.

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2023.
Выпуск 1 (46)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2023; 1 (46)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.956
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_1_4

К НОВЫМ СЛУЧАЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Елена Александровна Созонтова
Елабужский институт ФГАОУ ВО КФУ, sozontova-elena@rambler.ru

Аннотация. В работе исследована задача Гурса для системы гиперболического типа с двумя независимыми переменными. С помощью факторизации уравнений рассматриваемой системы получены новые случаи разрешимости в квадратурах поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическая система, задача Гурса, разрешимость в квадратурах

Для цитирования: Созонтова Е. А. К новым случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для одной системы гиперболического типа // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2023. Вып. 1 (46). С. 4–13. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_1_4

Article

On new cases of solvability of the Goursat problem in quadratures for one hyperbolic type system

Elena A. Sozontova
Elabuga Institute KFU, sozontova-elena@rambler.ru

Abstract. The paper investigates the Goursat problem for a hyperbolic type system with two independent variables. With the help of factorization of the equations of the system under consideration, new cases of solvability in the quadratures of the problem are obtained.

Keywords: hyperbolic system, the Goursat problem, solvability in quadratures

For citation: Sozontova E. A. On new cases of solvability of the Goursat problem in quadratures for one hyperbolic type system. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2023, no 1 (46), pp. 4–13. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_1_4

В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ рассматривается система

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y + e_1 u + f_1 v = g_1, \\ v_{xy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y + e_2 u + f_2 v = g_2, \end{cases} \tag{1}$$

гладкость коэффициентов которой определяется включениями

$$a_1,\ a_2,\ c_1,\ c_2 \in C^{(1,0)},\ b_1,\ c_1,\ c_2,\ d_2 \in C^{(0,1)},$$
$$e_1,\ e_2,\ f_1,\ f_2 \in C^{(0,0)}.$$

Задача 1. В области D найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad u(x, y_0) = \psi_1(x),$$
$$v(x_0, y) = \varphi_2(y), \quad v(x, y_0) = \psi_2(x).$$

При этом предполагается, что $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^1(\overline{X}),\ \psi_1,\ \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$ и выполняются условия согласования

$$\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0).$$

Как известно [1], решение задачи 1 существует и единственно. В работах [2], [3] изложены варианты разрешимости этой задачи в квадратурах. Целью данной работы является получение новых случаев разрешимости в квадратурах задачи 1.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

Задача 2 (вспомогательная). В области D найти регулярное решение уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{2}$$

удовлетворяющее непрерывно дифференцируемым граничным значениям

$$\begin{gathered} u(x_0, y) = \varphi(y),\ u(x, y_0) = \psi(x),\ \varphi(y_0) = \psi(x_0), \\ x \in [x_0, x_1],\ y \in [x_0, x_1]. \end{gathered} \tag{3}$$

Известно [4, с. 172; 5, с. 14], что решение задачи 2 записывается через соответствующие функции Римана, для которых известны [5, с. 15–16; 6–8] случаи их построения в явном виде. Для дальнейшего использования запишем все эти случаи в объединенном виде и сформулируем теорему. В обозначенных выше источниках условия, при которых функции Римана определяются в явном виде, представлены в терминах следующих соотношений:

$$1)\ h \equiv 0;$$

$$2)\ k \equiv 0;$$

$$3)\ 2h - (\ln h)_{xy} - k \equiv 0;$$

$$4)\ 2k - (\ln k)_{xy} - h \equiv 0;$$

$$5)\ a_x \equiv b_y,\ h \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;$$

$$6)\ b_y - a_x \equiv h \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;$$

$$7)\ a_x - b_y \equiv k \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;$$

$$8)\ h \equiv 2\mu_0(x)\tau_0(y) \neq 0,\ k \equiv 3\mu_0(x)\tau_0(y) \neq 0;$$

$$9)\ h \equiv 3\mu_1(x)\tau_1(y) \neq 0,\ k \equiv 2\mu_1(x)\tau_1(y) \neq 0;$$

$$10)\ (\ln h)_{xy} \equiv h - k,\ h \equiv 2b_y \equiv \omega_1;$$

$$11)\ (\ln k)_{xy} \equiv k - h,\ k \equiv 2a_x \equiv \omega_2;$$

$$12)\ m_0 a_x - b_y \equiv m_0 b_y - a_x \equiv (m_0 - 1)(ab - c);$$

$$13)\ h \equiv \omega_0;$$

$$14)\ k \equiv \omega_0, \tag{4}$$

где

$$h = a_x + ab - c,\ k = b_y + ab - c,$$

$$\omega_r = \frac{2s_r'(x)t_r'(y)}{(2 - m_r)[s_r(x) + t_r(y)]^2},\ [s_r(x) + t_r(y)]s_r'(x)t_r'(y) \neq 0. \tag{5}$$

Здесь $\xi_k,\ \eta_k,\ \mu_0,\ \mu_1,\ \tau_0,\ \tau_1\ \in C^1,\ s_k,\ t_k,\ m_k \in C^2$, m_k зависит только от одной из переменных (x, y) и $m_k \neq 2$ $(k = 0,\ 1,\ 2)$. В остальном обозначенные выше функции произвольны, а именно в соответствующем классе должны найтись функции, при которых выполняются условия (4). Коэффициенты $a,\ b,\ c$ имеют гладкость, которая обеспечивает возможность выполнения формул (4). Классы гладкости задаются на замкнутых множествах определения соответствующих функций.

Справедлива теорема

Теорема 1. *Пусть $h,\ k,\ \omega_r$ определяются формулами (5). Тогда построение решения задачи (2) – (3) в квадратурах обеспечивается любым из тождеств 1) – 4), а также существованием функций $\xi_r,\ \eta_r,\ \mu_r,\ \tau_r,\ m_r,\ s_r,\ t_r$, для которых имеет место любая из групп соотношений 5) – 11) или когда вместе с 12) любая из определяемых в (5) комбинаций $h,\ k$ имеет вид, указанный в 13) – 14). При этом зависящая лишь от одной из переменных (x, y) функция ω_0 удовлетворяет условию $\omega_0 \neq 0$, а $\omega_1,\ \omega_2$ – $(\omega_k + 1)(\omega_k - 2) \neq 0$.*

Перейдем теперь к решению задачи 1. Попробуем отыскать такие функции $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$, чтобы первое уравнение (1) можно было записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_1\right)(u_x + \beta_1 u + \gamma_1 v) = g_1. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что первое уравнение (1) совпадает с (6), если имеют место тождества

$$c_1 \equiv 0,\ b_{1y} + a_1 b_1 - e_1 \equiv 0,$$

$$d_{1y} + a_1 d_1 - f_1 \equiv 0, \tag{7}$$

где

$$\alpha_1 = a_1,\ \beta_1 = b_1,\ \gamma_1 = d_1. \tag{8}$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что при выполнении тождеств

$$b_2 \equiv 0,\ a_{2x} + a_2 d_2 - e_2 \equiv 0,$$
$$c_{2x} + c_2 d_2 - f_2 \equiv 0 \tag{9}$$

второе уравнение (1) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\right)(v_y + \beta_2 u + \gamma_2 v) = g_2,$$

где

$$\alpha_2 = d_2,\ \beta_2 = a_2,\ \gamma_2 = c_2. \tag{10}$$

Итак, задача 1 разбивается на три задачи

$$w_{1y} + \alpha_1 w_1 = g_1, \quad w_1(x, y_0) = \psi_{1x} + \beta_1 \psi_1 + \gamma_1 \psi_2, \tag{11}$$

$$w_{2x} + \alpha_2 w_2 = g_2, \quad w_2(x_0, y) = \varphi_{2y} + \beta_2 \varphi_1 + \gamma_2 \varphi_2, \tag{12}$$

$$\begin{cases} u_x + \beta_1 u + \gamma_1 v = w_1, \\ v_y + \beta_2 u + \gamma_2 v = w_2, \end{cases} \tag{13}$$

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad v(x, y_0) = \psi_2(x). \tag{14}$$

Задачи (11), (12), (13) – (14) необходимо решать последовательно, начиная с первой из них. Функции $w_1,\ w_2$ находятся с помощью интегрирования уравнений из (11), (12), при этом в случае задачи (11) в качестве параметра выступает x, а в случае (12) – y.

Известно [9], что задача (13) – (14) является однозначно разрешимой. Для нахождения условий разрешимости этой задачи в квадратурах воспользуемся возможностью редукции системы (13) к двум уравнениям вида

$$\Theta_{xy} + a\Theta_x + b\Theta_y + c\Theta = f. \tag{15}$$

А именно при выполнении условия

$$\gamma_1 \neq 0 \tag{16}$$

получаем уравнение вида (15) для $\Theta = u$, коэффициенты которого определяются формулами

$$a = \gamma_2 - (\ln \gamma_1)_y,\ b = \beta_1,\ c = \beta_{1y} - \beta_1(\ln \gamma_1)_y - \gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_1. \tag{17}$$

При

$$\beta_2 \neq 0 \tag{18}$$

получаем уравнение вида (15) для $\Theta = v$ с коэффициентами

$$a = \gamma_2,\ b = \beta_1 - (\ln \beta_2)_x,\ c = \gamma_{2x} - \gamma_2(\ln \beta_2)_x - \beta_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2. \tag{19}$$

Решив первое уравнение, полученное при выполнении условия (16), можно найти функцию $v(x, y)$ из первого уравнения системы (13). И, наоборот, при выполнении неравенства (18), зная $v(x, y)$, функцию $u(x, y)$ можно найти из второго уравнения системы (13). Но для нахождения функций $\Theta = u$ и $\Theta = v$ из (15) условий (14) недостаточно: нужно добавить еще (см. задачу 1)

$$u(x, y_0) = \psi_1(x), \quad v(x_0, y) = \varphi_2(y) \tag{20}$$

и условия согласования

$$\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0).$$

Очевидно, что первые (вторые) соотношения в (14) и (20) являются граничными условиями первой (второй) задачи Гурса для уравнения вида (15). Таким образом, задачу 1 мы редуцировали к двум задачам Гурса для уравнения (15), которые аналогичны рассмотренной выше вспомогательной задаче 2.

В терминах коэффициентов системы (1) сотношения (16) – (19) запишутся в виде

$$d_1 \neq 0, \tag{21}$$

$$a = c_2 - (\ln d_1)_y,\ b = b_1,\ c = b_{1y} - b_1(\ln d_1)_y - d_1a_2 + c_2b_1, \tag{22}$$

$$a_2 \neq 0, \tag{23}$$

$$a = c_2,\ b = b_1 - (\ln a_2)_x,\ c = c_{2x} - c_2(\ln a_2)_x - a_2d_1 + b_1c_2. \tag{24}$$

Тогда справедливо утверждение

Теорема 2. *Для разрешимости задачи 1 в квадратурах достаточно, чтобы выполнялись тождества (7), (9) и один из двух наборов* a, b, c, *определяемых формулами (21) – (22), (23) – (24), удовлетворял условиям теоремы 1.*

Применим теперь к системе (1) другую факторизацию. А именно уравнения из (1) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_1\right)(u_y+\beta_1 u+\gamma_1 v)=g_1,\ \left(\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_2\right)(v_x+\beta_2 u+\gamma_2 v)=g_2, \tag{25}$$

если имеют место тождества

$$\begin{aligned} &d_1\equiv 0,\ a_{1x}+b_1a_1-e_1\equiv 0,\ c_{1x}+b_1c_1-f_1\equiv 0,\\ &a_2\equiv 0,\ b_{2y}+c_2b_2-e_2\equiv 0,\ d_{2y}+c_2d_2-f_2\equiv 0, \end{aligned} \tag{26}$$

позволяющие найти

$$\alpha_1=b_1,\ \beta_1=a_1,\ \gamma_1=c_1,\ \alpha_2=c_2,\ \beta_2=b_2,\ \gamma_2=d_2.$$

Тогда задача 1 сводится к трем задачам

$$w_{1x}+\alpha_1 w_1=g_1,\quad w_1(x_0,y)=\varphi_{1y}+\beta_1\varphi_1+\gamma_1\varphi_2, \tag{27}$$

$$w_{2y}+\alpha_2 w_2=g_2,\quad w_2(x,y_0)=\psi_{2x}+\beta_2\psi_1+\gamma_2\psi_2, \tag{28}$$

$$\begin{cases} u_y+\beta_1 u+\gamma_1 v=w_1,\\ v_x+\beta_2 u+\gamma_2 v=w_2, \end{cases} \tag{29}$$

$$u(x,y_0)=\psi_1(x),\quad v(x_0,y)=\varphi_2(y). \tag{30}$$

Функции w_1, w_2 из (27), (28) определяются непосредственным интегрированием, при этом в случае задачи (27) в качестве параметра выступает y, а в случае (28) – x. Задача (29) – (30) аналогична задаче (13) – (14), однако здесь u и v меняются ролями. Учитывая это, формулы (21) – (24) примут соответственно вид

$$b_2\neq 0, \tag{31}$$

$$a = a_1 - (\ln b_2)_y,\ b = d_2,\ c = d_{2y} - d_2(\ln b_2)_y - b_2c_1 + a_1d_2, \tag{32}$$

$$c_1 \neq 0. \tag{33}$$

$$a = a_1,\ b = d_2 - (\ln c_1)_x,\ c = a_{1x} - a_1(\ln c_1)_x - c_1b_2 + d_2a_1. \tag{34}$$

Аналогом теоремы 2 является

Теорема 3. *Для разрешимости задачи 1 в квадратурах достаточно, чтобы выполнялись тождества (26) и один из двух наборов a, b, c, определяемых формулами (31) – (32), (33) – (34), удовлетворял условиям теоремы 1.*

Список источников

1. **Бицадзе А. В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

2. **Созонтова Е. А.** Об условиях разрешимости граничных задач в квадратурах для гиперболических систем второго порядка // *Уфимск. матем. журн.* 2016. Т. 8. № 3. С. 135–140.

3. **Созонтова Е. А.** К новым случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах для системы второго порядка // *Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского : материалы XVI Молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2017».* Казань, 2017. С. 140–141.

4. **Бицадзе А. В.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.

5. **Жегалов В. И., Миронов А. Н.** Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское матем. об-во, 2001. 226 с.

6. **Жегалов В. И.** К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций // *Неклассические уравнения математической физики.* Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 73–79.

7. **Жегалов В. И., Сарварова И. М.** К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // *Изв. вузов. Математика.* 2013. № 3. С. 68–73.

8. **Жегалов В. И., Созонтова Е. А.** Дополнение к случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 2. С. 270–272.

9. **Чекмарев Т. В.** Решение гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями // *Изв. вузов. Математика.* 1959. № 6. С. 220–228.

References

1. **Bicadze A. V.** *Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh* [Some classes of partial differential equations]. Moscow: Nauka, 1981, 448 p. (In Russ.)

2. **Sozontova E. A.** On solvability by quadratures conditions of boundary value problems for second order hyperbolic systems. *Ufimskij matematicheskij zhurnal* [Ufa mathematical journal], 2016, vol. 8, no 3, pp. 135–140. (In Russ.)

3. **Sozontova E. A.** On new cases of solvability of the Goursat problem in quadratures for a second-order system. *Trudy Matematicheskogo centra imeni N. I. Lobachevskogo: materialy XVI molodezhnoj nauchnoj shkoly-konferencii "Lobachevskie chteniya – 2017"* [Proceedings of the N. I. Lobachevsky: materials of the XVI Youth Scientific School-Conference "Lobachevsky Readings – 2017"], 2017, pp. 140–141. (In Russ.)

4. **Bicadze A. V.** *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1982, 336 p. (In Russ.)

5. **Zhegalov V. I., Mironov A. N.** *Differencial'nye uravneniya so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential equations with higher partial derivatives]. Kazan: Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo, 2001, 226 p. (In Russ.)

6. **Zhegalov V. I.** On solvability cases for hyperbolic equations in terms of special functions. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoi fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk: Mathematical Institute, Russian Academy of Science, Siberian Branch, 2002, pp. 73–79. (In Russ.)

7. **Zhegalov V. I., Sarvarova I. M.** Solvability of the Goursat problem in quadratures. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2013, no 3, pp. 68–73. (In Russ.)

8. **Zhegalov V. I., Sozontova E. A.** An addition to the cases of solvability of the goursat problem in quadratures. *Differencial'nye uravneniya* [Differential equations], 2017, vol. 53, no 2, pp. 270–272. (In Russ.)

9. **Chekmaryov T. V.** Solution of a hyperbolic system of two partial differential equations with two unknown functions. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1959, no 6, pp. 220–228. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Созонтова Елена Александровна / Elena A. Sozontova
к.ф.-м.н., доцент кафедры математики и прикладной информатики Елабужского института ФГАОУ ВО КФУ / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics and Applied Informatics Department of the Elabuga Institute KFU
Елабужский институт ФГАОУ ВО КФУ / Elabuga Institute KFU
423603, г. Елабуга, ул. Казанская, д.89. / 423603, Russia, Elabuga, Kazanskaja st., 89

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 21.02.2023
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 27.02.2023
Принято к публикации / Accepted for publication 01.03.2023