Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 4 (45)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 4 (45)

НАСТАВНИК – УЧЕНИК

MENTOR – STUDENT

Научная статья

УДК 517.9, 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_67

О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ И ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Ермоленко Андрей Васильевич, Дуркин Анатолий Альбертович
Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Аннотация. С использованием классической теории аналитически решена контактная задача для бесконечной цилиндрической панели и бесконечного прямоугольного бруса. По найденным численно из системы параметрам определяются прогиб и контактные реакции. Полученный результат согласуется с решением, полученным методом обобщенной реакции.

Ключевые слова: цилиндрическая панель, контактная задача, метод обобщенной реакции

Для цитирования: Ермоленко А. В., Дуркин А. А. О контактной задаче для цилиндрической панели и прямоугольного бруса // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 4 (45). С. 67–74. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_67

Article

On the contact problem for a cylindrical panel and a rectangular bar

Andrei V. Yermolenko, Anatoliy A. Durkin
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Annotation. The contact problem for an infinite cylindrical panel and an infinite rectangular beam is analytically solved using the classical theory, a system for determining the interaction zone is built. According to the parameters found numerically from the system, the deflection and contact reactions are determined. The obtained result agrees with the solution obtained by the generalized reaction method.

Keywords: cylindrical panel, contact problem, generalized reaction method

For citation: Yermolenko A. V., Durkin A. A. On the contact problem for a cylindrical panel and a rectangular bar. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 4 (45), pp. 67–74. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_67

1. Введение

Благодаря бурному росту вычислительных возможностей современных компьютеров стали особенно популярны численные методы решения задач механики пластин и оболочек. Одним из таких методов является предложенный в рамках научной школы механики оболочек В. В. Новожилова [1] метод обобщенной реакции [2].

Вместе с тем остается потребность в точных аналитических решениях, которые являются эталонными для численных решений. В статье [3] аналитически решена контактная задача для пластины над жестким основанием. Показано, что при использовании классической теории плоских пластин контактные реакции содержат сосредоточенные силы, а при использовании теории, учитывающей трансверсальные деформармации, сосредоточенные силы отсутствуют.

Цель данной статьи — получить аналитическое решение задачи о контактном взаимодействии цилиндрической панели с прямоугольным брусом, проверить результат методом обобщенной реакции.

2. Материалы и методы

Данное исследование построено на базе использования теоретического и численного методов исследования. Применение теоретического метода позволило аналитически построить систему разрешающих уравнений, после численного решения которой определяются прогиб и контактные реакции. С использованием метода обобщенной реакции строится численное решение для подтверждения правильности аналитического решения.

3. Результаты

3.1. Постановка задачи

Пусть прямоугольная пластина шириной $2l$ расположена параллельно абсолютно жесткому основанию в виде прямоугольного бруса шириной $2(l-m)$ с зазором Δ и находится под действием равномерной нормальной нагрузки $q_0 = const$ (см. рис. 1).

Предполагаем, что краями $x = 0$ и $x = 2l$ пластина шарнирно оперта, а два других ее края бесконечно удалены или загружены так, что реализуется цилиндрический изгиб, то есть после деформации пластина принимает форму цилиндрической панели, а задача становится одномерной.

Считаем, что под действием нагрузки пластина выстилается по основанию, образуя область контакта $(x_0, 2l - x_0)$. При этом допускаем, что при $x = m$ и $x = 2l - m$ возможна сосредоточенная реакция.

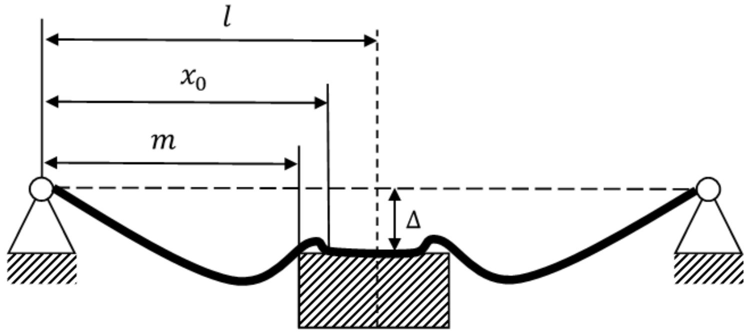

Рис. 1. Взаимодействие пластины и основания

Учитывая сделанные предположения и симметричность относительно $x = l$, краевая задача принимает вид

$$w^{IV} = q_n, x \in (0, l),$$

$$w(0) = 0, w''(0) = 0, w'(l) = 0, w'''(l) = 0, \tag{1}$$

где $q_n = q_0 - r(x)$, $r(x)$ — возникающие контактные реакции.

При этом условие контакта запишем в виде

$$w(m) = \Delta,$$

$$w(x) = \Delta, x \in (x_0, l). \tag{2}$$

3.2. Аналитическое решение

Функция Грина для краевой задачи (1) имеет вид

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6}(x - \xi)^3 H(x - \xi) + (l\xi - \frac{1}{2}\xi^2)x - \frac{1}{6}x^3, \tag{3}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда.

Подставляя выражение (2) в полевое уравнение (1) при $x \in (x_0, l)$, последовательно находим

$$q_n = 0 \Rightarrow r(x) = q_0.$$

На основе последнего выражения общая контактная реакция принимает вид

$$r(x) = Q\delta(x - m) + R\delta(x - x_0) + q_0 H(x - x_0), x \in (0, l),$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака, Q и R — сосредоточенные реакции при $x = m$ и $x = x_0$, а общая нагрузка принимает вид

$$q_n(x) = q_0 H(x_0 - x) - Q\delta(x - m) - R\delta(x - x_0), x \in (0, l). \tag{4}$$

Решение краевой задачи (1) при правой части в виде (4) с использованием функции Грина (3) можно записать так:

$$w(x) = \frac{1}{D}\int_0^l G(x, \xi) q_n(\xi) d\xi. \tag{5}$$

Далее вычисляем прогиб (5) при $x \in (x_0, l)$, подставляем в условия контакта (2), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, в итоге получаем следующую систему:

$$q_0 x_0^2 - 2Rx_0 - 2Qm = 0,$$

$$-q_0 x_0^4 + 4Rx_0^3 + 4Qm^3 = 24D\Delta,$$

$$q_0(12lx_0^2 m - 4x_0^3 m - 4x_0 m^3 + m^4) -$$

$$-R(24lx_0 m - 12x_0^2 m - 4m^3) - Q(24lm^2 - 12m^3 - 4m^3) = 24D\Delta. \quad (6)$$

Замечание. В случае $m = x_0$ получаем контактную задачу для пластины над основанием [3]. Полагая в системе (6) $m = x_0, Q = R$, получим следующую систему[1]:

$$q_0 x_0^2 - 4Rx_0 = 0,$$

$$-q_0 x_0^4 + 8Rx_0^3 = 24D\Delta,$$

которая с учетом соотношения (4) согласуется с результатом работы [3]. ■

3.3. Метод обобщенной реакции

Прогиб w и контактные реакции $r(x)$ должны удовлетворять следующему соотношению [2]:

$$r = [r + \beta(w - \Delta(x))]_+, \beta > 0. \quad (7)$$

Здесь $\phi_+ = 1/2(\phi + |\phi|)$.

Используя выражение (2), решение контактной задачи находим по следующей итерационной схеме:

$$r^{k+1}(x) = [r^k + \beta(w^k - \Delta(x))]_+, \beta > 0, \quad (8)$$

где

$$w^k(x) = \frac{1}{D}\int_0^l G(x,\xi)(q_0 - r^k(\xi))d\xi.$$

В качестве начальных условий полагаем

$$r^0(x) = 0, w^0(x) = \frac{q_0}{D}\int_0^l G(x,\xi)d\xi.$$

[1] 3-е уравнение выполняется автоматически.

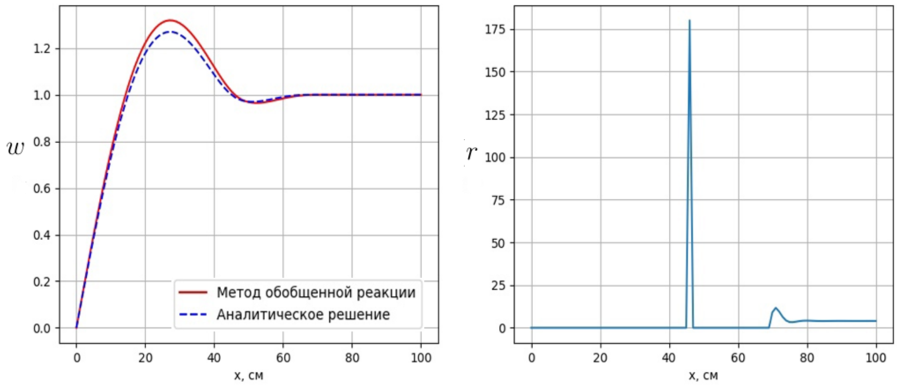

Рис. 2. Прогиб (w, см) и контактные реакции (r, кГ/см^2)

Для проведения численного эксперимента были написаны программы на языке Python [4]. На рис. 2 приведен расчет цилиндрической панели при следующих физических и геометрических параметрах:

$$l = 100 \text{ см}, \; m = 45 \text{ см}, \; \Delta = 1 \text{ см},$$
$$q_0 = 4 \text{ кГ/см}^2, \; E = 2 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \; \nu = 0,3.$$

4. Обсуждение

По результатам проведенного численного эксперимента можно сделать следующие выводы. Во-первых, полученные аналитически результаты согласуются с результатами, полученными методом обобщенной реакции. Во-вторых, гипотеза об отходе пластины от основания на участке $[m, x_0]$ подтверждается.

Список источников

1. **Михайловский Е. И.** Школа механики академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2005. 172 с.

2. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.

3. **Михайловский Е. И., Бадокин К .В., Ермоленко А. В.** Теория изгиба плоских пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 1999. Вып. 3. С. 181–202.

4. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

References

1. **Mikhailovskii E. I.** *Shkola mekhaniki akademika Novozhilova* [The Novozhilov School of Mechanics]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2005. 172 p.

2. **Mikhailovsky E.I., Tarasov V.N.** Convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary. *RAN. PMM.* [RAS. PMM]. 1993. Vol. 57. Issue 1, pp. 128–136.

3. **Michailovskii E. I., Badokin K. V., Yermolenko A. V.** The Karman type theory of flat plates without Kirchhoff's hypotheses. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 1999. No. 3, pp. 181–202.

4. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2019, 4 (33), pp. 86–95.

Сведения об авторах / Information about authors
Андрей Васильевич Ермоленко / Andrei V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Анатолий Альбертович Дуркин / Anatoliy A. Durkin
аспирант / aspirant
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 29.11.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 05.12.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 07.12.2022