Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 4 (45)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 4 (45)

Научная статья

УДК 372.851
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_52

ВЫДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРАМИ»

Зеленина Наталья Алексеевна
Вятский государственный университет, e-mail: sezel@mail.ru

Аннотация. Обеспечение высокого качества подготовки учащихся по математике неразрывно связано с обучением решению математических задач творческого характера. К таковым традиционно относят задачи с параметрами, обладающие высокой обучающей, развивающей и диагностической ценностью. В статье представлено описание методики обучения решению задач с параметрами на основе выделения опорных (ключевых) задач. Систематизация теоретического и задачного материала, выделение основных знаний и умений учащихся, описание внутрипредметных и межпредметных связей темы «Уравнение окружности в задачах с параметрами» позволили разработать методику конструирования системы задач. Эта методика включает в себя типологию задач с параметрами, содержащих уравнение окружности, обоснованное описание системы опорных (ключевых) задач, а также роли и содержания пропедевтического этапа обучения.

Ключевые слова: методика обучения математике, задачи с параметрами, опорные (ключевые) задачи, уравнение окружности

Для цитирования: Зеленина Н. А. Выделение опорных задач при изучении темы «Уравнение окружности в задачах с параметрами» // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 4 (45). С. 52–66. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_52

Article

Selection of basic problems in the study of the theme «The equation of a circle in problems with parameters»

Natalia A. Zelenina
Vyatka State University, e-mail: sezel@mail.ru

Annotation. Ensuring a high quality of teaching mathematics to students is inextricably linked with teaching how to solve creative mathematical problems. These problems traditionally include tasks of high educational, developmental and diagnostic value. The purpose of this research is to develop and describe a teaching methodology for solving problems with parameters based on the allocation of basic (key) problems. The author has developed a methodology for constructing a system of tasks on the basis of systematizing the theoretical and task material, highlighting students' basic knowledge and skills, describing the intra- and inter-subject connections of the topic "Equation of a circle in tasks with parameters". This methodology includes a typology of problems with parameters containing the equation of a circle, a substantiated description of the system of basic (key) problems, the role and content of the propaedeutic stage of teaching.

Keywords: teaching methods of mathematics, tasks with parameters, basic (key) tasks, equation of a circle

For citation: Zelenina N. A. Selection of basic problems in the study of the theme «The equation of a circle in problems with parameters». *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 4 (45), pp. 52–66. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_52

Теоретико-математическую основу обучения решению задач с параметрами, включающими в себя уравнение окружности, составляют вопросы, связанные с аналитическим заданием окружности общим и каноническим уравнениями, взаимным расположением двух окружностей на плоскости, взаимным расположением окружности и прямой на плоскости, нахождением расстояния между двумя точками и от точки до прямой координатной плоскости, исследованием количества корней квадратного уравнения в зависимости от знака дискриминанта, преобразованиями плоскости (параллельный перенос, поворот).

Теоретико-методическую основу обучения вышеназванным вопросам составляет методика обучения школьников математике через задачи [1–4]. Успешному достижению целей обучения, согласно этой методике, служат специально конструируемые системы задач.

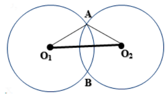
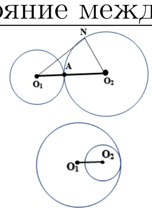
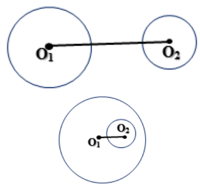
Высоких результатов можно достигнуть, если работа с такими задачами позволяет: обобщать и систематизировать знания учащихся; демонстрировать внутрипредметные связи между применяемыми в процессе решения задач понятиями и фактами; осуществлять перенос имеющихся знаний в новую проблемную ситуацию; включать школьников в процесс исследования. Этим требованиям сполна удовлетворяет методика обучения решению математических задач, основанная на выделении опорных (ключевых) задач, которая позволяет интенсифицировать деятельность школьников [5].

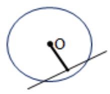
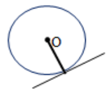
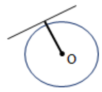
Типология задач с параметрами, включающих в себя уравнение окружности

Для составления типологии задач с параметрами, включающих в себя уравнение окружности, проанализирован большой массив задач [6–11]. Проведенный анализ, во-первых, показал, что, как правило, для решения таких задач может быть выбран графический метод, подразумевающий построение графических образов уравнений, неравенств и/или их систем, во-вторых, позволил выявить широкий спектр линий/областей плоскости, которые комбинируются с окружностью в условиях задач. В связи с этим основу рассматриваемой типологии составляет комбинация уравнения окружности и аналитических выражений, задающих другие линии/области или их совокупности на плоскости. Это позволило выделить для каждого типа задач основные знания и умения, реализация которых происходит в процессе их решения (табл. 1).

Таблица 1

**Типология задач с параметрами,
включающих в себя уравнение окружности**

<table>
<tr><td rowspan="3">I.
Две окружности</td><td colspan="3">Исследование взаимного расположения двух окружностей, R и r — радиусы, d — расстояние между центрами</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Если $|R-r| < d < R+r$, то окружности пересекаются (имеют две общие точки)</td><td>Если $d = R+r$ или $d = |R-r|$, то окружности касаются (имеют одну общую точку)</td><td>Если $d > R+r$ или $d < |R-r|$, то окружности не пересекаются (не имеют общих точек)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II.
Окружность и преобразования прямой на плоскости</td><td colspan="3">• $y-y_0 = f(a)(x-x_0)$, где множитель $f(a)$ — угловой коэффициент указанных прямых, зависящий от параметра a, — совокупность прямых на координатной плоскости, получающихся друг из друга поворотом на соответствующий угол относительно точки $(x_0;\ y_0)$ — центра поворота;
• $y = kx + f(a)$, где слагаемое $f(a)$ — свободный член уравнения, зависящий от параметра a, — совокупность прямых на координатной плоскости, получающихся друг из друга параллельным переносом на соответствующее значение $f(a)$ вдоль оси Oy</td></tr>
<tr><td colspan="3">Исследование взаимного расположения окружности и прямой, R — радиус, d — расстояние от центра окружности до прямой</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
Если $d < R$, то прямая пересекает окружность (имеют две общие точки)</td><td>
Если $d = R$, то прямая касается окружности (имеют одну общую точку)</td><td>
Если $d > R$, то прямая не пересекает окружность (не имеют общих точек)</td></tr>
<tr><td>III. Окружность и совокупность прямых</td><td colspan="3">• $ax + by + c = 0$, где $a^2 + b^2 \neq 0$ — уравнение прямой на координатной плоскости;
• $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2) = 0$, где ${a_i}^2+{b_i}^2 \neq 0$ $(i = 1, 2)$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ — две пересекающиеся прямые на координатной плоскости;
• $|a_1x + b_1y + c_1| = |a_2x + b_2y + c_2|$, где ${a_i}^2 + {b_i}^2 \neq 0$ $(i = 1, 2)$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ — две пересекающиеся прямые на координатной плоскости;
• $|ax+by+c| = m$, где $m > 0, a^2+b^2 \neq 0$ — две параллельные прямые на координатной плоскости;
• $|a_1x + b_1y + c_1| = a_2x + b_2y + c_2$, где ${a_i}^2 + {b_i}^2 \neq 0$ $(i = 1, 2)$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ — множество точек угла на координатной плоскости, не включая внутренние точки</td></tr>
<tr><td>IV. Окружность и отрезок</td><td colspan="3">$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где x_1, x_2, y_1, y_2 — заданные числа, причем $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ — уравнение отрезка на координатной плоскости</td></tr>
<tr><td>V. Окружность и «угол» (ломаная)</td><td colspan="3">$y - y_0 = k|x - x_0|$, где $k \neq 0$ — «угол» на координатной плоскости с вершиной в точке $(x_0;\ y_0)$ и осью симметрии $x = x_0$</td></tr>
</table>

VI. Окружность и многоугольник	• $\|a_1x+b_1y+c_1\|+\|a_2x+b_2y+c_2\|=m$, где $m>0$, ${a_i}^2+{b_i}^2\neq 0$ $(i=1,2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ — уравнение параллелограмма на координатной плоскости; • $\frac{\|x-x_0\|}{k}+\frac{\|y-y_0\|}{l}=1$, где $k>0, l>0$ — ромб с центром $(x_0;y_0)$, диагоналями $d_1=2k$ и $d_2=2l$, параллельными соответственно осям Ox и Oy на координатной плоскости; • $\|x\|+\|y\|=k$, где $k>0$ — квадрат с центром $(0;0)$, диагональю $d=2k$, параллельной оси Ox на координатной плоскости
VII. Окружность и область	• прямая $ax+by+c=0$, где $a^2+b^2>0$, разбивает координатную плоскость на две открытые полуплоскости так, что координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют неравенству $ax+by+c>0$, а другой — неравенству $ax+by+c<0$; • окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ делит координатную плоскость на две части так, что координаты точек, лежащих вне окружности, удовлетворяют неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>R^2$, а расположенных внутри окружности — неравенству $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$; • $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\leqslant 0$ (или $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\geqslant 0$), где ${a_i}^2+{b_i}^2\neq 0$ $(i=1,2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ —множество внутренних точек вертикальных углов на координатной плоскости, включая границы; • $\|a_1x+b_1y+c_1\|\leqslant\|a_2x+b_2y+c_2\|$, где ${a_i}^2+{b_i}^2\neq 0$ $(i=1,2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ —множество внутренних точек вертикальных углов на координатной плоскости, включая границы; • $\|a_1x+b_1y+c_1\|\leqslant a_2x+b_2y+c_2$, где ${a_i}^2+{b_i}^2\neq 0$ $(i=1,2)$, $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ —множество внутренних точек угла на координатной плоскости, включая границы;

VIII. Окружность и другие линии	• $y = ax^2 + bx + c$ $(y = a(x - x_0)^2 + y_0)$, где $a \neq 0$ — парабола на координатной плоскости с вершиной в точке $(x_0; y_0)$ и осью симметрии $x = x_0$; • $y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}$, где $k \neq 0$ — гипербола на координатной плоскости с асимптотами $x = x_0$ и $y = y_0$
IX. Полуокружность	$\sqrt{f(x)} = g(y) \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(y) \end{cases}$, где $f(x)$ и $g(y)$ имеют специальный вид

Обучение решению опорных (ключевых) задач по теме «Уравнение окружности в задачах с параметрами»

Представленная выше типология задач определила выбор опорных (ключевых) задач по теме. Выделенные в типологии комбинации уравнения окружности и других линий плоскости позволяют считать, что большинство задач сводится к исследованию взаимного расположения окружности и прямой (типы II–VII, IX). Важно научить школьников применять для этого алгебраические и геометрические способы решения. Пусть окружность задана уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, а прямая — уравнением $y = kx + b$, которое для применения геометрического способа легко преобразовывается к виду $Ax + By + C = 0$. Базовые схемы рассуждений для решения вышеупомянутых задач содержатся в табл. 2.

Отметим, что, если уравнения окружности и/или прямой содержат параметр a, приведенные в табл. 2 рассуждения позволяют составить уравнения/неравенства относительно a и в результате их решения получить ответ на вопрос о взаимном расположении окружности и прямой в зависимости от значений параметра. Анализ задачного материала показывает, что наиболее часто имеет место случай касания окружности и прямой. Это позволяет считать опорной (ключевой) задачу нахождения значений параметра, при которых окружность и прямая находятся в положении касания. Проиллюстрируем на примере различные способы нахождения значений параметра a, при которых окружность и прямая имеют только одну общую точку.

Таблица 2

Способы исследования взаимного расположения окружности и прямой

Взаимное расположение окружности и прямой	**Метод исследования**	
	Алгебраический	**Геометрический**
Окружность и прямая имеют две общие точки (прямая пересекает окружность)	Составим систему уравнений $\begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \\ y=kx+b \end{cases}$, которая должна иметь два решения. Решая её методом подстановки, получаем квадратное уравнение, которое, в свою очередь, тоже должно иметь два корня. Для этого необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положительным ($D>0$)	Расстояние от центра окружности — точки $O(x_0; y_0)$, до прямой $Ax+By+C=0$ меньше радиуса окружности R. Применяя формулу расстояния от точки до прямой, составим неравенство $\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}} < R$. Для того чтобы прямая и окружность имели ровно две общие точки, необходимо и достаточно, чтобы полученное в результате преобразований числовое неравенство оказалось верным

Окружность и прямая имеют одну общую точку (прямая касается окружности)	Составим систему уравнений $\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,\\ y=kx+b\end{cases}$, которая должна иметь единственное решение. Решая её методом подстановки, получаем квадратное уравнение, которое, в свою очередь, тоже должно иметь единственный корень. Для этого необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был равен нулю ($D=0$)	Расстояние от центра окружности — точки $O(x_0;y_0)$, до прямой $Ax+By+C=0$ равно радиусу окружности R. Применяя формулу расстояния от точки до прямой, составим равенство $\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}=R$. Для того чтобы прямая и окружность имели ровно одну общую точку, необходимо и достаточно, чтобы полученное в результате преобразований числовое равенство оказалось верным
Окружность и прямая не имеют общих точек	Составим систему уравнений $\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,\\ y=kx+b\end{cases}$, которая не должна иметь решений. Решая её методом подстановки, получаем квадратное уравнение, которое, в свою очередь, тоже не должно иметь корней. Для этого необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был отрицательным ($D<0$)	Расстояние от центра окружности — точки $O(x_0;y_0)$, до прямой $Ax+By+C=0$ больше радиуса окружности R. Применяя формулу расстояния от точки до прямой, составим неравенство $\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}>R$. Для того чтобы прямая и окружность не имели общих точек, необходимо и достаточно, чтобы полученное в результате преобразований числовое неравенство оказалось верным

Задача. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

Решение. Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5 \geqslant 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52 \Leftrightarrow x^2+4x+y^2+4y-57=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;-2)$ радиуса $R=\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5 \leqslant 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52 \Leftrightarrow x^2+6x+y^2-6y-47=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-3)^2=65.$$

Последнее уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;3)$ радиуса $R=\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;-1)$ и $B(5;2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую, проходящую через точку $B(5;2)$ с угловым коэффициентом a, который принимает всевозможные значения. Удобно представлять себе «движущуюся» прямую, которая «вращается» вокруг точки $B(5;2)$. Мысленно вращая прямую $y=a(x-5)+2$, определим такие ее положения, когда она имеет ровно две общие точки с дугами ω_1 и ω_2.

На рис. 1 выделена область (включая границы), в которой должны лежать прямые совокупности $y=a(x-5)+2$, чтобы выполнялось данное условие. Найдем значения a, соответствующие положениям прямых (на рис. 1 обозначены римскими цифрами I и II), ограничивающих выделенную область.

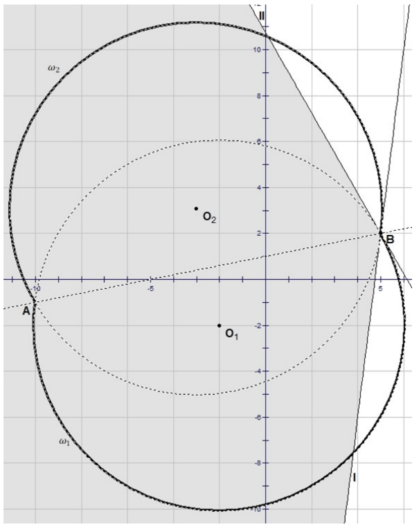


Рис. 1. Чертеж к решению задачи

I. Прямая $y = a(x-5)+2$ касается окружности с центром в точке $O_2(-3;3)$ радиуса $R=\sqrt{65}$. Исследуем касание тремя способами.

Первый способ — алгебраический. Составим систему уравнений

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-3)^2=65,\\ y=a(x-5)+2\end{cases}$$

и потребуем, чтобы она имела единственное решение. Подставляя выражение для y в первое уравнение системы, после преобразований получим квадратное уравнение $(a^2+1)x^2-(10a^2+2a-6)x+25a^2+10a-55=0$ ($a^2+1\neq 0$ ни при каких значениях a). Полученное уравнение окружности имеет единственный корень в случае равенства нулю его дискриминанта $D=4(a^2-16a+64)=4(a-8)^2$. Получаем, что $D=0$ при $a=8$. Таким образом, прямая касается окружности при $a=8$. Заметим, что большим достоинством этого способа рассуждений является его доступность с точки зрения программного материала (уровень 8 класса). Недостаток же состоит в том, что алгебраический способ решения зачастую приводит к достаточно громоздким тождественным преобразованиям (например, при нахождении дискриминанта), которые отнимают много времени и являются почвой для технических ошибок.

Второй способ – геометрический. Выразим расстояние от центра окружности – точки $O_2(-3;3)$ до прямой $y=a(x-5)+2$ и приравняем его к радиусу окружности. Получим уравнение относительно параметра a: $\frac{|-3a-3-5a+2|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{65}$. Далее $|-8a-1| = \sqrt{65(a^2+1)}$. Обе части уравнения неотрицательны, возведем их во вторую степень. Получим $64a^2 + 16a + 1 = 65a^2 + 65$. Отсюда $a^2 - 16a + 64 = 0$ и $a = 8$. Отметим, что этот способ рассуждений является более лаконичным и технически более простым, чем первый, но требует от школьников глубокого понимания ситуации, некоторых специальных знаний и умений. Так, обязательным для учащихся является умение записывать общее уравнение прямой, то есть переходить от привычного в школе уравнения с угловым коэффициентом $y = a(x-5)+2$ к уравнению $ax-y-5a+2 = 0$, чтобы далее воспользоваться формулой нахождения расстояния от точки до прямой. Полученное после этого уравнение также не является стандартным для школьной математики и требует от учеников выбора наиболее рационального способа решения.

Третий способ основан на применении соотношения между угловыми коэффициентами взаимно перпендикулярных прямых. Ранее было отмечено, что точка касания B принадлежит окружности. Проведем радиус O_2B, который, как известно, перпендикулярен касательной, то есть прямой $y = a(x-5)+2$, угловой коэффициент которой равен a. Составим уравнение прямой O_2B, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две данные точки $O_2(-3;3)$, и $B(5;2)$: $\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-3}{2-3}$. Отсюда $y = -\frac{1}{8}x + \frac{21}{8}$, где угловой коэффициент равен $-\frac{1}{8}$. Зная, что угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по величине и противоположны по знаку, получаем $a = 8$. Этот способ решения, как видим, также является достаточно кратким. Основные знания и умения очевидны.

Итак, в положении I прямая совокупности $y = a(x-5)+2$ имеет угловой коэффициент, равный 8. Проводя те же рассуждения для положения II, получаем $a = -\frac{7}{4}$. Таким образом, между положениями I и II параметр a принимает значения от $-\frac{7}{4}$ до 8. Следовательно, условию задачи удовлетворяют $-\frac{7}{4} \leqslant a \leqslant 8$, при которых система имеет два решения. При $a < -\frac{7}{4}$ и $a > 8$ каждая прямая совокупности $y = a(x-5)+2$ пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения. Ответ: $-\frac{7}{4} \leqslant a \leqslant 8$.

Методическая ценность рассмотренной задачи состоит в том, что ее условие позволяет продемонстрировать учащимся различные способы решения опорной (ключевой) задачи, что не всегда возможно в других задачных ситуациях.

Освоение учащимися способов решения опорных (ключевых) задач является первым и неотъемлемым этапом обучения решению задач по теме «Уравнение окружности в задачах с параметрами». Далее на основе составленной типологии конструируется специальная система задач, которая даст возможность учить школьников планомерно и целенаправленно, поскольку предлагаемый материал является хорошо структурированным и методически обработанным. Такая организация работы с задачным материалом позволяет учащимся успешно применять полученные знания и умения для решения достаточно широкого спектра задач.

Список источников

1. **Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В.** Использование различных методов решения задач с параметром на Едином государственном экзамене по математике // *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*. 2016. № 8. С. 139–150. URL: http://e-koncept.ru/2016/16176.htm (дата обращения: 21.11.2022).

2. **Колягин Ю. М.** Задачи в обучении математике. М.: Просвещение, 1977. Ч. I. 110 с.

3. **Крупич В. И.** Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. М.: Прометей, 1995. 166 с.

4. **Саранцев Г. И.** Упражнения в обучении математике. М.: Просвещение, 1995. 240 с.

5. **Зильберберг Н. И., Хазанкин Р. Г.** Ключевые задачи в обучении математике. М.: Мир, 1984. 179 с.

6. **Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М.С.** Задачи с параметрами. Киев: РИА «Текст», МП «Око», 1992. 326 с.

7. **Кожухов С. К., Кожухова С. А.** Уравнения и неравенства с параметром. Орел: ОИУУ, 2010. 76 с.

8. **Козко А. И., Чирский В. Г.** Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО, 2007. 296 с.

9. **Корянов А. Г., Прокофьев А. А.** Использование метода наглядно-графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами // *Математика в школе.* 2011. № 1. С. 25–32.

10. **Моденов В. П.** Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод : учеб. пособие. М.: Экзамен, 2007. 285 с.

11. **Ястребинецкий Г. А.** Задачи с параметрами. М.: Просвещение, 1986. 128 с.

References

1. **Zdorovenko M. Yu., Zelenina N. A., Krutikhina M. V.** The use of various methods for solving problems with a parameter on the Unified State Exam in Mathematics. *Nauchno-metodicheskiy elektronniy zhurnal «Kontsept»* [Scientific and methodological electronic journal «Concept»]. 2016. No 8, pp. 139–150. Available: http://e-koncept.ru/2016/16176.htm (accessed: 21.11.2022). (In Russ.)

2. **Kolyagin Yu. M.** *Zadachi v obuchenii matematike. Ch. I* [Tasks in teaching mathematics. Part I]. M.: Prosveschenie, 1977. 110 p. (In Russ.)

3. **Krupich V. I.** *Teoreticheskiye osnovi obucheniya resheniyu sshkolnikh matematicheskikh zadach* [Theoretical foundations of teaching solving school mathematical problems]. M.: Prosveschenie, 1995. 166 p. (In Russ.)

4. **Sarantsev G. I.** *Uprazhneniya v obuchenii mahematike* [Exercises in Teaching Manematics]. M.: Prosveschenie, 1995. 240 p. (In Russ.)

5. **Zilberberg N. I., Khazankin R. G.** *Klyucheviye zadachi v obuchenii matematike* [Key tasks in teaching mathematics]. M: Mir, 1984. 179 p. (In Russ.)

6. **Gornshtein P. I., Polonsky V. B., Yakir M. S.** *Zadachi s parametrami* [Problems with parameters]. Kyiv: RIA «Tekst», MP «Oko», 1992. 326 p. (In Russ.)

7. **Kozhukhov S. K., Kozhukhova S. A.** *Uravneniya i neravenstva s parametrom* [Equations and inequalities with a parameter]. Orel: OIUU, 2010. 76 p. (In Russ.)

8. **Kozko A. I., Chirsky V. G.** *Zadachi s parametrom i drugiye slozhniye zadachi* [Problems with a parameter and other complex problems]. M: MTsNMO, 2007. 296 p. (In Russ.)

9. **Koryanov A. G., Prokofiev A. A.** Using the visual-graphical interpretation method when solving equations and inequalities with parameters. *Matematika v shkole* [Mathematics in School]. 2011. No 1, pp. 25–32. (In Russ.)

10. **Modenov V. P.** *Zadachi s parametrami. Coordinatno-parametricheskiy metod: uchebnoye posobiye* [Problems with parameters. Coordinate-parametric method: study guide]. M.: Examen, 2007. 285 p. (In Russ.)

11. **Yastrebinetskiy G. A**. *Zadachi s parametrami* [Problems with parameters.]. M.: Prosveschenie, 1986. 128 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Зеленина Наталья Алексеевна / Natalia A. Zelenina
к.п.н., доцент кафедры фундаментальной математики / candidate of pedagogical sciences, associate professor, Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610020, Россия, Киров, ул. Преображенская, д. 41 кор. 11 / 610020, Russia, Kirov, Preobrazhenskaya St., 41 korp. 11

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 22.10.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 30.10.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 02.12.2022