических системах в пространстве непрерывных функций». Эта диссертация была отмечена Ученым советом как выдающаяся работа.

---

[17]Говорят, что точка p является точкой покоя, если для любых t $f(p,t) = p$.

[18]N. Kryloff et N. Bogoluboff. La theorie generale de la mesure dans son application a l'etude des systemes dynamiques de la mecanique non-lineare. Ann. of Math., 38 (1937), 65–113.

[19]Николай Митрофанович Крылов (1879–1955) родился в Санкт-Петербурге, окончил Императорский Горный ин-т (1902), д-р математики (1903), проф. (1910), академик АН УССР (1922), академик А Н СССР (1929). В 1912–1917 гг. работал в Горном институте, в 1917–1922 гг. – в Таврическом ун-те (Симферополь), с 1922 г. – в АН УССР и в АН СССР. Основные труды относятся к фундаментальным проблемам теории интерполяции, приближённым решениям интегральных и дифференциальных уравнений математической физики и нелинейной механики.

[20]Николай Николаевич Боголюбов (1909–1992) – советский математик и физик-теоретик, родился в Нижнем Новгороде в семье протоиерея РПЦ, в 1925 г. был принят в аспирантуру АН УССР, не имея высшего образования, д-р математических наук (1930), проф. (1936), академик АН УССР (1948). Академик АН СССР, в 1936–1950 гг. – профессор Киевского и Московского ун-тов, с 1949 г. работал в Математическом ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР и одновременно с 1956 г. – в Объединенном ин-те ядерных исследований (Дубна). Н. Н. Боголюбов – один из создателей теории инвариантных мер в динамических системах. Ему же принадлежат фундаментальные работы в статистической физике, а также в теории сверхтекучести.

С началом Великой Отечественной войны Михаил Валерьевич Бебутов пошел добровольцем в народное ополчение и зачислен в 975-й артиллерийский полк 8-й Краснопресненской дивизии. Погиб инженер-капитан М. В. Бебутов 12.07.1942 под Воронежем. Краткое, но емкое описание жизни и работ М. В. Бебутова дали в 1970 г. [11] два профессора МГУ В. М. Алексеев (1932–1980) и С.В. Фомин (1917–1975), при этом С. В. Фомин знал М. В. Бебутова лично.

2. Веденисов Николай Борисович (1905–1942) родился 25 июля 1905 г. в г. Саранске Пензенской губернии в семье инженера в области железнодорожного транспорта Бориса Николаевича Веденисова. В 1922 г. поступил на математическое отделение физ.-мат. факультета Московского университета. В 1924 г. вошел в состав участников топологического семинара, организованного П. С. Урысоном и П. С. Александровым. Уже на последнем курсе университета Николай Борисович публикует на французском языке совместную со своим однокурсником А. Н. Тихоновым[21] статью [12].

Эта статья, как сказано в примечании, содержит результаты работы топологического семинара при Московском университете за 1924–1925 гг. под руководством Павла Урысона и Павла Александрова.

Условия, накладываемые на абстрактные топологические пространства, могут быть разделены на четыре категории (и тем самым ставятся четыре задачи):

1) *условия, характеризуемые некоторым количественным показателем; они связаны с влиянием системы близости определяемых пространств (окрестностей)*;

2) *условия, которые накладывают на пространство несколько фундаментальных свойств системы производных пространств*;

[21]Тихонов Андрей Николаевич(1906–1993) родился в г. Гжатске Смоленской губернии в семье торговца. В 1922 г. поступил на математическое отделение физ.-мат. ф-та МГУ, который окончил в 1927 г. и поступил в аспирантуру Научно-иссл. ин-та математики при МГУ. С 1930 г. сотрудник Гидромет. службы СССР. После разделения физ.-мат. ф-та на мех.-мат и физ. ф-ты (1933) направлен на кафедру в. м. физ. ф-та.; д-р ф.-м. наук (1936), чл.-корр. АН СССР (1939). В 1946–1953 гг. зав. каф. в. м. МИФИ и одновременно участник вычислительной работы по созданию первой атомной бомбы. С 1953 г. зам. директора Отделения прикладной математики МИАН. В 1966 г. избран академиком АН СССР. В 1970 г. инициировал создание ф-та выч. математики и кибернетики в МГУ и стал его деканом (до 1990). Основные труды – в области теоретико-множественной топологии (пространство Тихонова, куб Тихонова), функционального анализа и приближенных вычислений.

3) *условия, которые требуют возможного разделения системы множеств (окрестностей) без общих точек с помощью открытых окрестностей (окрестность называют открытой, если её дополнение замкнуто)*;

4) *условия существования для некоторых множеств, точек сгущения.*

Ответы на каждое из поставленных четырёх задач даются в первых четырёх параграфах статьи [12]. В пятом параграфе даются ответы на эти задачи в метризуемых[22] топологически пространствах.

Не случайно в 1927 г. М. В. Веденисов был принят в аспирантуру физ.-мата МГУ. Окончил он аспирантуру в 1930 г. Результаты статьи [12] были М. В. Веденисовым расширены и опубликованы в 1931 г. в статье [13].

С 1931 г. Н. Б. Веденисов стал преподавать в Московском государственном педагогическом институте. В июне 1934 г. Н. Б. Веденисов участвует в работе 2-го Всесоюзного математического съезда в Ленинграде, но сообщений на нём не делает. Следующая статья Н. Б. Веденисова [14] в 1936 г. оставила имя Веденисова в истории теоретико-множественной топологии. Формально статья [14] посвящена непрерывным функциям на топологических пространствах. Фактически же она даёт необходимое и достаточное условие, чтобы пространство было совершенно нормально[23]. В статье доказана теорема, называемая **теоремой Веденисова**:

Пространство X совершенно нормально тогда и только тогда, когда оно нормально и каждое замкнутое множество в нём является множеством типа G_δ[24].

В том же 1936 г. Н. Б. Веденисов даёт ответ на вопрос П. С. Александрова, поставленный в работе: Ann. of Math., V. 36 (1935), pp. 1–35.

[22]Топологическое пространство называется метризуемым, если оно гомеоморфно некоторому метрическому пространству.

[23]Топологическое пространство X называется *совершенно нормальным*, если для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B существует непрерывная действительная функция f на X : $f(x) = 0$ для любого x из A, и $f(y) = 1$ для каждого y из B. Пространство называется *нормальным*, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют два открытых непересекающихся множества G_1 и G_2 : A содержится в G_1, а B содержится в G_2.

[24]Пересечение счётного числа открытых множеств называется множеством типа G_δ.

Точнее, в работе [15] Н. Б. Веденисов строит хаусдорфово пространство X размерности большей либо равной 1, для каждой точки x которого существует локально замкнутая окрестность X_n, содержащая x, обладающая следующими свойствами:

1) X_n является бикомпактом;

2) X_n удовлетворяет первой аксиоме счётности;

3) $\dim X_n = n$ для каждой точки x из X, т. е. все эти окрестности размерностно однородны;

4) X_n выпукло;

5) X_j локально выпукло для всех $j \leq n$;

6) X_n не метризуемо.

В 1937 г. на основе указанных выше четырёх статей (на французском языке) Н. Б. Веденисов получил степень кандидата физико-математических наук. Ещё ранее, в 1935 г. он получил звание доцента.

В августе 1937 г. академик С. Н. Бернштейн представил в Доклады АН СССР заметку М. В. Веденисова [16], отвечавшую на вопрос П. С. Александрова. Как пишет Н. Б. Веденисов: «О степени трудности этой проблемы можно судить по установленной в этой заметке связи её с известной проблемой М. Суслина[25] об упорядоченных множествах (Fund. math. I, 233). Если условиться для краткости называть S-множеством упорядоченное множество 1) непрерывное; 2) ограниченное; 3) такое, что всякая система попарно непересекающихся интервалов этого множества не более, чем счетна, то проблема Суслина может быть сформулирована так: *S-множество подобно сегменту числовой прямой*». Н. Б. Веденисов в заметке [16] в ДАН доказывает теорему:

[25]Михаил Яковлевич Суслин (1894–1919) родился в селе Красавка Саратовской губ. В 1913 г. блестяще закончив Балашовскую гимназию, поступил в Московский ун-т.; активный участник семинара молодого доцента Н. Н. Лузина, под руководством которого Суслин открыл новый класс множеств, названных им A-множествами (на Западе – S-множествами). В 1917 г., окончив Московский ун-т, был в нём оставлен для приготовления к профессорскому званию. В 1918–1919 гг. преподавал в Ивановском пед. ин-те в должности экстраординарного профессора. Уволившись из пед. ин-та и не найдя себе работы, уехал в родное село, где заболел тифом и умер 21.10.1919 г. Его смерть послужила поводом к травле Лузина в 30-е гг.

Все одномерные замкнутые многообразия[26] *(по Э. Чеху*[27]*) суть метрические топологические пространства в том и только в том случае, если проблема Суслина имеет положительное решение.*

В 1938 г. Н. Б. Веденисов опубликовал работу [17], посвященную некоторым топологическим свойствам упорядоченных множеств. Как пишет автор работы [17], он собрал вместе результаты, разбросанные в работах на другие темы. «В п^0 1 доказывается общеизвестное, но подробно нигде не доказанное предложение, что любое упорядоченное множество может быть включено в упорядоченное множество, лишенное пробелов. В п^0 2 в упорядоченные множества вводится топология и показывается, что включение в упорядоченное, лишенное пробелов множество осуществляется с сохранением не только порядка, но и топологических свойств. В п^0 3 специально рассматриваются упорядоченные пространства, лишенные пробелов. Устанавливается теорема о структуре открытых множеств в таких пространствах и доказывается бикомпактность таких пространств. В п^0 4 показывается, что сохраняется от теоремы о структуре открытых множеств в случае общего упорядоченного пространства, и в качестве применения этой теоремы доказывается полная нормальность упорядоченных пространств. Наконец, п^0 5 посвящен некоторым замечаниям о специальном классе упорядоченных пространств, к которым привлёк внимание Суслин. . . »

В том же 1938 г. Н. Б. Веденисов публикует статью [18]. В этой статье в пяти параграфах идет речь о непрерывных функциях, главным образом, в совершенно нормальных[28] топологических пространствах.

В п^0 1 дается ответ на вопрос: *в каких пространствах каждое замкнутое множество может быть представлено как множество нулей некоторой непрерывной функции.*

---

[26] 1-мерное топологическое многообразие (по Е. Чеху) – это 1-мерное хаусдорфово пространство со счётной базой, в котором каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству замкнутой полупрямой в одномерном евклидовом пространстве R^1.

[27] Эдуард Чех (Eduard Cech: 1893–1960) – чешский математик, в 1912 г. поступил в Пражский ун-т, в 1915–1918 гг. был в австро-венгерской армии; с 1918 г. продолжил учебу, в 1920 г. защитил диссертацию на степень д-ра философии (по математике). В 1921–1922 гг. занимался проективной дифференциальной геометрией. Потом его интересы сместились в сторону общей и алгебраической топологий. В 1952 г. избран академиком Чехословацкой Академии наук.

[28] Топологическое пространство A называется совершенно нормальным, если 1) оно нормально, 2) всякое открытое множество этого пространства есть F_σ, т. е. объединение счётного числа замкнутых множеств.

В п^0 2 получен следующий результат: *непрерывную функцию $h(x)$, определённую на замкнутом множестве B совершенно нормального пространства A и удовлетворяющую во во всех точках A неравенству $a \leq h(x) \leq b$, можно продолжить в непрерывную во всём пространстве A функцию $f(x)$ так, чтобы всюду на $A \backslash B$ выполнялись неравенства $a < f(x) < b$.*

В п^0 3 результат п^0 2 видоизменен для общих нормальных пространств.

В п^0 4 получен следующий результат: *если на замкнутом множестве B нормального топологического пространства A определена непрерывная функция $h(x)$, её можно продолжить в функцию $f(x)$, определённую и непрерывную во всех точках A.*

В п^0 5 доказаны некоторые теоремы об отделимости в совершенно нормальных пространствах.

В 1939 г. Н. Б. Веденисов публикует статью [19], в которой развиваются некоторые идеи, связанные с понятием размерности топологических пространств. Дело в том, что индуктивное определение размерности, данное Урысоном и Менгером[29] ещё в 20-е гг., в 30-е гг. было распространено Э. Чехом на случай совершенно нормальных пространств. В статье Н. Б. Веденисова четыре параграфа. В первых двух параграфах статьи показывается, что для теории нульмерных (в смысле Чеха) замкнутых множеств ограничение, что каждое открытое множество есть F_σ, излишне. В п^0 3 показывается, что в случае общих топологических пространств определение Э. Чеха неравносильно классическому: существуют пространства, нульмерные в смысле Урысона –Менгера, но имеющие положительную размерность в смысле Э. Чеха. Наконец, в п^0 4 доказывается эквивалентность определений размерности Э. Чеха и Урысона – Менгера для некоторого класса пространств, включающего в себя нормальные пространства со счётной базой и бикомпактные совершенно нормальные пространства.

С 1939 г. Н. Б. Веденисов стал по совместительству преподавать в Артиллерийской академии РККА им. Ф. Э. Дзержинского.

В 1940 г. вышла статья Н. Б. Веденисова [20]. В этой статье рассматриваются покрытия топологических пространств, состоящие из конеч-

[29]Менгер Карл-мл. (Menger Karl: 1903–1985) – австро-американский математик, родился в Вене, там же окончил ун-т, PhD в 1924 г., до 1930 г. преподавал в Амстердаме и в Вене, с 1930 г. – в США, с 1946 г. – профессор Иллинойского технологического ин-та. К. Менгер был одним из основателей метрической геометрии, участником создания теории игр, внёс важный вклад в теорию графов.

ного числа открытых множеств. Напомним, что *порядком покрытия* h называют наибольшее из натуральных чисел k, обладающих тем свойством, что существуют k множеств покрытия, которые имеют непустое пересечение.

Если пространство R таково, что существуют целые неотрицательные числа m, обладающие свойством: во всякое покрытие h может быть вписано покрытие h^* порядка $\leq m+1$, то наименьшее из таких чисел m называется *брауэровской*[30] *размерностью* пространства R и обозначается Dim R. Если чисел m, обладающих таким свойством, не существует, пространство R имеет бесконечную брауэровскую размерность.

П. С. Александрову принадлежит следующая теорема:

Метрический компакт R имеет брауэровскую размерность n тогда и только тогда, когда 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-отображение[31] *пространства R в n-мерный полиэдр; 2) для достаточно малых ε не существует ε-отображения пространства R в полиэдры размерности $\leq n$.*

Целью статьи [20] является обобщение теоремы П. С. Александрова на совершенно нормальные компактные пространства.

В 1940 г. в миланском математическом журнале вышла статья [21] Н. Веденисова на французском языке, содержавшая результаты статей [19] и [20] и их доказательства.

В 1941 г. академик А. Н. Колмогоров представил в журнал «Известия АН СССР», серия математическая, статью Н. Б. Веденисова [22]. В ней доказывается, что для размерности[32] (по Э. Чеху) справедливо предложение: если топологическое пространство R нормально, раз-

---

[30]Брауэр Лёйтзен Эгберт Ян (Brouwer Luitzen Egbertus Jan: 1881–1966) окончил ун-т в Амстердаме, там же профессор (1912–1951). Основные труды в области топологии, теории множеств, теории меры, комплексного анализа, математической логики; Брауэр инициировал появление нового направления в математике – интуиционизма.

[31]Непрерывное отображение $y = f(x)$ метрического пространства X в пространство Y называется ε-отображением, если прообраз каждой точки y из $f(X)$ имеет диаметр меньший, чем ε.

[32]Размерность по Чеху ($Dim\ R$) топологического пространства R определяется так: $Dim\ R = -1$ тогда и только тогда, когда R пусто; $Dim\ R = n \quad (n > -1)$, если 1) для любого замкнутого множества F из R и любой его окрестности $U(F) = U$ найдётся такая окрестность $V(F) = V$ из U, что $Dim(V-V) \leq (n-1)$; 2) существует замкнутое множество F^* из R, имеющее такую окрестность $U(F^*) = U$, что для любой окрестности $V(F^*) = V$ из U имеет место неравенство $Dim\ (V - V) \geq n - 1$.

мерность его бикомпактного расширения βR равна размерности R, и приводятся некоторые следствия этой теоремы.

С началом ВОВ Н. Б. Веденисов, несмотря на слабое здоровье и бронь, решил уйти в ополчение.

В тяжелых боях под Ельней в окружении он был ранен и попал в плен. Осенью 1941 г. Николай Борисович Веденисов умер от ран и нечеловеческих условий плена.

Уже после ВОВ в 1948 г. в журнале «Успехи Математических Наук» была опубликована обзорная статья Н. Б. Веденисова [23] о бикомпактных пространствах, посланная ещё в 1941 г. В этой статье рассмотрены три предложения:

A) *Каждое бесконечное множество M пространства X имеет точку полного накопления, т. е. такую точку x из X, в любой окрестности которой находится часть множества M, по мощности равная M.*

B) *Вполне упорядоченная невозрастающая последовательность непустых замкнутых множеств пространства X имеет непустое пересечение.*

C) *Из любого открытого (т. е. состоящего из открытых множеств) покрытия пространства X можно выделить конечное покрытие.*

В статье доказано, что топологическое пространство, обладающее любым из этих трёх свойств, обладает и двумя другими. Пространства, обладающие этими свойствами, названы П. С. Александровым и П. С. Урысоном **бикомпактными**.

В 1970 г. академик П. С. Александров написал фактически свои воспоминания [24] о Н. Б. Веденисове, кратко охарактеризовав и его достижения, и его деятельность.

3. Марк Глезерман (1915–1941) родился в 1915 г в посёлке[33] Воскресенск Московской губернии в семье зубного врача Ефима Глезермана. В 1932 г. поступил на химический фак-т МГУ, но тяга к изучению математики привела его в 1934 г. на механико-математический фак-т (мех.-мат) МГУ. В этом же году он организовал при мех.-мате МГУ математический кружок для школьников, а с 1935 г. участвовал в организации и проведении олимпиад для школьников Москвы.

[33] С 1938 г. город Воскресенск.

На мех.-мате Марк слушал лекции своего будущего научного руководителя Льва Семёновича Понтрягина[34] (1908–1986). Под руководством Л. С. Понтрягина Марк пишет дипломную работу «Пересечения в многообразиях». В 1940 г. М. Е. Глезерман оканчивает с отличием МГУ и поступает в аспирантуру к Л. С. Понтрягину. Одновременно с 1940 г. М. Е. Глезерман начинает преподавать в Артиллерийской академии РККА им. Ф. Э. Дзержинского [25].

В аспирантуре М. Е. Глезерман перерабатывает свою дипломную работу в статью [26]. Как пишет в примечаниях к статье Л. С. Понтрягин: «К началу Великой Отечественной войны статья была почти полностью подготовлена к печати, но война помешала её изданию... Теперь, после окончания войны, статью пришлось заново пересмотреть и внести в неё некоторые изменения». Добавлю, что кроме самого Л. С. Понтрягина эти изменения выполнил однокурсник М. Е. Глезермана Михаил Шура-Бура[35]. Теория пересечений многообразий, построенная в 1926 г. Соломоном Лефшецом[36], содержала достаточное количество нестрогих мест. В статье Марка Глезермана и Л. С. Понтрягина даётся строгое и последовательное изложение теории пересечения многообразий. При этом рассматриваются многогранники общего типа и общего положения, а не только симплициальные многообразия и циклы, реализуемые Лефшецом в виде геометрических образований, составленных из выпуклых многогранников, лежащих в основных симплексах многообразия.

В статье [26] пять параграфов. В параграфе 1 «Выпуклые многогранники» интересен п. 1.5, где даётся определение многогранников общего типа и общего положения. В параграфе 2 «Теоремы об ориентации» даётся определение ориентации евклидова пространства и r-

[34]Понтрягин Лев Семёнович – выдающийся математик, внёсший значительный вклад в алгебраическую и дифференциальную топологию, теорию колебаний, вариационное исчисление, математическую теорию оптимальных процессов, дифференциальные игры; чл.-корр. АН СССР(1939), академик АН СССР(1958); окончил учёбу в МГУ в 1929 г. и поступил в аспирантуру к П. С. Александрову, при этом будучи с 14 лет слепым. Обвинения в антисемитизме (с 1968 г.) отвергал, написав в своих воспоминаниях, «что боролся с сионизмом», помогая чем мог евреям-математикам, в частности В. А. Рохлину.

[35]Шура-Бура Михаил Романович (1918–2008) – ученик П. С. Александрова, профессор (1955), д-р. ф.-м. наук (1954), один из пионеров компьютерных наук в СССР.

[36]Лефшец Соломон (Lefschetz Solomon: 1884–1972) – американский математик, профессор Принстонского ун-та, основные труды в области алгебраической геометрии, теории многомерных алгебраических многообразий, теории устойчивости и качественной теории дифференциальных уравнений.

мерного выпуклого множества[37], близкое к определению П. С. Александрова в его книге «Комбинаторная топология» (1947). В этом же параграфе центральным представляется формула Лефшеца для границ пересечения цепей. В параграфе 3 «Полигональные цепи» определения и результаты двух предыдущих параграфов переносятся из евклидова пространства в комплексы. В целом этот параграф носит вспомогательный характер для параграфа 5. В параграфе 4 «Барицентрическое подразделение», кроме основных свойств барицентрического подразделения, строятся так называемые m-подразделения и исследуются пересечения m-клеток. Параграф 5 «Кольцо Лефшеца» является основным в статье [26]. От вспомогательных понятий в нём содержится переход к главному содержанию статьи – инвариантам Лефшеца. В п. 5.1 изучаются звёздные аппроксимации полигональных цепей. В п. 5.2 определяется кольцо Лефшеца. В п. 5.3 изучаются пересечения непрерывных цепей. Наконец, в п. 5.4 доказывается изоморфизм колец Лефшеца и Александера[38].

С началом Великой Отечественной войны Марк Ефимович Глезерман вступил в ряды народного ополчения Москвы, имея бронь как преподаватель Артиллерийской академии РККА. В тяжелых боях у деревни Уварово Ельнинского р-на Московской обл. 8 октября 1941 г. М. Е. Глезерман погиб.

О жизни М. Е. Глезермана ярко написал [25] его однокурсник, ученик П. С. Александрова, ветеран войны, участник Атомного проекта, сотрудник Института прикладной математики АН СССР д-р физ.-мат наук (1981) Яков Маркович Каждан (1918–2007).

4. Шклярский Давид Оскарович (1918–1942)[39] родился 23 ноября 1918 г. в Харькове, но позже жил и учился в Москве. Воспитывался матерью, которую любил и о которой нежно заботился. Математикой заинтересовался в старших классах школы в попытке решить

[37]Ориентацией r-мерного выпуклого множества называется ориентация его несущей плоскости.

[38]Александер Джеймс Уэделл (Alexander James Waddell: 1888–1971) – американский математик, член Национальной АН США (1930). Окончил Принстонский ун-т (1910), работал там же до 1933 г.; профессор (1928); с 1933 г. – в Институте перспективных исследований в Принстоне. Основные труды в области топологии. Им доказана топологическая инвариантность симплициальных гомологий; в 1923 г. доказал закон двойственности для полиэдров; он один из творцов теории узлов, алгебраической геометрии; получил важные результаты о неподвижных точках при непрерывных отображениях, в теории функций.

[39]О деятельности Д. О. Шклярского см. [27].

проблему Ферма. Серьёзно занимался в математическом кружке учителя А. И. Фетисова[40] [28], а позднее, с 1935 г. в кружке при МГУ третьекурсника мех.-мата Г. Е. Шилова[41]. В 1936 г. Д. О. Шклярский получил первую премию на второй Московской математической олимпиаде.

Шклярский Давид Оскарович

В тот же год он поступил на первый курс механико-математического факультета МГУ. С 1937 по 1941 г. руководил одной из секций математического кружка при МГУ. Задачи, предлагавшиеся им для занятий в кружке, послужили важной частью для изданных и многократно переизданных уже после ВОВ трёхтомника «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» по алгебре и арифметике (с 1950 г.), планиметрии (с 1950 г.), стереометрии (с 1954 г.), трёх авторов: Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова[42], И. М. Яглома[43], в серии «Библиотека математи-

[40]Фетисов Антонин Иванович (1891–1979) экстерном окончил МГУ (1928), диплом защищал под руководством академика Н. Н. Лузина, после чего переехал из г. Одоев Тульской обл. в Москву; к. пед. н. (1946).

[41]Шилов Георгий Евгеньевич (1917–1973) (до 1937 г. Боссе Юрий Георгиевич) окончил МГУ (1938), там же аспирантуру (1941), работал в МГУ с 1946 г. с перерывом 1951–1954 гг. в Киевском ун-те; д-р ф.-м. наук (1951), проф. (1952). Основные труды в области функционального анализа, обобщенных функций, теории дифференциальных уравнений в частных производных.

[42]Ченцов Николай Николаевич (1930–1992) окончил МГУ (1952), д-р ф.-м. н. (1968), проф. (1972). Основные труды: математическая статистика, теория статистического вывода, математическое моделирование.

[43]Яглом Исаак Моисеевич (1921–1988) окончил Свердловский государственный ун-т (1942), аспирантуру МГУ (1945), д-ф.-м. н. (1965), проф. (1966). Кроме ряда

ческого кружка», вып. 1. в изд-ве «Наука». Впервые часть задач появилась в работе «Московский математический кружок» в 1946 г. [29].

В студенческие годы Д. О. Шклярский активно участвует в работах различных научных кружков и семинаров как по геометрии, так и по топологии. В сентябре 1940 г. его доклад «О покрытиях сферы», написанный под руководством профессора Л. А. Тумаркина[44], был поставлен на заседании Московского математического общества. Печатная версия [30] вышла в 1945 г. в журнале «Математический сборник». В статье приводятся две теоремы. При этом вторая теорема, как доказывает Давид Оскарович, есть следствие теоремы 1 и для двумерного случая является обобщением теоремы Л. Г. Шнирельмана: *если три множества покрывают сферу S, то по крайней мере в одном из них есть пара диаметрально противоположных точек.* Для формулировки теоремы 1 дадим необходимые определения.

Рассмотрим покрытие двумерной сферы S замкнутыми множествами $A_1, \ldots, A_n$. Это покрытие обозначим символом A_i. Назовём покрытие B_i эквивалентным покрытию A_i, если оно получено из A_i гомеоморфным отображением сферы S на себя. Будем говорить, что покрытие A_i пересекается с B_i, если хотя бы одно из пересечений A_iB_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непусто. Будем говорить, что покрытие B_i *снимается* с покрытия A_i, если существует покрытие C_i, эквивалентное B_i и не пересекающееся с A_i. Покрытие A_i имеет *кратность* k , если существует точка x сферы S, принадлежащая k из замкнутых множеств A_i, образующих покрытие A_i.

Теорема 1. *Если покрытие можно снимать с самого себя, то оно имеет кратность три.*

Теорема 2. *Если замкнутые множества A_1, A_2, A_3 покрывают сферу S, то при любом гомеоморфизме S в самое себя существует точка, которая вместе со своим образом содержится в одном множестве A_i.*

московских вузов, преподавал в Орехово-Зуеве (1949–1956) и в Ярославском ун-те (1974–1983). Основные труды: по дифференциальной геометрии, методике преподавания математики и различным связям науки и культуры с математикой; автор или соавтор более 40 книг.

[44]Тумаркин Лев Абрамович (1904–1974) окончил ф.-м. факультет Московского ун-та в 1925 г., аспирантуру (1929), профессор МГУ (1935), д-р ф.-м. наук (1936), декан мех.-мата МГУ (1935–1939). Основные труды в области теоретико-множественной топологии.

До настоящего времени неизвестно, какие именно аналоги теоремы 1 Шклярского имеют место для произвольного гомеоморфизма n-мерной сферы.

В январе 1941 г. на заседании Московского математического общества (ММО) Давид Оскарович Шклярский стал первым студентом, удостоенным премии ММО молодым математикам.

Другая работа Д. О. Шклярского под названием «Условно сходящиеся ряды векторов» была опубликована в журнале «Успехи математических наук» в 1944 г. (Вып. 10, с. 51–59).

В этой работе рассматривается ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (*)$$

составленный из векторов n-мерного пространства R_n. Для ряда действительных чисел имеет место теорема Римана[45]: *если ряд действительных чисел сходится не абсолютно, то перестановками его членов можно в качестве суммы ряда получить любое действительное число.*

Возвращаясь к пространству R_n, если в нём область сумм состоит из одной точки, т. е. если сумма не зависит от порядка членов, то ряд называется безусловно сходящимся. Если же область сумм состоит более чем из одной точки, то ряд называют условно сходящимся. В начале XX века Поль Леви[46] (1905) и Эрнст Штайниц[47] (1913) доказали следующую теорему: *область сумм ряда векторов n-мерного пространства R_n, который сходится хотя бы при одном расположении его членов, есть k-мерное подпространство,* $0 \leq k \leq n$. *Для каждого k-мерного*

[45]Риман Бернхард (Riemann Bernhard: 1825–1866) – великий немецкий математик, член Берлинской (1859) и Парижской (1860) АН. Учился в Геттингенском и Берлинском ун-тах. Защитил Phd (1851) под руководством Гаусса. В 1863 г. ввел понятие (римановой) геометрии. С 1859 г. профессор Геттингенского ун-та. Риман преобразовал математический анализ, комплексный анализ, дифференциальную геометрию, математическую физику, арифметику; внес вклад в создание топологии.

[46]Леви Поль (Paul Pierre Levy: 1885–1971) – французский математик, член Парижской АН (1964). П. Леви внёс вклад в теорию случайных процессов, теорию вероятностей (основоположник общих предельных теорем (1934), функциональный анализ, механику.

[47]Штайниц Эрнст (Steinitz Ernst: 1871–1928) – немецкий математик еврейского происхождения. Учился в ун-тах Бреслау и Берлина. Защитил Phd в 1894 г. С 1910 г. профессор ун-та в Бреслау, с 1820 г. – в Кильском ун-те. Основные труды в области алгебраической теории поля и теории многогранников.

подпространства можно построить ряд векторов, для которого это подпространство служит областью сумм.

Для $n = 1$ из теоремы Леви – Штайница следует теорема Римана. Статья Д. О. Шлярского содержит дальнейшее обобщение теоремы Леви – Штайница. Для формулировки результатов понадобится еще несколько определений. Обозначим множество векторов ряда (*) через U. Совокупность всевозможных частичных сумм из конечного числа векторов u_i из U обозначим через U^*. Каждое направление в пространстве, вдоль которого частичные суммы не могут заходить как угодно далеко, определяется своим единичным вектором φ. Направление φ назовём *направлением сходимости*, если множество φU^* проекций векторов U^* на это направление ограничено по абсолютной величине, т. е. если $|\varphi s| < K$ для всех s из U^*. Для множества M из R_n через M^- будем обозначать наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее M. Теперь можно формулировать первую теорему:

Если каждое направление в пространстве есть направление сходимости для U, то ряд (*) сходится безусловно и его область сумм есть центр симметрии выпуклого замкнутого множества $2U^{*-}$.

Вторая теорема формулируется так:

Если каждое направление пространства R_n служит для U направлением расходимости, то областью сумм для U будет все пространство R_n.

Наконец, третья теорема формулируется так:

Область сумм ряда U векторов, сходящегося хотя бы при одном расположении его членов, есть k-мерное подпространство, $0 \leq k \leq n$, образованное центрами симметрии выпуклого множества $2U^{*-}$.

В конце статьи содержится проблема: выделить и исследовать класс пространств, для которых абсолютная сходимость (т. е. сходимость суммы норм векторов) совпадает с безусловной.

В 1941 г. Д. О. Шклярский с отличием оканчивает МГУ, но начинается Великая Отечественная война, и Д. О. Шклярского направляют в ЦАГИ. Однако Давид Оскарович подаёт заявление с просьбой отправить его добровольцем в действующую армию. В феврале 1942 г. его направили в партизанский отряд за линией фронта. Отряд назывался «Железняк». Он базировался на территории Белоруссии. 26 июня 1942 г. Д. О. Шклярский погибает при не совсем ясных обстоятельствах в Бегомльском районе Белоруссии. Похоронен в братской могиле в д. Пострежье Витебской области Белоруссии.

5. Юнович Борис Мордухович (Маркович) (1906–1942) родился 1 марта 1906 г. в г. Витебске (Витебская губерния). В 1925 г. поступил на первый курс физико-математического факультета Московского государственного университета. В 1930 г. окончил МГУ. По распределению Б. М. Юнович становится преподавателем в одном из экономических вузов Москвы. Об этом мы можем судить по воинскому званию, которое он получил по призыву 22 июня 1941 г.: интендант 3 ранга запаса.

Юнович Борис Мордухович (Маркович)

В июне 1934 г. Б. М. Юнович участвует в работе 2-го Всесоюзного математического съезда в Ленинграде, где на заседании секции «Анализ 1» (Теория функций) делает сообщение «О дифференцировании функций множеств». Очень краткое изложение этого сообщения (в 14 строк) было дано в «Трудах съезда» (том 2, с. 145–146) в декабре 1935 г. В конце изложения этого доклада было сказано, что подробнее доклад будет изложен в «Докладах АН СССР». Так и случилось, но только в октябре 1940 г. Статью [31] представлял академик А. Н. Колмогоров.

Пусть даны две функции множеств $\mu(E)$ и $\varphi(E)$, определённые в пространстве R, тогда производная от функции $\varphi(E)$ по функции $\mu(E)$ в точке P есть $\lim(\varphi(A_n(P))/\mu(A_n(P))$ при $n \to \infty$, где $A_n(P)$ – некоторая последовательность множеств, поставленная в соответствие точке P. Систему таких последовательностей $A_n(P)$, определённых для

каждой точки P, будем обозначать $R\{A_n(P)\}$. Целью статьи является *определение необходимых и достаточных условий, которые надо наложить на систему множеств $R\{A_n(P)\}$ для того, чтобы при данной абсолютно аддитивной функции $\mu(E)$ всякая такая же функция $\varphi(E)$, вполне непрерывная относительно первой, т. е. представимая в виде $\varphi(E) = \int_E f(P)d\mu(E)$, имела почти всюду μ-определенную производную, равную $f(P)$.*

Необходимые и достаточные условия, о которых идет речь, определяются в зависимости от свойств функции $f(P)$.

В 1939 г. Б. М. Юнович защищает диссертацию по анализу на степень кандидата физ.-мат. наук. Как было уже сказано выше, с первого дня Великой Отечественной войны Б. М. Юнович в действующей армии. Во время нашего наступления под Москвой в конце 1941 г. Б. М. Юнович погибает.

Список источников

1. **Бебутов М. В.** О динамических системах, устойчивых по Ляпунову // *ДАН.* 1938. 18. № 3. С. 155–158.

2. **Бебутов М. В.** Одна теорема о симплициальных комплексах // *ДАН.* 1938. 19. № 5. С. 347–348.

3. **Бебутов М. В., Шнейдер В. Е.** Об одном счетном топологическом пространстве // *Учен. записки университета.* 1938. 30. С. 157–160.

4. **Бебутов М. В.** Об отображении траекторий динамической системы на семейство параллельных прямых // *Бюлл. ун-та (А).* 1939. 2. № 3. С. 3–23.

5. **Бебутов М. В., Степанов В. В.** Об изменении времени в динамических системах с инвариантной мерой // *ДАН.* 1939. 24. № 3. С. 217–219.

6. **Бебутов М. В. Степанов В. В.** Sur la mesure invariante dans les systemes dynamiques qui ne diffèrent que par le temps // *Матем. сб.* 1940. Т. 7 (49). № 1. С. 143–166.

7. **Бебутов М. В.** О динамических системах в пространстве непрерывных функций // *ДАН.* 1940. 29. № 9. С. 904–906.

8. **Бебутов М. В.** О динамических системах в пространстве непрерывных функций. М.: Моск. гос. ун-т, 1941. 52 с. (Бюллетень Московского государственного университета. Математика / под ред. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогорова, В. В. Степанова. Т. 2, вып. 5).

9. **Бебутов М. В.** Цепи Маркова с компактным пространством состояний // *ДАН.* 1941. 30. № 6. С. 180–181.

10. **Бебутов М. В.** Цепи Маркова с компактным пространством состояний // *Матем. сб.*. 1942. Т. 52. № 3. С. 213–238.

11. **Алексеев В. М., Фомин С. В.** Михаил Валерьевич Бебутов // *УМН.* 1970. Т. 25. Вып. 3. С. 237–239.

12. **Tychonoff A. N., Vedenissoff N. B.** Sur le dévelopment modern de la théorie des espaces abstraits // *Bull. sci. math.* 1926. 50. Pp. 15–27.

13. **Wedenissoff N. B.** Sur le espaces métriques complets // *J. math. pur et appl.* 1931. 9. Pp. 377–392.

14. **Wedenissoff N. B.** Sur les fonctions continues dans des espaces topologiques // *Fund. Math.* 1936. 27. Pp. 234–238.

15. **Wedenissoff N. B.** Sur an problème de Paul Alexandroff // *Ann. of Math.* 1936. 37. Pp. 427–428.

16. **Веденисов Н. Б.** О многообразиях в смысле E. Cech'a // *ДАН.* 1937. 16 № 9. С 443–445.

17. **Веденисов Н. Б.** О некоторых топологических свойствах упорядоченных множеств // *Учен. записки Гос. пед. ин-та. Сер. физ.-мат.* 1938. 2. С. 15–26.

18. **Веденисов Н. Б.** Замечания о непрерывных функциях в топологических пространствах // *Учен. записки Гос. пед. ин-та. Сер. физ.-мат.* 1938. 2. С. 47–52.

19. **Веденисов Н. Б.** Замечания о размерности топологических пространств // *Учен. записки ун-та.* 1939. 30. С. 131–140.

20. **Веденисов Н. Б.** Обобщение одной теоремы теории размерности // *Учен. записки Гос. пед. ин-та. Сер. физ.-мат.* 1940. 7. С. 35–40.

21. **Wedenissoff N. B.** Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension // *Comp. mathem.*, 1940. 7. Pp. 194–200.

22. **Веденисов Н. Б.** О размерности в смысле E. Cech'a // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1941. 5. С. 211–216.

23. **Веденисов Н. Б.** Бикомпактные пространства // *УМН.* 1948. Т. 3. № 4. С. 67–79.

24. **Александров П. С.** Николай Борисович Веденисов // *УМН.* 1970. Т. 25. Вып. 3. С. 239–241.

25. **Каждан Я. М.** Марк Ефимович Глезерман // *УМН.* 1970. Т. 25. Вып. 3. С. 241–243.

26. **Понтрягин Л. С., Глезерман М. Е.** Пересечения многообразий // *УМН.* 1947. 2. № 1. С. 58–155.

27. **Головина Л. И.** Давид Оскарович Шклярский (1918–1942) // *УМН.* 1970. Т. 25. Вып. 3. С. 248–252.

28. **Шклярский Д. О.** Московский математический кружок // *УМН.* 1945. 1. Вып. 3. С. 212–217.

29. **Чернеев С. В., Романюк В. Я., Вдовин А. И. и др.** Московский университет в Великой Отечественной войне. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2020. 632 с.

30. **Шклярский Д. О.** О разбиениях двумерной сферы // *Матем. сб.*, 1945. Т. 58. № 2. С. 126–128.

31. **Юнович Б. М.** О дифференцировании абсолютных аддитивных функций множеств // *ДАН.* 1941. Т. 30. № 1. С. 112–114.

References

1. **Bebutov M. V.** On dynamical systems stable according to Lyapunov. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1938. 18, no 3, pp. 155–158. (In Russ.)

2. **Bebutov M. V.** One theorem on simplicial complexes. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1939. 19, no 5, pp. 347–348. (In Russ.)

3. **Bebutov M. V., Shneider V. E.** About one countable topological space. *Uchenye zap. uni-ta* [Academic Notes of the University]. 1939. 30, pp. 157–160. (In Russ.)

4. **Bebutov M. V.** Mapping the trajectories of a dynamical system to a family of parallel lines. Moscow: Byull.uni-ta (A) [University Bulletin]. 1939. 2, no 3, pp. 3–23. (In Russ.)

5. **Bebutov M. V., Stepanov V. V.** On the change of time in dynamical systems with an invariant measure. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1939. 24, no 3, pp. 217–219. (In Russ.)

6. **Bebutov M. V.** On invariant measurement in dynamical systems that differ only by times. *Matem. sb.* [Mathematical collection]. 1940. 7 (49), no 1, pp. 143–166.

7. **Bebutov M.V.** On dynamical systems in the space of continuous functions. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1940. 29, no 9, pp. 904–906. (In Russ.)

8. **Bebutov M. V.** *O dinamicheskikh sistemakh v prostranstve nepreryvnykh funktsiy* [On dynamical systems in the space of continuous functions]. Moscow: Izd-vo MGU, 1940. 52 p. (*Byulleten' Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika* [Bulletin of Moscow State University. Mathematics] / eds B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, V. V. Stepanov. Vol. 2, no 5). (In Russ.)

9. **Bebutov M. V.** Markov chains with compact state space. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1941. 30, no 6, pp. 180–181. (In Russ.)

10. **Bebutov M. V.** Markov chains with compact state space. *Matem. sb.* [Mathematical collection]. 1942. 52, no 3, pp. 213–238. (In Russ.)

11. **Alekseev V. M., Fomin S. V.** Mikhail Valeryevich Bebutov. *UMN* [Russian Mathematical Surveys]. 1970. 25, no 3, pp. 237–239. (In Russ.)

12. **Tychonoff A. N., Vedenissoff N. B.** Sur le dévelopment modern de la théorie des espaces abstraits. *Bull. sci. math.* 1926. 50. Pp. 15–27.

13. **Vedenisov N. B.** About full metric spaces. *J. math. pur. et appl.* 1931. 9, pp. 377–392.

14. **Vedenisov N. B.** On continuous functions in topological spaces. *Fund. Math.*, 1936. 27, pp. 234–238.

15. **Vedenisov N. B.** About one problem of Pavel Alexandrov. *Ann. of Math.* 1936. 37, pp. 427–428.

16. **Vedenisov N. B.** On manifolds in the sense of E.Cech. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1937. 16, no 9, pp. 443–445. (In Russ.)

17. **Vedenisov N. B.** On some topological properties of ordered sets. *Uchenye zapiski gos. ped. inst-ta. Ser. fiz.-mat.* [Uchen. notes of the State ped. in-ta. Ser. of phys.-math.]. 1938, 2, pp. 15–26. (In Russ.)

18. **Vedenisov N. B.** Remarks on continuous functions in topological spaces. *Uchenye zapiski gos. ped. inst-ta. Ser. fiz.-mat.* [Uchen. notes of the State ped. in-ta. Ser. of phys.-math.]. 1938, 2, pp. 47–52. (In Russ.)

19. **Vedenisov N. B.** Remarks on the dimensionality in topological spaces. *Uchenye zapiski uni-ta* [Academic Notes of the University]. 1939, 30, pp. 131–140. (In Russ.)

20. **Vedenisov N. B.** Generalization of one theorem of dimensionality theory. *Uchenye zapiski gos. ped. inst-ta. Ser. fiz.-mat.* [Uchen. notes of the State ped. in-ta. Ser. of phys.-math.]. 1940, 7, pp. 35–40. (In Russ.)

21. **Vedenisov N. B.** Generalization of several theorems of dimensionality. *Comp. Mathem.*, 1940, 7, pp. 194–200.

22. **Vedenisov N. B.** On the dimensionality in the sense of E. Cech. *Izv. AN USSR. Ser. matem.* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Ser. mathem.]. 1941, 5, pp. 211–216. (In Russ.)

23. **Vedenisov N. B.** Bicompact spaces. *UMN* [Russian Mathematical Surveys]. 1943, 3, no 4, pp. 67–79. (In Russ.)

24. **Alexandrov P. S.** Nicolay Borisovich Vedenisov. *UMN* [Russian Mathematical Surveys]. 1970. 25, no 3, pp. 239–241. (In Russ.)

25. **Kazhdan Ya. M.** Mark Efimovich Glezerman. *UMN* [Russian Mathematical Surveys]. 1970, 25, issue 3, pp. 241–243. (In Russ.)

26. **Pontryagin L. S., Glezerman M. E.** Intersections of manifolds. *UMN* [Russian Mathematical Surveys]. 1947, 2, issue 1, pp. 58–155. (In Russ.)

27. **Golovina L. I.** David Oskarovich Shklyarsky. *UMN* [Russian Mathematical Surveys], 1970, 25, issue 3, pp. 248–252. (In Russ.)

28. **Shklyarsky D. O.** Moscow Mathematical Circle. *UMN* [Russian Mathematical Surveys]. 1945, 1, issue 3, pp. 212–217. (In Russ.)

29. **Cherneev S. V., Romanyuk V. Ya., Vdovin A. I. and others**. *Moskovskiy universitet v Velikoy Otechestvennoy voyne* [Moscow University in the Great Patriotic War]. 4-e izd. Moscow: Izd-vo MGU, 2020. 632 c. (In Russ.)

30. **Shklyarsky D. O.** On the partitioning of two-dimensional sphere. *Matem. sb.* [Mathematical collection]. 1945, 58, no 2, pp. 126–128. (In Russ.)

31. **Junovic' B. M.** On the differentiation of absolutely additive functions of sets. *Doklady AN USSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. 1941, 30, no 1, pp. 112–114. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Одинец Владимир Петрович / Vladimir P. Odinets
д.ф.-м.н., профессор / Doctor of in Physics and Mathematics, Professor

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 11.04.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 19.04.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 21.04.2023

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Научная статья

УДК 517.9, 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_56

О ПРИМЕНЕНИИ УСТРОЙСТВ SDR В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗА

Владимир Александрович Устюгов[1], **Иван Иванович Лавреш**[1], **Юрий Николаевич Истомин**[1], **Павел Андреевич Макаров**[2]
[1]Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина, kib@syktsu.ru
[2]ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, makarovpa@ipm.komisc.ru

Аннотация. В статье рассмотрены принципы работы современных программно конфигурируемых радиоприемников (software defined radio, SDR). Интерес к таким устройствам обусловлен невысокой стоимостью определенных моделей, а также широким спектром задач по поиску и цифровой обработке электромагнитных сигналов в контексте технической защиты информации, исследования распространения цифровых и аналоговых сигналов в городской среде, построения новых цифровых систем связи. Рассмотрены конкретные примеры определяемых сигналов и программный инструментарий для разработки конфигураций радиоприемника в контексте обучения студентов технических специальностей.

Ключевые слова: цифровая обработка сигналов, программно-управляемое радио

Для цитирования: Устюгов В. А., Лавреш И. И., Истомин Ю. Н., Макаров П. А. О применении устройств SDR в образовательном процессе для технических специальностей вуза // *Вестник Сыктывкарского*

© Устюгов В. А., Лавреш И. И., Истомин Ю. Н., Макаров П. А., 2023.

университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2 (47). С. 56–68. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_56

Article

The use of SDR devices in the educational process for technical specialties of universities

Vladimir A. Ustyugov[1], Ivan I. Lavresh[1], Yuriy N. Istomin[1], Pavel A. Makarov[2]
[1]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, kib@syktsu.ru
[2]Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, makarovpa@ipm.komisc.ru

Abstract. The article deals with the principles of modern software defined radio (SDR). Interest in such devices is due to the low cost of certain models, as well as a wide range of tasks in the search and digital processing of electromagnetic signals in the context of technical protection of information, the study of the spread of digital and analog signals in urban environments, construction of new digital communication systems. Specific examples of defined signals and software tools for developing radio receiver configurations are considered.

Keywords: digital signal processing, software-defined radio

For citation: Ustyugov V. A., Lavresh I. I., Istomin Yu. N., Makarov P. A. The use of SDR devices in the educational process for technical specialties of universities. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 56–68. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_56

1. Введение

В настоящее время развитие беспроводных систем связи диктует необходимость разработки и развития инструментов для изучения, контроля (мониторинга) и администрирования беспроводных сетей.

Важной особенностью беспроводных сетей является их существенный разброс по территориальному охвату. Существуют так называемые персональные беспроводные сети (технологии группы Bluetooth,

пространственный охват до 10 м), микролокальные беспроводные сети (например, строящиеся на чипах компании Nordic Semiconductors, позволяющие строить сети с охватом до десятков метров), ячеистые сети ZigBee, «обычные» локальные беспроводные сети Wi-Fi (охват до десятков метров), сети уровня муниципалитета (технология LoRa), глобальные сети операторов сотовой и спутниковой связи [1; 2].

Отметим, что широкий ассортимент сетевых беспроводных технологий обусловливает богатые возможности для построения несанкционированных каналов передачи данных. В связи с этим естественным образом возникает задача обнаружения таких каналов (и дальнейшей их блокировки).

Особенно подчеркнем бурное развитие технологий Индустрии 4.0 и интернета вещей (работающих в том числе с использованием вышеперечисленных технологий), с которыми связаны новые задачи администрирования и защиты информационных систем от несанкционированного вмешательства.

Также с использованием SDR можно проводить и фундаментальные исследования, например в области распространения цифровых радиосигналов в городской среде, их взаимного влияния, исследование и разработку новых методов цифровой модуляции (манипуляции) и помехозащищенного кодирования [3].

Всё вышеперечисленное обусловливает растущий интерес к обозначенной сфере знания в контексте высшего образования (отдельно выделим потенциально заинтересованные укрупненные группы специальностей и направлений «10.00.00. Информационная безопасность» и «03.00.00. Физика и астрономия») и среди отдельных технических энтузиастов. Появляется специализированная литература (в том числе русскоязычные книги), выпускается специализированное программное и аппаратное обеспечение. Недорогим, но эффективным программно-аппаратным решением в этой области является программно-конфигурируемое радио (англ. software-defined radio), технология которого зародилась в первой половине 1980-х гг. На сегодняшний день электронная промышленность выпускает такие устройства стоимостью от 10 долларов США, что делает такие радиоприемники не только востребованными, но и доступными. Описанию принципа работы и сценариев использования, в том числе в образовательном процессе вуза, радиоприемников SDR посвящена настоящая статья.

2. Материалы и методы

2.1. Аппаратная платформа SDR

Сегодня в среде технических энтузиастов и инженеров-специалистов различных профилей (в том числе по информационной безопасности) набирают популярность программируемые цифровые радиоприемники (SDR, Software Defined Radio, в русскоязычном Интернете часто переводится как «программно-определяемое радио») [4; 5]. Яркими примерами SDR могут служить:

- известное устройство Flipper Zero, проект российских разработчиков, собравший на сайте Kickstarter 4.8 миллионов долларов за 30 дней;
- исключительно популярный (тысячи позиций на популярных торговых площадках) благодаря низкой стоимости, подключающийся к компьютеру в стиле Flash-накопителя прибор класса RTL-SDR (то есть построенный на базе микросхемы RTL2832U);
- приемно-передающее устройство с открытой принципиальной электрической схемой и программным обеспечением HackRF One, рассматриваемое в рамках настоящей работы. Внешний вид устройства приведен на рис. 1.

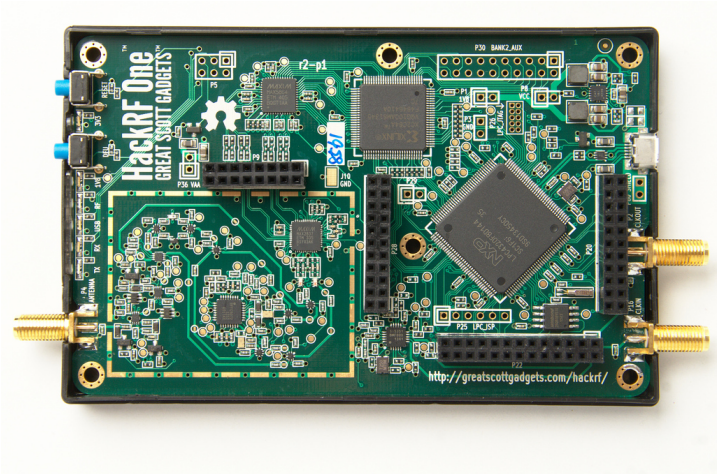

Рис. 1. Внешний вид печатной платы HackRF One (фото предоставлено разработчиком на официальной странице устройства https://github.com/greatscottgadgets/hackrf)

С точки зрения конструирования средств связи цифровые радиоприемники SDR представляют собой портативные подключаемые к персональному компьютеру аналого-цифровые преобразователи. Неотъемлемым компонентом такой радиосистемы является программное обеспечение персонального компьютера, средствами которого производятся стандартные операции формирования и обработки радиосигналов аналоговых и цифровых систем связи: модуляция/демодуляция, канальное кодирование/декодирование и другие [6].

Существуют программные конструкторы, такие как GnuRadio Companion, позволяющие формировать тракты (приемные и передающие) обработки сигналов в виде графических схем, в которых за различные стадии преобразований отвечают стандартные блоки с настраиваемыми параметрами, а также существует возможность соединения блоков в единый конвейер обработки.

В рамках настоящей работы мы рассматриваем радиоприемник HackRF One. Его основной разработчик Майкл Оссманн инициировал разработку (согласно истории проекта на официальном репозитории на https://github.com/greatscottgadgets/hackrf) в начале 2012 г., проект развивается до сих пор (на момент написания статьи последний коммит датирован 5 февраля 2023 г.).

Согласно официальной документации, прибор имеет следующие характеристики:

- устройство является полудуплексным приемопередатчиком;
- рабочие частоты: от 1 МГц до 6 ГГц;
- скорость работы АЦП: от 2 до 20 Мсемплов/с;
- разрешение АЦП 8 бит;
- интерфейс связи с персональным компьютером — USB, питание также по этой шине;
- SMA-разъем (импеданс 50 Ом) для подключения антенны;
- SMA-разъемы для входного и выходного сигналов синхронизации;
- микроконтроллер LPC43xx семейства ARM Cortex-M4;

- контактные колодки для подключения внешних устройств (среди них имеются входные и/или выходные линии интерфейсов I2S, SPI, I2C, UART, обычные цифровые порты ввода/вывода, АЦП, ЦАП, часы реального времени).

Таким образом, помимо применения HackRF One как непосредственно радиоприемника, с его помощью можно конструировать автономные измерительные/управляющие устройства в рамках практических занятий по дисциплинам, например, связанным с телекоммуникационными системами или технической защитой информации.

2.2. Программное обеспечение SDR

Как было указано ранее, программное обеспечение (ПО) является неотъемлемой частью радиосистемы SDR. Существующее ПО можно разделить на два класса:

- программные продукты, предназначенные для конечного пользователя, предоставляющие доступ к фиксированному множеству функций, таких как визуализация сигналов, декодирование сигналов популярных систем связи (например, демодуляция сигналов FM-радиостанций с последующим выводом информации на звуковую карту компьютера), фильтрация с определенным набором параметров;

- программные продукты, ориентированные на разработчиков, позволяющие самостоятельно строить тракты обработки сигналов произвольной сложности.

Примером программы первого класса может служить SDRSharp, поддерживающая работу с популярными устройствами SDR: Airspy, HackRF One, RTL-SDR. Внешний вид рабочего экрана программы приведен на рис. 2.

На рис. 2 можно видеть мгновенный слепок участка спектра излучения, поступающего на антенну радиоприемника, в данном случае представлена область частот 92—110 МГц, что соответствует участку работы городских вещательных радиостанций, передающих сигналы с частотной модуляцией (FM-радио). По изображению можно измерить мощность принимаемых сигналов и занимаемые ими полосы частот.

В нижней части экрана отображается так называемая «водопадная» диаграмма, представляющая собой развернутый во времени спектр, где

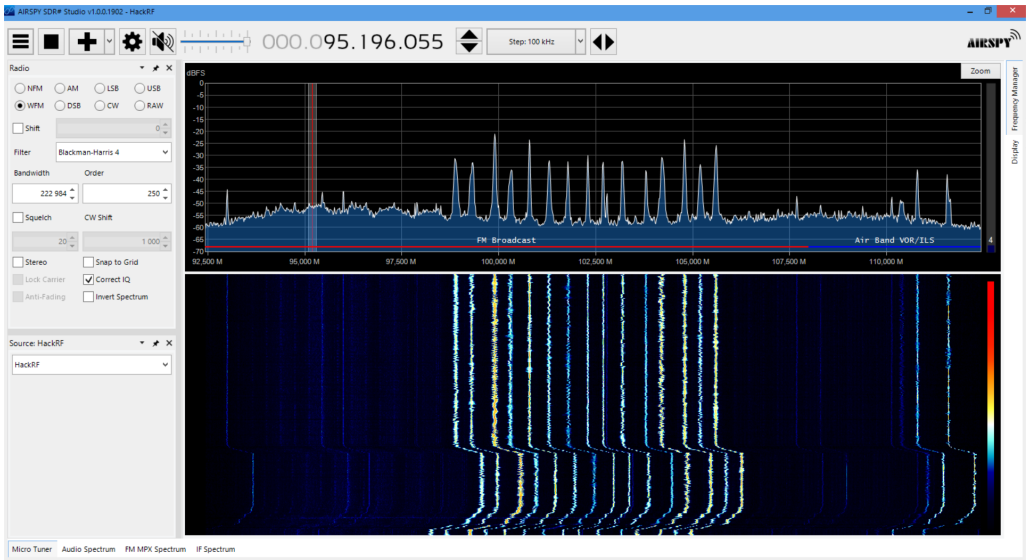

Рис. 2. Внешний вид рабочего экрана программы SDRSharp

амплитуда сигнала на малом частотном отрезке кодируется цветом. По такой диаграмме можно судить, например, о периодичности следования импульсов прерывистых сигналов.

Программное обеспечение SDRSharp имеет возможность применения нескольких программных демодуляторов для сигналов, что ярко отражает специфику концепции SDR, когда сигнал подвергается цифровой обработке со стороны программного обеспечения, а не электронных компонент. Это дает возможность без изменения электронной схемы устройства строить радиоприемные устройства, работающие, например, с разными типами модуляции сигналов. В данном случае доступна демодуляция сигналов с частотной, амплитудной (и, в частности, SSB) модуляцей, телеграфных сигналов. Из сигналов частотной модуляции выделяется и выводится на звуковую карту компьютера передаваемый аудиосигнал.

Отметим, что с использованием HackRF уверенно определяются следующие сигналы (разумеется, возможности прибора этими сигналами не ограничиваются):

- аудиодорожки телевизионных каналов;
- сигналы передатчиков базовых станций систем сотовой связи 2, 3, 4 поколений [7];

- сигналы точек доступа Wi-Fi, работающих в различных частотных диапазонах;
- сигналы различных систем связи, работающих на частоте 2.4 ГГц.

В этом контескте видится ценной возможность для студентов выйти за пределы исключительно теоретического изучения принципов работы цифровых систем связи (путем изучения научной литературы или компьютерного моделирования) и сопоставить измеренные параметры реальных сигналов (например, форму сигнала GMSK систем связи GSM, ширину занимаемой каналом связи полосы частот) со справочными данными.

Также существует специализированное программное обеспечение, позволяющее извлекать из потока данных систем сотовой связи 2-го поколения служебный канал, содержащий общую информацию о базовой станции (идентификатор, принадлежность к оператору сотовой связи и др.).

В качестве примера ПО второго класса приведем бесплатный программный комплекс GNU Radio. В составе комплекса поставляется программа GNU Radio Companion, позволяющая в графическом режиме разрабатывать тракты обработки радиосигналов. Интерфейс программы представлен на рис. 3.

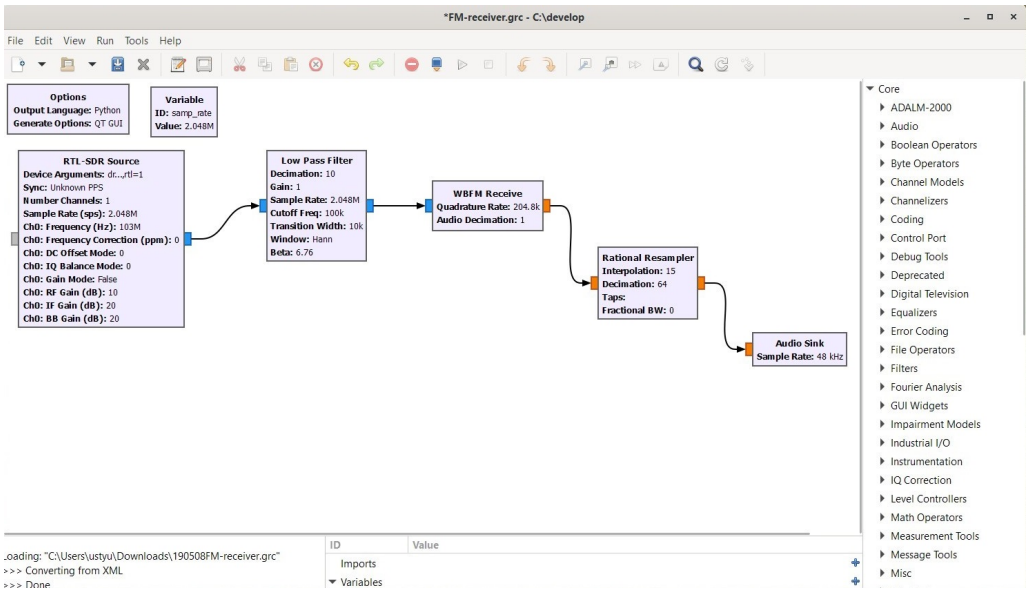

Рис. 3. Внешний вид рабочего экрана программы GNU Radio Companion

Тракт обработки сигнала формируется из связанных функциональных блоков, реализующих такие функции, как фильтрация, канальное кодирование, эквалайзинг, модуляция или демодуляция, скремблирование или дескремблирование и т. д. Функционал блоков реализован в основном на языках Python и C++, также предоставляется прикладной интерфейс программирования (application programming interface, API) для разработки программ на языке Python вне среды Companion.

В качестве примера на рис. 3 приведена программная схема радиоприемного устройства, работающего с FM-радиостанцией. Блок RTL-SDR Source связан с драйвером используемого SDR устройства и является источником потока отсчетов оцифрованного сигнала с антенны приемника. Можно видеть, что приемник настроен на частоту 103M, т. е. 103 МГц, входящую в диапазон частот работы городских FM-радиостанций. Сигнал из рассмотренного блока передается в блок Low Pass Filter (фильтр низких частот), отсекающий от сигнала ненужные части спектра. Следующий за ним блок WBFM Receive — демодулятор сигналов FM, в данном случае извлекающий из принятого сигнала аудиопоток.

Разработанные подобным образом схемы автоматически преобразуются в код на языке Python, фрагмент порожденного кода приведем ниже.

Листинг

Описание класса top_block

```
from gnuradio import qtgui

class top_block(gr.top_block, Qt.QWidget):

    def __init__(self):
        gr.top_block.__init__(self, "Top Block",
         catch_exceptions=True)
        Qt.QWidget.__init__(self)
        self.setWindowTitle("Top Block")

        ....
```

```
##################################################
# Blocks
##################################################

self.rtlsdr_source_0 = osmosdr.source(
    args="numchan=" + str(1) + " " + 'driver=rtlsdr,rtl=1'
)
self.rtlsdr_source_0.set_sample_rate(samp_rate)
self.rtlsdr_source_0.set_center_freq(103e6, 0)
self.rtlsdr_source_0.set_bandwidth(0, 0)

self.low_pass_filter_0 = filter.fir_filter_ccf(
    10,
    firdes.low_pass(
        1,
        samp_rate,
        100000,
        10000,
        window.WIN_HANN,
        6.76))
self.audio_sink_0 = audio.sink(48000, '', True)
self.analog_wfm_rcv_0 = analog.wfm_rcv(
 quad_rate=(samp_rate/10),
 audio_decimation=1,
)
```

Можно видеть, что работа с программными сущностями (такими, как источник сигнала RTL-SDR Source или фильтр низких частот) осуществляется предсказуемым образом в стиле объектно-ориентированного программирования. Отметим, что библиотеку GNU Radio можно использовать в разрабатываемых программах напрямую, не используя конструктор Companion.

4. Заключение

Исходя из вышесказанного можно отметить ключевые особенности, обусловливающие эффективность применения устройств SDR в учебном процессе для студентов, обучающихся по специальностям, входящим в укрупненные группы специальностей и направлений «10.00.00. Информационная безопасность» и «03.00.00. Физика и астрономия»:

- возможность удовлетворения интереса студентов в работе с современными физическими устройствами, выход за пределы исключительно теоретических обсуждений без использования дорогостоящего оборудования;
- возможность развития творческих способностей в технической области: используя устройства SDR с возможностью передачи сигналов, можно разрабатывать собственные системы цифровой связи;
- возможность построения технических экспериментов с действующими системами связи: GSM, 3G, LTE, Bluetooth, GPS и др.;
- возможность иллюстрации работы методов цифровой обработки сигналов;
- инструментарий конфигурирования (в частности, GnuRadio) позволяет строить тракты цифровой обработки сигналов в отрыве от SDR как такового;
- применение языка Python позволяет встраивать устройства SDR в проекты, посвященные технической защите информации или цифровой обработке сигналов, а также в бытовые проекты, использующие те или иные каналы цифровой связи.

Список источников

1. **Биккенин Р. Р., Чесноков М. Н.** Теория электрической связи. М.: Издательский центр «Академия», 2010. 336 с.
2. **Гепко И. А.** Современные беспроводные сети: состояние и перспективы развития. Киев: ЭКМО, 2009. 672 с.
3. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 1104 с.
4. **Галкин В. А.** Основы программно-конфигурируемого радио. М.: Горячая линия – Телеком, 2020. 372 с.
5. **Фокин Г. А.** Технологии программно-конфигурируемого радио. М.: Горячая линия – Телеком, 2023. 316 с.

6. **Хелд Г.** Технологии передачи данных. СПб.: BHV, 2003. 720 с.

7. **Ратынский М. В.** Основы сотовой связи. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 2000. 248 с.

References

1. **Bikkenin R. R., Chesnokov M. N.** *Teoriya elektricheskoj svyazi* [The theory of electrical communication]. Moscow: Akademia, 2010. 336 p. (In Russ.)

2. **Gepko I. A.** *Sovremennye besprovodnye seti: sostoyanie i perspektivy razvitiya* [Modern Wireless Networks: Status and Prospects of Development]. Kiev: «EKMO», 2009. 672 p. (In Russ.)

3. **Sklyar B.** *Cifrovaya svyaz. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe primenenie* [Digital communication. Theoretical foundations and practical applications]. Moscow: Wiljams, 2007. 1104 p. (In Russ.)

4. **Galkin V. A.** *Osnovy programmno-konfiguriruemogo radio* [Fundamentals of reconfigurable radio]. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2020. 372 p. (In Russ.)

5. **Fokin G. A.** *Texnologii programmno-konfiguriruemogo radio* [Software-configurable radio technologies]. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2023. 316 p.(In Russ.)

6. **Kheld G.** *Texnologii peredachi dannyx* [Data transmission technologies]. SPb.: BHV, 2003. 720p. (In Russ.)

7. **Ratynskij M. V.** *Osnovy sotovoj svyazi* [Cellular basics]. Moscow: Radio i svyaz, 2000. 248p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Устюгов Владимир Александрович / Vladimir A. Ustyugov
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Information Security Department

Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Лавреш Иван Иванович / Ivan I. Lavresh
к.т.н., доцент кафедры информационной безопасности / Ph.D. in Technics, Associate Professor of the Information Security Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Истомин Юрий Николаевич / Yuriy N. Istomin
к.п.н., доцент кафедры технологического и профессионального образования / Ph.D. in Pedagogical sciences, Associate Professor of Technological and Professional Education Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Макаров Павел Андреевич / Pavel A. Makarov
к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник / Ph.D. in Physics and Mathematics, senior researcher
Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics, Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS
167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oplesnin str., 4

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 06.02.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 10.02.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 01.03.2023

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Научная статья
УДК 378.4
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА КАК ЗАВЕРШЕНИЕ КУРСА АЛГЕБРЫ И ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Елена Юрьевна Яшина
Российский государственный педагогический университет
им. А. И. Герцена, elyashina@mail.ru

Аннотация. В статье приведено оригинальное доказательство теоремы Фробениуса о конечномерных алгебрах с делением над полем вещественных чисел. Теорема показывает невозможность расширения понятия числа, поэтому ее доказательство полезно для формирования профессиональных компетенций будущих учителей математики.

Ключевые слова: линия числа, вещественные числа, конечномерная алгебра с делением, теорема Фробениуса

Для цитирования: Яшина Е. Ю. Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 69–82. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

© Яшина Е. Ю., 2023.

Article

Proof of Frobenius' Theorem as Completion of Algebra and Numerical Systems Course at Pedagogical University

Elena Yu. Yashina
The Herzen State Pedagogical University of Russia, elyashina@mail.ru

Abstract. The article presents an original proof of Frobenius' theorem on finite-dimensional division algebras over a field of real numbers. The theorem shows the impossibility of extension of the concept of number, so its proof is useful for the formation of professional competencies of future mathematics teachers.
Keywords: number line, real numbers, finite-dimensional division algebra, Frobenius' theorem

For citation: Yashina E. Yu. Proof of Frobenius' Theorem as Completion of Algebra and Numerical Systems Course at Pedagogical University. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 69–82. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

Понятие числа является одним из основных в школьном курсе математики, а числовая линия – одной из фундаментальных содержательно-методических линий этого курса [1; 2]. Поэтому так важно, чтобы при подготовке будущих учителей математики введению и теоретическому обоснованию числовых систем было уделено особое внимание. Обычно это делается как в курсе алгебры, так и более строго в курсе числовых систем. Порядок изучения чисел в вузе практически такой же, как и в школе, – натуральные числа (обычно аксиоматика Пеано), кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле вещественных чисел, поле комплексных чисел:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

В школе возможен разный порядок изучения рациональных и целых чисел, свойства сложения и умножения формулируются без доказательства, действительные (вещественные) числа (как правило) вводятся как бесконечные десятичные дроби. Мы изучали вопрос изучения школьниками чисел, их свойств в различных учебниках, но не предполагали

останавливаться на этом здесь. На наш взгляд, это достаточно подробно сделано в работе [2]. В вузе помимо аккуратного построения каждой числовой системы мы должны показать возможности каждой следующей системы по отношению к предыдущей [1]. В частности – в множестве натуральных чисел мы имеем возможность только выполнять сложение и умножение, множество целых чисел уже коммутативное кольцо с единицей, то есть в нем определено вычитание. Рациональные числа – поле, то есть множество замкнуто относительно четырех арифметических операций (с ограничением для деления на ноль), но не для каждого рационального числа, даже положительного, определено значение корня n-й степени. Множество вещественных чисел также образует поле и в нем появляется возможность из каждого неотрицательного числа извлечь корень n-й степени. В поле комплексных чисел корень n-й степени можно извлечь из любого числа. Но в комплексных числах теряется возможность сравнивать числа по величине.

И тогда естественным образом возникает вопрос: а возможно ли дальнейшее расширение понятия числа, то есть существуют ли множества, содержащие комплексные числа и имеющие более богатый набор свойств по отношению к ним? Оказывается нет, если будем вкладывать множество комплексных чисел в большее множество (например, кватернионы), то некоторые свойства (коммутативность умножения) будут потеряны, и дальше вкладывать без потери свойств невозможно, что и утверждает теорема Фробениуса. Доказательство этой теоремы есть, например, в [3], но оно далеко выходит за рамки курса математики педагогического вуза. В настоящей статье предложено оригинальное доказательство теоремы Фробениуса, которое опирается только на материал базового курса алгебры педагогического вуза. Идея доказательства принадлежит доценту кафедры алгебры ЛГПИ им. Герцена Анне Яковлевне Айзенштат, которая работала в вузе в 60–80-х гг. прошлого века. Нами доказательство несколько переработано, уменьшено количество лемм и приведено в соответствие с современным курсом алгебры вуза.

Предварительно введем несколько определений.

Определение. Пусть K – поле; Λ – множество, рассматриваемое вместе с введенными на нем операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля K. Λ называется *алгеброй* над K, если

1) $(\Lambda, +, \cdot)$ – кольцо;

2) Λ – линейное пространство над K;

3) $\forall\, \alpha \in K\ \forall\, a, b \in \Lambda\ \ \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Замечание. Размерность алгебры – это размерность ее линейного пространства. Соответственно, если существует конечный базис алгебры Λ над полем K, то алгебра называется *конечномерной.*

Подалгебра – это подпространство и подкольцо. Соответственно, подмножество Λ' алгебры Λ является подалгеброй тогда и только тогда, когда выполнено

$$\forall\, \alpha \in K\ \forall\, a, b \in \Lambda'\ \ a \pm b \in \Lambda',\ ab \in \Lambda',\ \alpha a \in \Lambda'.$$

Определение. Пусть Λ_1, Λ_2 – алгебры над полем K. Отображение $\phi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ называется *изоморфизмом алгебр*, если ϕ – биекция, и выполнено

$$\forall\, \alpha \in K\ \forall\, a, b \in \Lambda\ \phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b),\ \phi(ab) = \phi(a)\phi(b),\ \phi(\alpha a) = \alpha\phi(a).$$

То есть ϕ – изоморфизм колец и линейных пространств. В этом случае алгебры Λ_1, Λ_2 называют *изоморфными.*

Определение. Если Λ – коммутативное кольцо, то алгебра Λ называется *коммутативной.* Если Λ – кольцо с единицей, то говорят, что Λ – *алгебра с единицей.* Единицу алгебры будем обозначать e (чтобы не путать с единицей поля $1 \in K$). Ноль алгебры будем обозначать $\mathbf{0}$ (чтобы не путать с нулем поля $0 \in K$).

Если $\Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ – группа относительно умножения, то есть

$$\forall\, a \in \Lambda\ a \neq \mathbf{0}\ \exists\, a^{-1} \in \Lambda\ aa^{-1} = a^{-1}a = e,$$

то Λ называется *алгеброй с делением.*

Примеры алгебр.

1. Пусть K – произвольное поле. $M_n(K)$ – множество квадратных матриц над полем K образует алгебру относительно сложения, умножения матриц и умножения матриц на элементы поля K. При $n > 1$ эта алгебра некоммутативна, с единицей (единичная матрица), не является алгеброй с делением, $dim_K M_n = n^2$.

2. Пусть K – произвольное поле. $K[x]$ – множество многочленов над полем K относительно сложения, умножения многочленов и умножения многочленов на элементы поля K образует алгебру. Эта алгебра коммутативна, с единицей, не является алгеброй с делением и не имеет конечной размерности над K.

3. Пусть $K = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Тогда $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ – конечномерные алгебры с делением над полем $\mathbb{R}$ (здесь $\mathbb{H}$ – тело кватернионов). Причем $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{H} = 4$.

Свойство алгебры с делением.

Пусть Λ – алгебра над полем K, e – единица алгебры, и для некоторого $\alpha \in K$ имеет место $\alpha e = \mathbf{0}$. Тогда $\alpha = 0$.

Действительно, пусть $\alpha \neq 0$, тогда существует $\alpha^{-1} \in K$. Имеем

$$e = 1e = (\alpha^{-1}\alpha)e = \alpha^{-1}(\alpha e) = \alpha^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Откуда получаем $\Lambda = \{\mathbf{0}\}$, что противоречит определению алгебры с делением.

Теорема Фробениуса. Всякая конечномерная алгебра с делением над полем вещественных чисел изоморфна либо алгебре вещественных чисел ($\mathbb{R}$), либо алгебре комплексных чисел ($\mathbb{C}$), либо алгебре кватернионов ($\mathbb{H}$).

Лемма 1. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$. Тогда в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{R}}$, изоморфная алгебре $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть e – единица алгебры Λ. Рассмотрим множество

$$\overline{\mathbb{R}} = \{\alpha e \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Нетрудно проверить по определению, что $\overline{\mathbb{R}}$ – подалгебра Λ.

Покажем, что $\overline{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$, для чего рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, такое, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \ \phi(\alpha) = \alpha e$. Нетрудно проверить, что ϕ удовлетворяет всем условиям определения изоморфизма.

Лемма 2. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}$. Тогда для любого элемента $a \in \Lambda$, $a \notin \overline{\mathbb{R}}$ существует элемент $t \in \Lambda$, $t \notin \overline{\mathbb{R}}$, такой, что $t^2 = -e$ и a линейно выражается через e, t.

Доказательство. Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = n$. Рассмотрим элементы $e, a, a^2, \ldots, a^n \in \Lambda$. Так как их количество превосходит количество эле-

ментов в базисе, то они линейно зависимы, то есть

$$\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \;\; \alpha_0 a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \ldots + \alpha_n e = \mathbf{0},$$

причем существует $\alpha_i \neq 0$.

Данное равенство означает, что элемент $a \in \Lambda$ является корнем ненулевого многочлена $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$ над полем $\mathbb{R}$. Разложим $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$, где s – наименьший номер, такой, что $\alpha_s \neq 0$:

$$f(x) = \alpha_s (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_k)(x^2 + \rho_1 x + \delta_1) \ldots (x^2 + \rho_m x + \delta_m),$$

где $\rho_i^2 - 4\delta_i < 0$.

Так как $f(a) = \mathbf{0}$, то один из многочленов в разложении $f(x)$ должен обратиться в $\mathbf{0}$ при $x = a$ (алгебра с делением не содержит делителей нуля). Предположим, что при $x = a$ обращается в $\mathbf{0}$ многочлен первой степени, то есть $a - \beta_i e = \mathbf{0}$. Это означает, что $a = \beta_i e \in \overline{\mathbb{R}}$, что противоречит условию леммы. Значит, в $\mathbf{0}$ обращается многочлен второй степени, то есть

$$\exists\, \rho, \delta \in \mathbb{R} \;\; a^2 + \rho a + \delta e = \mathbf{0}, \;\; \rho^2 - 4\delta < 0.$$

Далее

$$(a + \frac{\rho}{2} e)^2 = \frac{\rho^2}{4} e - \delta e = \frac{\rho^2 - 4\delta}{4} e,$$

так как $a^2 + \rho a = -\delta e$.

Обозначим $\frac{\rho^2 - 4\delta}{4} = -\gamma^2 \in \mathbb{R}$.

Домножим обе части равенства на $\frac{1}{\gamma^2}$: $(\frac{1}{\gamma} a + \frac{\rho}{2\gamma} e)^2 = -e$.

Обозначим $\frac{1}{\gamma} a + \frac{\rho}{2\gamma} e = t$, т. е. $t^2 = -e$, также $a = \gamma t - \frac{\rho}{2} e$, то есть a линейно выражается через e, t.

Покажем, что $t \notin \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $t = \beta e$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\frac{1}{\gamma} a + \frac{\rho}{2\gamma} e = \beta e$, значит, $a = (\gamma\beta - \frac{\rho}{2}) e \in \overline{\mathbb{R}}$, что противоречит условию Леммы.

Лемма доказана.

Следствие. Для всякого элемента a конечномерной алгебры с делением Λ над полем $\mathbb{R}$, такого, что $a \notin \overline{\mathbb{R}}$, существует многочлен $x^2 + \rho x + \delta$, $\rho, \delta \in \mathbb{R}$, $\rho^2 - 4\delta < 0$, для которого имеет место $a^2 + \rho a + \delta e = \mathbf{0}$.

Лемма 3. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}$. Тогда в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{C}}$, изоморфная алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть e – единица алгебры Λ. Зафиксируем элемент $t \in \Lambda$ $t^2 = -e$ (такой элемент существует по Лемме 2). Рассмотрим множество

$$\overline{\mathbb{C}} = \{\alpha e + \beta t \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Нетрудно проверить по определению, что $\overline{\mathbb{C}}$ – подалгебра Λ.

Покажем, что $\overline{\mathbb{C}}$ изоморфна $\mathbb{C}$, для чего рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, такое, что $\forall\, z \in \mathbb{C}$ $z = \alpha + \beta i$ $\phi(z) = \alpha e + \beta t$. Нетрудно проверить, что ϕ удовлетворяет всем условиям определения изоморфизма.

Лемма 4. Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{C}}$, то есть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда существуют такие элементы $i, j \in \Lambda$, что

1) $i, j \notin \overline{\mathbb{R}}$, $i^2 = -e, j^2 = -e, i \neq \pm j$;

2) e, i, j линейно независимы;

3) $ij + ji = \mu e$, $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| < 2$.

Доказательство. 1) Так как $\Lambda \neq \overline{\mathbb{R}}$, то по Лемме 2

$$\forall\, a \in \Lambda \; a \notin \overline{\mathbb{R}} \; \exists\, i \in \Lambda \; i \notin \overline{\mathbb{R}} \;\; i^2 = -e.$$

Пусть никакого другого элемента, отличного от $\pm i$, который в квадрате дает $-e$, в алгебре Λ нет. Тогда по Лемме 2 любой элемент из Λ линейно выражается через e, i, откуда следует, что $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 2$. Получили противоречие с условием. Значит, найдется элемент $j \notin \overline{\mathbb{R}}$, $j^2 = -e, i \neq \pm j$.

2) Пусть

$$\alpha e + \beta i + \gamma j = \mathbf{0}, \;\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\alpha e + \beta i = -\gamma j$. Возведем в квадрат, получим:

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)e = -2\alpha\beta i.$$

Еще раз возведем в квадрат:

$$((\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2)e = \mathbf{0}.$$

По свойству алгебры с делением

$$(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = 0,$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \alpha\beta = 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha^2 + \gamma^2 = 0, \end{cases}$$

а значит, имеем $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Второй случай:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta^2 + \gamma^2 = 0, \end{cases}$$

то есть $\gamma = \pm\beta$. Подставим в исходное равенство: $\beta i \pm \beta j = \mathbf{0}$. Если $\beta = \gamma = 0$, получаем требуемое, если же $\beta \neq 0$, получаем $i = \pm j$, что противоречит доказанному п. 1).

3) Элементы $i+j$, $i-j$ не принадлежат $\overline{\mathbb{R}}$ (в противном случае e, i, j были бы линейно зависимы). Тогда по следствию из Леммы 2 найдутся многочлены

$$f(x) = x^2 + \rho_1 x + \delta_1,\ g(x) = x^2 + \rho_2 x + \delta_2,\ \rho_i^2 - 4\delta_i < 0,$$

такие, что $f(i+j) = \mathbf{0}, g(i-j) = \mathbf{0}$. Это значит

$$\begin{cases} (i+j)^2 + \rho_1(i+j) + \delta_1 e = \mathbf{0} \\ (i-j)^2 + \rho_2(i-j) + \delta_2 e = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{cases} -2e + ij + ji + \rho_1 i + \rho_1 j + \delta_1 e = \mathbf{0} \\ -2e - ij - ji + \rho_2 i - \rho_2 j + \delta_2 e = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Сложим получившиеся равенства:

$$(\delta_1 + \delta_2 - 4)e + (\rho_1 + \rho_2)i + (\rho_1 - \rho_2)j = \mathbf{0},$$

откуда ввиду линейной независимости e, i, j получаем:

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 - 4 = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 = 0. \end{cases}$$

Из последних двух равенств $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Тогда $ij + ji = (2 - \delta_1)e$. Обозначим $\mu = 2 - \delta_1$ и покажем, что $|\mu| < 2$, значит, нужно показать, что $-2 < 2 - \delta_1 < 2$, то есть $0 < \delta_1 < 4$.

Имеем $\rho_1^2 - 4\delta_1 < 0$, $\rho_2^2 - 4\delta_2 < 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$, $\delta_1 + \delta_2 = 4$, следовательно, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, откуда и получаем требуемое.

Лемма доказана.

Лемма 5 (Малая Теорема Фробениуса). Пусть Λ – конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$. Если Λ коммутативна, то Λ изоморфна либо алгебре вещественных чисел ($\mathbb{R}$), либо алгебре комплексных чисел ($\mathbb{C}$).

Доказательство. Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 1$. Тогда по Лемме 1 существует подалгебра $\overline{\mathbb{R}} \subset \Lambda$, такая, что $\overline{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Так как $dim_{\mathbb{R}}\overline{\mathbb{R}} = 1$, то $\Lambda = \overline{\mathbb{R}}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 2$. Тогда по Лемме 3 существует подалгебра $\overline{\mathbb{C}} \subset \Lambda$, такая, что $\overline{\mathbb{C}}$ изоморфна $\mathbb{C}$. Так как $dim_{\mathbb{R}}\overline{\mathbb{R}} = 2$, то $\Lambda = \overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. По Лемме 4

$$\exists\, i, j \in \Lambda \; i^2 = -e,\; j^2 = -e,\; ij + ji = \mu e,\; |\mu| < 2.$$

Так как Λ коммутативна, то $2ij = \mu e$, возводя в квадрат, получим $4e = \mu^2 e$, то есть $|\mu| = 2$, что противоречит условию.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть Λ – некоммутативная конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, то есть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда существуют элементы $\overline{i}, \overline{j} \in \Lambda$, такие, что

1) $\overline{i}^2 = -e$, $\overline{j}^2 = -e$, $\overline{i} \neq \pm\overline{j}$,

2) $\overline{ij} + \overline{ji} = \mathbf{0}$,

3) $e, \overline{i}, \overline{j}, \overline{ij}$ линейно независимы.

Доказательство. По Лемме 4

$$\exists\, i, j \in \Lambda \; i^2 = -e,\; j^2 = -e,\; ij + ji = \mu e,\; |\mu| < 2.$$

Пусть $\bar{i} = i$, $\bar{j} = \alpha i + \beta j$. Будем искать $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, чтобы выполнялись 1), 2) условия Леммы. Тогда по условию 1) должно выполняться

$$\bar{j}^2 = (\alpha i + \beta j)^2 = (-\alpha^2 - \beta^2)e + \alpha\beta(\overline{ij} + \overline{ji}) = (-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta\mu)e = -e,$$

что равносильно $-\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta\mu = -1$.

По 2) условию Леммы должно выполняться:

$$i(\alpha i + \beta j) + (\alpha i + \beta j)i = \mathbf{0},$$

$$-2\alpha e + \beta \underbrace{(ij + ji)}_{\mu e} = \mathbf{0}.$$

Что равносильно $\beta\mu - 2\alpha = 0$. Таким образом, $\bar{i}$, $\bar{j}$, удовлетворяющие 1) и 2) условиям Леммы существуют, если в поле $\mathbb{R}$ разрешима следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \beta\mu - 2\alpha = 0 \\ -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta\mu = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения $\alpha = \frac{\beta\mu}{2}$. Подставляем во второе:

$$\beta^2 - \frac{\beta^2\mu^2}{4} = 1,\; \beta^2(1 - \frac{\mu^2}{4}) = 1,\; \beta = \pm\frac{2}{\sqrt{4 - \mu^2}}.$$

Так как $|\mu| < 2$, то корень определен в $\mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

Проверим 3) условие Леммы. Нетрудно показать, что элементы $e, \bar{i}, \bar{j}$ линейно независимы. Пусть

$$\lambda_1 e + \lambda_2\bar{i} + \lambda_3\bar{j} + \lambda_4\overline{ij} = \mathbf{0},\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R},$$

и предположим, что существует $\lambda_k \neq 0$. Тогда, по крайней мере, $\lambda_4 \neq 0$, иначе получим противоречие с линейной независимостью e, i, j. Тогда можем выразить $\overline{ij}$:

$$\overline{ij} = \eta e + \xi\bar{i} + \chi\bar{j}. \tag{1}$$

Домножим равенство (1) на $\overline{j}$ справа:

$$-\overline{i} = \eta\overline{j} + \xi\overline{ij} - \chi. \tag{2}$$

Подставим выражение $\overline{ij}$ из (1) в (2):

$$\underbrace{(\xi^2+1)}_{\neq 0}\overline{i} + (\xi\eta - \chi)e + (\xi\chi + \eta)\overline{j} = \mathbf{0},$$

что противоречит линейной независимости $e, \overline{i}, \overline{j}$.

Лемма доказана.

Следствие. $(\overline{ij})^2 = -e$.

Действительно, $(\overline{ij})^2 = \overline{ijij} = \overline{ij}(-\overline{ji}) = -(-e)(-e) = -e$.

Лемма 7. Пусть Λ – некоммутативная конечномерная алгебра с делением над полем $\mathbb{R}$, то есть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{H}}$, изоморфная алгебре кватернионов $\mathbb{H}$.

Доказательство. По Лемме 6

$$\exists\, \overline{i},\, \overline{j},\, \overline{ij} \in \Lambda\ \overline{i}^2 = -e,\, \overline{j}^2 = -e,\, (\overline{ij})^2 = -e.$$

Рассмотрим множество

$$\overline{\mathbb{H}} = \{\alpha e + \beta\overline{i} + \gamma\overline{j} + \delta\overline{ij} \,|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \subset \Lambda.$$

Нетрудно проверить по определению, что $\overline{\mathbb{H}}$ – подалгебра Λ. Покажем, что $\overline{\mathbb{H}}$ изоморфна $\mathbb{H}$, для чего рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{H} \to \overline{\mathbb{H}}$, такое, что

$$\forall\ h \in \mathbb{H}\ \ h = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k\ \ \ \phi(h) = \alpha e + \beta\overline{i} + \gamma\overline{j} + \delta\overline{ij}.$$

Нетрудно проверить, что ϕ удовлетворяет всем условиям определения изоморфизма.

Доказательство теоремы Фробениуса.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 1$. Тогда по Лемме 5 алгебра Λ изоморфна $\mathbb{R}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda = 2$. Тогда по Лемме 5 алгебра Λ изоморфна $\mathbb{C}$.

Пусть $dim_{\mathbb{R}}\Lambda > 2$. Тогда по Лемме 7 в Λ существует подалгебра $\overline{\mathbb{H}}$, изоморфная алгебре кватернионов $\mathbb{H}$. Покажем, что $\Lambda = \overline{\mathbb{H}}$. То есть осталось показать, что $\Lambda \subset \overline{\mathbb{H}}$.

Рассмотрим произвольный элемент $a \in \Lambda$. По Лемме 2 существует $t \in \Lambda$, что $t^2 = -e$ и a линейно выражается через e, t. Рассмотрим несколько случаев:

Первый случай: $t = \bar{i}$. Тогда a линейно выражается через $e, \bar{i}$, то есть $a \in \overline{\mathbb{H}}$ (аналогично для случаев $t = \bar{j}$, $t = \overline{ij}$).

Второй случай: $t \neq \bar{i}$, $t \neq \bar{j}$, $t \neq \overline{ij}$. Тогда по Лемме 4 для некоторых $\tau, \mu, \zeta \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\bar{i}t + t\bar{i} = \tau e, \ \ |\tau| < 2; \tag{4}$$

$$\bar{j}t + t\bar{j} = \mu e, \ \ |\mu| < 2; \tag{5}$$

$$\overline{ij}t + t\overline{ij} = \zeta e, \ \ |\zeta| < 2. \tag{6}$$

Умножим равенство (4) на $\bar{i}$ слева, равенство (5) на $\bar{j}$ слева, равенство (6) на $\bar{i}$ слева, на $\bar{j}$ справа и сложим полученные результаты:

$$-t + \bar{i}t\bar{i} - t + \bar{j}t\bar{j} - \bar{j}t\bar{j} - \bar{i}t\bar{i} = \tau\bar{i} + \mu\bar{j} + \zeta\overline{ij},$$

то есть $-2t = \tau\bar{i} + \mu\bar{j} + \zeta\overline{ij}$, значит, t линейно выражается через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\overline{ij}$. Следовательно, a линейно выражается через e, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\overline{ij}$. Таким образом, $a \in \overline{\mathbb{H}}$.

Теорема доказана.

Отметим, что уже в Лемме 5 было доказано, что $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ – единственные коммутативные алгебры с делением над $\mathbb{R}$, то есть без потери свойств расширить понятие числа мы не можем.

Основная техника доказательства – основы теории линейных пространств, неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$, изоморфизмы алгебр (то есть колец и линейных пространств) – материал, известный из базового курса алгебры.

Значимость же самой теоремы Фробениуса для формирования общепрофессиональных компетенций будущего учителя математики трудно переоценить. Безусловно, учитель, конструируя процесс изучения линии числа в курсе школьной математики, должен понимать строение числовых систем. Представление же о том, каким образом происходит расширение числовых систем и владение обоснованием конечности цепочки таких расширений, придает предметным знаниям учителя свойство целостности. Именно это обеспечивает теорема Фробениуса.

Список источников

1. **Жмурова И. Ю.** Изучение числовых систем в педагогическом вузе в контексте реализации интеграционных связей // *Международный научно-исследовательский журнал.* 2020. № 8-3 (98) С. 28–31.

2. **Пантелеймонова А. В., Белова М. А.** Развитие понятия числа в школьном курсе математики // *Continuum. Математика. Информатика. Образование.* 2019. № 4 (16). С. 31–37.

3. **Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.** Конечномерные алгебры. Киев: Вища школа, 1980. 192 с.

References

1. **Zhmurova I. Yu.** The study of Numerical Systems in a Pedagogical University in the context implementing links. *Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal* [International Research Journal]. 2020, no 8-3 (98), pp. 28–31. (In Russ.) https://doi.org/10.23670/IRJ.2020.98.8.073

2. **Panteleymonova A. V., Belova M. A.** Development of the concept of number in the school mathematics course. *Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovaniye* [Continuum. Mathematics. Computer science. Education]. 2019, no 4 (16), pp. 31–37. (In Russ.)

3. **Drozd Yu. A., Kirichenko V. V.** *Konechnomernye algebry* [Finite-dimensional algebras]. Kiev: Visha shkola, 1980. 192 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Яшина Елена Юрьевна / Elena Yu. Yashina
к.ф.-м.н., доцент / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена / The Herzen State Pedagogical University of Russia
191186, Россия, г. Санкт-Петербург, набережная реки Мойки, 48 / 191186, Russia, Saint Petersburg, Moika River embankment, 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 20.06.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 30.06.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 03.07.2023

ХРОНИКА УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ЖИЗНИ

CHRONICLE OF UNIVERSITY LIFE

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 2 (47)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 2 (47)

Информационные материалы

УДК 378
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_83

О РАБОТЕ НАУЧНО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО ПРОБЛЕМАМ ОБРАЗОВАНИЯ И МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Евгения Андреевна Канева
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина, kaneva.zhenya@mail.ru

Аннотация. В современном обществе от специалистов различных профилей требуются, в частности, развитое логическое мышление, способность к быстрой адаптации в изменяющихся социально-экономических условиях и поиску нетривиальных решений в проблемных ситуациях, умение работать в команде. В связи с этим при подготовке выпускников высших учебных заведений педагоги-предметники должны не только обращать особое внимание на качество преподаваемых фундаментальных дисциплин, необходимых студентам для успешного выполнения задач в будущей профессиональной деятельности, но и стимулировать обучающихся к участию в исследовательской и научной работе. В свою очередь, это возможно лишь в том случае, если преподаватели сами активно занимаются научной деятельностью, заинтересованы в получении значимых результатов при исследовании различных проблем, а структурные подразделения вузов создают для них все необходимые условия.

© Канева Е. А., 2023.

В статье приведена за 2022–2023 учебный год краткая хронология работы научно-методологического семинара по проблемам образования и методике обучения математике, организованного при кафедре физико-математического и информационного образования Сыктывкарского государственного университета им. Питирима Сорокина под руководством доктора педагогических наук Н. И. Попова.

Ключевые слова: научно-методологический семинар, исследовательская деятельность, педагогическое наставничество, студенческая наука

Для цитирования: Канева Е. А. О работе научно-методологического семинара по проблемам образования и методике обучения математике // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 2 (47). С. 83–92. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_83

Information materials

About the work of the scientific and methodological seminar on the problems of education and the methodology of teaching mathematics

Evgenija A. Kaneva
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, kaneva.zhenya@mail.ru

Abstract. In modern society, specialists of various profiles are required, in particular, to have developed logical thinking, the ability to quickly adapt to changing socio-economic conditions and search for non-trivial solutions in problem situations, and the ability to work in a team. In this regard, when preparing graduates of higher educational institutions, subject teachers should pay special attention not only to the quality of the taught fundamental disciplines that students need to successfully complete tasks in their future professional activities, but also to encourage students to participate in research and scientific work. In turn, this is possible only if the teachers themselves are actively engaged in scientific activities, are interested in obtaining significant results in the study of various problems, and the structural divisions of universities create all the necessary conditions for them.

The article provides for the 2022–2023 academic year a brief chronology of the work of the scientific and methodological

seminar on the problems of education and methods of teaching mathematics, organized at the Department of Physics, Mathematics and Information Education of the Syktyvkar State University. Pitirim Sorokin under the guidance of Doctor of Pedagogical Sciences N. I. Popov.

Keywords: scientific and methodological seminar, research activity, pedagogical mentoring, student science

For citation: Kaneva E. A. About the work of the scientific and methodological seminar on the problems of education and the methodology of teaching mathematics. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 2 (47), pp. 83–92. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_83

Большую роль в качественной подготовке выпускников вуза выполняют профессорско-преподавательские составы выпускающих кафедр, стимулирующие студентов к активному участию в научно-исследовательской работе.

На кафедре физико-математического и информационного образования (ФМиИО) СГУ им. Питирима Сорокина с сентября 2017 г. под руководством д.пед.н., к.ф.-м.н. Н. И. Попова активно функционирует ежемесячный научно-методологический семинар. Он проходит с участием студентов, преподавателей, аспирантов кафедры, также своим профессиональным опытом делятся коллеги других кафедр университета и вузов, гостями семинара были ученые из Москвы, Кирова, Йошкар-Олы, Ухты. Отметим, что в настоящее время преподаватели кафедры ФМиИО, в частности, развивают некоторые направления исследований семинара, организованного в Коми государственном педагогическом институте под руководством профессора В. Н. Алексюка. Далее приведем краткую хронологию работы научно-методологического семинара с сентября 2022 по апрель 2023 г.

29 сентября 2022 г. на семинаре было обсуждение научного доклада «Использование элементов корреляционного анализа в образовательном процессе вуза», в котором была затронута проблема применения элементов корреляционного анализа при исследовании качества обучения будущих учителей математики и информатики [1].

21 октября 2022 г. старший преподаватель кафедры Е. В. Яковлева выполнила доклад «Использование когнитивно-визуального подхода

Руководитель семинара Н. И. Попов

Участники научно-методологического семинара (2022 г.)

и метода схематизации при обучении математике студентов вуза». Результаты исследований автора были опубликованы в статьях [2; 3].

24 ноября 2022 г. с докладом на тему «О математических исследованиях на физико-математическом факультете КГПИ в 1973–2013 годах» выступил к.ф.-м.н., доцент В. А. Попов в рамках мероприятий, посвященных юбилеям учреждений высшего профессионального образования в Республике Коми – 90-летию КГПИ и 50-летию СГУ им. Питирима Сорокина. Были отмечены яркие математические исследования ученых и полученные научные результаты, организован исторический онлайн-экскурс.

22 декабря 2022 г. магистр второго года обучения ИТНИТ СГУ Э. С. Болотин выступил с докладом «О реализации межпредметных связей математики и информатики при решении исследовательских математических задач». Результаты исследований молодого ученого опубликованы в статье [4]. На этом же заседании семинара с кратким докладом об итогах научно-исследовательской деятельности кафедры выступил её заведующий, д.п.н. Н. И. Попов. Особым достижением кафедры в 2022 г. стала защита в РГПУ им. А. И. Герцена кандидатской диссертации старшего преподавателя Е. Н. Шустовой «Обучение аксиоматическому методу введения элементарных функций в вузе как компонент системы формирования методической компетентности будущих учителей математики» [5], выполненной под руководством Н. И. Попова.

16 февраля 2023 г. в рамках XXX Юбилейной годичной сессии Ученого совета СГУ им. Питирима Сорокина семинар стал площадкой для выступления шести участников с докладами по различным проблемам обучения математике и информатике [6–10].

30 марта 2023 г. с докладом «Об авторском методическом пособии «Руководство к решению задач по основам теории вероятностей для учителей математики» выступила учитель математики высшей категории ГАОУ РК «Лицей для одаренных детей» г. Сыктывкара Г. Ю. Боброва. Педагог-предметник поделилась своими изысканиями по составлению авторских вероятностных задач [11].

27 апреля 2023 г. старший преподаватель кафедры Е. В. Яковлева выступила с докладом по кандидатской диссертации «Реализация когнитивно-визуального подхода и метода схематизации при обучении математике студентов медицинских специальностей вуза», исследования проводятся под руководством Н. И. Попова. Некоторые результаты работы, в частности, опубликованы в статьях [2; 3].

Помимо руководства научно-методологическим семинаром Н. И. Попов еженедельно возглавляет работу студенческого семинара с участием магистров – будущих учителей математики и информатики. Благодаря активной научной и педагогической деятельности преподавателя-наставника студенты стали победителями и призерами региональных, международных конкурсов и конференций, получили стипендии Правительства Республики Коми, повышенные стипендии по учебной и научной деятельности.

На семинаре всегда царит доброжелательная атмосфера, позволяющая студентам, аспирантам и преподавателям обсудить различные идеи и получить ответы на интересующие вопросы, представить полученные научные и методические результаты, осветить проблемы, посвященные разным областям информатики, математики, физики и методики обучения данным дисциплинам. Кроме того, имеется возможность получить предложенные коллегами важные рекомендации для повышения качества и эффективности образовательного процесса студентов в вузе. Результаты исследований докладчиков, получившие одобрительные отзывы при обсуждении на научно-методологическом семинаре, рекомендуются впоследствии для публикаций в журналах, выступлений с докладами на научных и методических конференциях.

Список источников

1. **Попов Н. И., Канева Е. А.** Использование корреляционного анализа при исследовании качества обучения будущих учителей математики и информатики // *Гуманитарные науки и образование.* 2022. Т. 13. № 4 (52). С. 95–99.

2. **Попов Н. И., Яковлева Е. В.** Методические аспекты смешанного обучения математике студентов медицинских специальностей в вузе // *Перспективы науки и образования.* 2022. № 3 (57). С. 232–252.

3. **Яковлева Е. В.** Инновационные подходы при обучении математике будущих врачей в региональном университете // *Мир науки, культуры, образования.* 2022. № 5 (96). С. 176–181.

4. **Попов Н. И., Болотин Э. С.** Использование интегрированной среды для разработки и обучения Python IDLE при изучении сту-

дентами теории вероятностей // *Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования.* 2023. № 1 (63). С. 79–85.

5. **Шустова Е. Н.** Обучение аксиоматическому методу введения элементарных функций в вузе как компонент системы формирования методической компетентности будущих учителей математики : дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Е. Н. Шустова; [место защиты: РГПУ им. А. И. Герцена]. СПб., 2022. 275 с.

6. **Попов Н. И.** Фундаментализация университетского математического образования : монография. Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2021. 174 с.

7. **Попов Н. И., Канева Е. А.** Использование электронного курса «Школьный математический практикум» при подготовке будущих педагогов // *Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования.* 2022. № 4 (62). С. 109–118.

8. **Попов Н. И., Канева Е. А.** Формирование познавательного интереса школьников к математике с использованием компьютерных обучающих игр // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 2 (43). С. 55–66.

9. **Попов Н. И., Канева Е. А., Болотин Э. С.** Исследование специальных способностей студентов вуза при обучении математике // *Мир науки, культуры, образования.* 2022. № 1 (92). С. 110–113.

10. **Шустова Е. Н.** Особенности использования аксиоматического метода введения элементарных функций при обучении будущих учителей математики в вузе // *Образовательный вестник «Сознание».* 2022. Т. 24. № 4. С. 23–30.

11. **Попов Н. И., Боброва Г. Ю.** Методические особенности обучения основам теории вероятностей в средней школе // *Двадцать девятая годичная сессия Ученого совета Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина* [Электронный ресурс] : Февральские чтения : Национальная конференция : сборник статей / отв. ред.: О. А. Сотникова, Н. Н. Новикова. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2022. С. 473–476.

References

1. **Popov N. I., Kaneva E. A.** The use of correlation analysis in the study of the quality of education of future teachers of mathematics and computer science. *Gumanitarnye nauki i obrazovanie* [Humanities and Education]. 2022, vol. 13, no 4 (52), pp. 95–99. (In Russ.)

2. **Popov N. I., Yakovleva E. V.** Methodological aspects of blended teaching of mathematics to students of medical specialties at the university. *Perspektivy nauki i obrazovaniya* [Prospects for science and education]. 2022, no 3 (57), pp. 232–252. (In Russ.)

3. **Yakovleva E. V.** Innovative Approaches in Teaching Mathematics to Future Doctors at a Regional University. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya* [The world of science, culture, education]. 2022, no 5 (96), pp. 176–181. (In Russ.)

4. **Popov N. I., Bolotin E. S.** Using the Python IDLE Development and Training Environment for Students to Learn Probability. *Vestnik MGPU. Seriya: Informatika i informatizaciya obrazovaniya* [Bulletin MGPU. Series: Informatics and informatization of education]. 2023, no 1 (63), pp. 79–85. (In Russ.)

5. **Shustova E. N.** Obuchenie aksiomaticheskomu metodu vvedeniya elementarnyh funkcij v vuze kak komponent sistemy formirovaniya metodicheskoj kompetentnosti budushchih uchitelej matematiki: dissertaciya ... kandidata pedagogicheskih nauk: 13.00.02 [Teaching the axiomatic method of introducing elementary functions at the university as a component of the system for the formation of methodological competence of future teachers of mathematics: dissertation ... candidate of pedagogical sciences: 13.00.02]. E. N. Shustova; [Mesto zashchity: RGPU im. A. I. Gercena]. SPb, 2022. 275 p. (In Russ.)

6. **Popov N. I.** *Fundamentalizaciya universitetskogo matematicheskogo obrazovaniya : monografiya* [Fundamentalization of University Mathematical Education : Monograph]. Yelets: EGU im. I. A. Bunina, 2021. 174 p. (In Russ.)

7. **Popov N. I., Kaneva E. A.** Using the electronic course "School Mathematical Practicum"in the preparation of future teachers. *Vestnik*

MGPU. Seriya: Informatika i informatizaciya obrazovaniya [Bulletin MGPU. Series: Informatics and informatization of education]. 2022, no 4 (62), pp. 109–118. (In Russ.)

8. **Popov N. I., Kaneva E. A.** Formation of cognitive interest of schoolchildren in mathematics using computer learning games. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mehanika. Informatika* [Bulletin of the Syktyvkar University. Ser. 1: Math. Mechanics. Informatics]. 2022, no 2 (43), pp. 55–66. (In Russ.)

9. **Popov N. I., Kaneva E. A., Bolotin E. S.** Study of the special abilities of university students in teaching mathematics. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya* [The world of science, culture, education]. 2022, no 1 (92), pp. 110–113. (In Russ.)

10. **Shustova E. N.** Features of using the axiomatic method of introducing elementary functions in teaching future teachers of mathematics at the university. *Obrazovatel'nyj vestnik «Soznanie»* [Educational bulletin "Consciousness"]. 2022, vol. 24, no 4, pp. 23–30. (In Russ.)

11. **Popov N. I., Bobrova G. Yu.** Methodological features of teaching the basics of probability theory in high school. *Dvadtsat' devyataya godichnaya sessiya Uchenogo soveta Syktyvkarskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Pitirima Sorokina [Elektronnyy resurs] : Fevral'skiye chteniya : Natsional'naya konferentsiya : sbornik statey / otv. red.: O. A. Sotnikova, N. N. Novikova* [Twenty-ninth annual session of the Academic Council of Syktyvkar State University named Pitirim Sorokin [Electronic resource] : February readings : National conference : collection of articles / ed.: O. A. Sotnikova, N. N. Novikova]. Syktyvkar: Publishing House of the SSU Pitirim Sorokin, 2022, pp. 473–476. (In Russ.)

Канева Евгения Андреевна / Evgenija A. Kaneva
специалист УМЦ ИТНИТ / specialist of the UMC ITNIT
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 31.05.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 10.06.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 17.06.2023

Contents

Applied mathematics and mechanics

Yermolenko A. V., Turkova O. I. *Determination of stresses on the front surfaces of the plate* 4

Computer sciences

Melnikov V. A. *About architectural features of collisions filtering in the physics engine for 3D games* 17

Methodical materials

Odinets V. P. *On the works of five Moscow mathematicians who died during the Great Patriotic War* 29

Ustyugov V. A., Lavresh I. I., Istomin Yu. N., Makarov P. A. *The use of SDR devices in the educational process for technical specialties of universities* 56

Yashina E. Yu. *Proof of Frobenius' Theorem as Completion of Algebra and Numerical Systems Course at Pedagogical University* 69

Chronicle of the university life

Kaneva E. A. *About the work of the scientific and methodological seminar on the problems of education and the methodology of teaching mathematics* 83

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 2 (47) 2023

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет Е. Н. Старцевой
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 14.07.2023. Дата выхода в свет 28.07.2023.
Формат $70 \times 108\frac{1}{16}$.
Гарнитура Computer Modern.
Усл. печ. л. 10,8.
Тираж 32 экз. Заказ № 59.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru