Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 4 (45)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 4 (45)

Научная статья

УДК 517
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_17

ПОВЕДЕНИЕ МЕРЫ ХАУСДОРФА ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Фофанов Кирилл Алексеевич
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, e-mail: kirfof@mail.ru

Аннотация. Принцип длины и площади Альфорса дает оценку интеграла отношения лебеговых мер множества и его образа при аналитическом отображении. В 1974 году этот результат был обобщен Н. А. Широковым при замене мер Лебега мерами Хаусдорфа. В настоящей статье будет показано, что при расширении класса функций, определяющих меру Хаусдорфа, прежняя оценка останется неизменной.

Ключевые слова: мера Хаусдорфа, аналитическая функция, интеграл по мере

Для цитирования: Фофанов К. А. Поведение меры Хаусдорфа при отображениях // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 4 (45). С. 17–32. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_17

Article

The Hausdorff's measure behaviour under the mappings

Kirill A. Fofanov
Herzen State Pedagogical University of Russia, e-mail: kirfof@mail.ru

Abstract. Alforse's «principle of lenght and area» gives the estimation of the fraction of the measures of set and its image under the analytical function. In 1974 this result was generalized by N.A.Shirokov by replacing Lebesgue measures whith Hausdorff's measures. In this article it will be shown that considering a broader class of functions in the definition of the Hausdorff's measure does not change the previous estimation.

Keywords: Hausdorff's measure, analytical function, measure integral

For citation: Fofanov K. A. The Hausdorff's measure behaviour under the mappings. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 4 (45), pp. 17−32. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_17

1. Введение

Настоящая статья посвящена обобщению результата, полученного в статье [1]. В свою очередь, статья [1] обобщает теорему Альфорса. Принцип длины и площади Альфорса может быть сформулирован следующим образом. Пусть Δ – область комплексной плоскости, f – аналитическая в Δ функция, $l_R = \{z \in \Delta \mid |f(z)| = R\}$ – ее линия уровня. Пусть $E \subseteq \Delta$ – множество конечной плоской меры Лебега $A(E)$, E_R — пересечение линии уровня l_R с E, $T_R = f(E_R)$. Тогда с учетом обозначения через $|E_R|$, $|T_R|$ линейных мер множеств E_R и T_R соответственно справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^\infty \frac{|E_R|^2}{|T_R|} dR \leq 2\pi A(E). \tag{1}$$

В статье [1] было предложено обобщение теоремы Альфорса при замене меры Лебега на α-меру Хаусдорфа.

Чтобы определить меру Хаусдорфа на плоскости, рассмотрим следующую конструкцию. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0; 2]$. Для борелевского множества M рассмотрим всевозможные не более чем счетные покрытия этого множества замкнутыми шарами, радиусы r_k которых меньше ε. Для каждого из покрытий вычислим сумму его радиусов, возведенных в степени α : $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} r_k^\alpha$. Множество получившихся сумм обозначим через $\mathfrak{A}(M)$.

Определение 1. *Внешней α, ε-мерой Хаусдорфа $h_\alpha(M,\varepsilon)$ борелевского множества M будем называть инфимум множества $\mathfrak{A}(M)$.*

Определение 2. *Внешней α-мерой Хаусдорфа $h_\alpha(M)$ борелевского множества M называется предел*

$$h_\alpha(M) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\alpha(M,\varepsilon).$$

Вернемся к формулированию результатов статьи [1]. Сохраним обозначения: области Δ, линии уровня l_R, множества $E \subseteq \Delta$ конечной α-меры, а также введем новые: $E_{l_R,\varepsilon}$ – часть E, удаленная от l_R не более чем на ε; $T_{l_R,\varepsilon}$ – образ $E_{l_R,\varepsilon}$ при отображении f. В этом случае было доказано, что

$$\int\limits_0^{\infty}{}^{*} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{(h_\alpha(E_{l_R,\varepsilon}))^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{(h_\alpha(T_{l_R,\varepsilon}))^{\frac{1}{\alpha}}} \lambda(dR) \le 2h_{\alpha+1}(E). \tag{2}$$

(Интеграл берется по мере Лебега.)

В настоящей статье мы изменим определение α-меры Хаусдорфа и докажем, что с учетом изменения класса функций, определяющих меру, результат останется верным.

При всех обозначениях предыдущих определений выберем также число $0 \le \beta \le 1$. Для каждого покрытия множества M шарами, радиусы которых меньше чем $\varepsilon > 0$, вычислим сумму

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} r_k^\alpha |\ln r_k|^\beta.$$

Множество всех таких сумм обозначим через $\mathfrak{A}(M)$. Теперь по аналогии введем следующие два понятия.

Определение 3. *Внешней $\alpha, \beta, \varepsilon$-мерой $h_{\alpha,\beta}(M,\varepsilon)$ множества M будем называть точную нижнюю границу множества $\mathfrak{A}(M)$.*

Определение 4. *α, β-мерой Хаусдорфа множества M будем называть предел по $\varepsilon \to 0$ $\alpha, \beta, \varepsilon$-меры этого множества:*

$$h_{\alpha,\beta}(M) \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} h_{\alpha,\beta}(M, \varepsilon).$$

Мы докажем, что, несмотря на изменение определения меры, результат не изменится и даже не зависит от параметра β. То есть с учетом предыдущих обозначений

$$\int_0^{\infty} \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\left(h_{\alpha,\beta}(E_{l_R,\varepsilon})\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\left(h_{\alpha,\beta}(T_{l_R,\varepsilon})\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \lambda(dR) \leq 2h_{\alpha+1,\beta}(E). \tag{3}$$

2. Вспомогательные утверждения

Следующие леммы получены путем замены в формулировках аналогичных лемм в статье [1] α-меры на α, β-меру. Доказательства исходных лемм при этом потребовали усложнений и были проведены нами заново.

2.1. Лемма 1

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию f, аналитическую над Δ. Обозначим через D ее риманову поверхность, φ – обратную к f аналитическую функцию.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq D, \;\; E := \varphi(\mathcal{F})$.

Мерой Хаусдорфа $h_{\alpha,\beta}$ множества $\mathcal{F}$ на римановой поверхности D будем полагать сумму мер множеств $\mathcal{F}_j$, где каждое $\mathcal{F}_j$ – пересечение $\mathcal{F}$ с одним из листов (на каждом из которых $h_{\alpha,\beta}$-мера определена стандартно).

Лемма 1. При ранее оговоренных обозначениях для $\alpha \in (1; 2]$

$$h_{\alpha,\beta}(E) = \int_{\mathcal{F}} |\varphi'(w)|^{\alpha} \, dh_{\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и разобьем D на счетное число областей Q_j, каждая из которых ограничена кусочно-гладкой кривой и однозначно проектируется на плоскость.

При этом разбиение будем выбирать таковым, чтобы $\forall j \in \mathbb{N}$ $\forall w_1, w_2 \in Q_j$ было бы выполнено неравенство

$$\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right| < 1+\varepsilon.$$

(Ясно, что мы всегда можем выбрать Q_j таковыми, ведь если $diam\ Q_j \to 0$, то $\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right| \to 1$ по непрерывности φ'.)

Обозначим через $\mathcal{F}_j$ пересечение $\mathcal{F} \cap Q_j$; $E_j := \varphi(\mathcal{F}_j)$.

В силу определения меры $h_{\alpha,\beta}$ на римановой поверхности и $\alpha > 1$ имеем $h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}) = \sum\limits_j h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j)$, $h_{\alpha,\beta}(E) = \sum\limits_j h_{\alpha,\beta}(E_j)$ (условие $\alpha > 1$ существенно, так как оно делает несущественными слагаемые, относящиеся к радиусам шаров, пересекающих более чем одно множество (такие шары лежат вдоль кусочно-гладких границ областей $\mathcal{F}_j$)).

Пусть w_j – фиксированная точка Q_j. Тогда $\forall w \in Q_j$

$$\left|\frac{\varphi'(w_j)}{\varphi'(w)}\right| < 1+\varepsilon \implies \frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha < \left|\varphi'(w)\right|^\alpha$$
$$\left|\frac{\varphi'(w)}{\varphi'(w_j)}\right| < 1+\varepsilon \implies \left|\varphi'(w)\right|^\alpha < (1+\varepsilon)^\alpha \left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha .$$

Проинтегрируем цепочку неравенств

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha < \left|\varphi'(w)\right|^\alpha < (1+\varepsilon)^\alpha \left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha$$

по мере $h_{\alpha,\beta}$ на множестве $\mathcal{F}_j$:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j) < \int\limits_{\mathcal{F}_j} \left|\varphi'(w)\right|^\alpha dh_{\alpha,\beta} <$$
$$< (1+\varepsilon)^\alpha \left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j). \tag{4}$$

Пусть $\eta, \eta_1 > 0$. Рассмотрим такое покрытие множества $\mathcal{F}_j$ кругами $\{K_{jm}\}_{m\geq 1}$ с центрами в точках w_{jm} и радиусами $r_{jm} < \eta$, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_m r_{jm}^\alpha \left|\ln\ r_{jm}\right|^\beta < inf\left\{\sum_m R_{jm}^\alpha \left|\ln\ R_{jm}\right|^\beta\right\} + \eta_1, \tag{5}$$

где R_{jm} – радиусы всевозможных круговых покрытий $\mathcal{F}_j$ с условием $R_{jm} < \eta$, инфимум берется по этим покрытиям. (Существование такого покрытия обеспечено характеристическим свойством инфимума.)

Обозначим через L_{jm} образы кругов $\varphi(K_{jm})$; через z_{im} – образы центров w_{jm}.

Заметим, что L_{jm} содержится в круге с центром z_{jm} радиуса $|\varphi'(w_{jm})|\,(1+\varepsilon)r_{jm}$.

Действительно, (воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница) видим, что $\forall w \in K_{jm}$

$$|\varphi(w)-\varphi(w_{jm})| = \left|\int\limits_{[w_{jm}w]} \varphi'(w)dw\right| \leq \int\limits_{[w_{jm}w]} |\varphi'(w)|\,dw <$$

$$< \int\limits_{[w_{jm}w]} (1+\varepsilon)\,|\varphi'(w_j)|\,dw < (1+\varepsilon)\,|\varphi'(w_j)|\,r_{jm}.$$

Обозначим через a константу $(1+\varepsilon)\,|\varphi'(w_{jm})|$. Заметим, что мы можем подбирать радиусы покрытий так, чтобы выполнялось неравенство $|\ln\ ar_{jm}|^\beta < |\ln\ r_{jm}|^\beta\,(1+\varepsilon)$. Действительно,

$$|\ln\ ar_{jm}|^\beta = |\ln\ a + \ln\ r_{jm}|^\beta = |\ln\ r_{jm}|^\beta \left|1+\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta.$$

Применив обобщенное неравенство Бернулли, имеем:

$$\left|1+\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta < 1+\beta\left|\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|.$$

При $r_{jm}\to 0$ имеем $\beta\left|\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|\to 0$. Стало быть, выбрав достаточно малые r_{jm}, мы получим неравенства

$$\left|1+\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta < 1+\beta\left|\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right| < 1+\varepsilon$$

и

$$|\ln\ ar_{jm}|^\beta = |\ln\ r_{jm}|^\beta\left|1+\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta < |\ln\ r_{jm}|^\beta\,(1+\varepsilon).$$

Тогда

$$\inf_{\rho_{jm}<a\eta}\sum_m \rho_{jm}^\alpha\,|\ln\rho_{jm}|^\beta < \sum_m (ar_{jm})^\alpha\,|\ln\ ar_{jm}| <$$

$$< \sum_m a^\alpha r_{jm}^\alpha (1+\varepsilon) \left|\ln\ r_{jm}\right|^\beta = a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \sum_m r_{jm}^\alpha \left|\ln\ r_{jm}\right|^\beta .$$

Воспользовавшись неравенством (4), имеем

$$a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \sum_m r_{jm}^\alpha \left|\ln\ r_{jm}\right|^\beta < a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \left(\inf \left\{ \sum_m R_{jm}^\alpha \left|\ln\ R_{jm}\right|^\beta \right\} + \eta_1 \right),$$

или, окончательно,

$$\inf_{\rho_{jm} < a\eta} \sum_m \rho_{jm}^\alpha \left|ln \rho_{jm}\right|^\beta < a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \left(\inf \left\{ \sum_m R_{jm}^\alpha \left|ln\ R_{jm}\right|^\beta \right\} + \eta_1 \right).$$

Перейдя к пределу по $\eta, \eta_1 \to 0$, получаем неравенство

$$h_{\alpha,\beta}(E_j) \le (1+\varepsilon)^{1+\alpha} \left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j).$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (4), получаем оценку

$$h_{\alpha,\beta}(E) = \sum_j h(E_j) \le (1+\varepsilon)^{1+\alpha} \sum_j \left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha h(\mathcal{F}_j) <$$

$$< (1+\varepsilon)^{1+2\alpha} \sum_j \int_{\mathcal{F}_j} \left|\varphi'(w)\right|^\alpha dh_{\alpha,\beta} = (1+\varepsilon)^{1+2\alpha} \int_{\mathcal{F}} \left|\varphi'(w)\right|^\alpha dh_{\alpha,\beta}. \qquad (6)$$

Таким образом, мы оценили α, β-меру множества E сверху интегралом. Проведя аналогичные рассуждения, получим оценку α, β-меры множества E снизу. (Для удобства, в новом рассуждении введем обозначения $K_{jm}, r_{jm}, z_{jm}, \eta, \eta_1, L_{jm}, w_{jm}, a$ заново.)

Пусть теперь K_{jm} – круги с центрами в точках z_{jm} радиусов $r_{jm} < \eta$, покрывающие множество E_j, причем $\eta > 0$ настолько мало, что для некоторого заранее зафиксированного $\eta_1 > 0$ выполнялось бы неравенство

$$h_{\alpha,\beta}(E_j) - \eta_1 < \sum_m r_{jm}^\alpha \left|\ln\ r_{jm}\right|^\beta < h(E_j) + \eta_1.$$

Тогда, обозначив $L_{jm} = f(K_{jm})$, мы заметим, что L_{jm} содержатся в кругах с центрами $w_{jm} = f(z_{jm})$ радиусов $\frac{1+\varepsilon}{|\varphi'(w_{jm})|} r_{jm}$. Тогда, обозначив через a константу $\frac{1+\varepsilon}{|\varphi'(w_{jm})|}$, имеем

$$\inf_{\rho_{jm}<a\eta} \sum_m \rho_{jm}^\alpha \left|\ln\ \rho_{jm}\right|^\beta < a^\alpha(1+\varepsilon)\sum_m r_{jm} \left|\ln\ r_{jm}^\alpha\right|^\beta < a^\alpha(1+\varepsilon)(h(E_j)+\eta_1).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\eta, \eta_1 \to 0$, получаем

$$h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j) \le \frac{(1+\varepsilon)^{1+\alpha}}{|\varphi'(w_j)|^\alpha} h_{\alpha,\beta}(E_j).$$

Тогда, вновь воспользовавшись неравенством (3), имеем

$$h_{\alpha,\beta}(E) = \sum_j h(E_j) \ge \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+\alpha}} \sum_j |\varphi'(w_j)|^\alpha h_{\alpha,\beta}(F_j) >$$

$$> \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+2\alpha}} \sum_j \int\limits_{\mathcal{F}_j} |\varphi'(w_j)|^\alpha dh_{\alpha,\beta} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+2\alpha}} \int\limits_{\mathcal{F}} |\varphi'(w_j)|^\alpha dh_{\alpha,\beta}.$$

Таким образом, в результате обоих рассуждений получаем оценку

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+2\alpha}} \int\limits_{\mathcal{F}} |\varphi'(w_j)|^\alpha dh_{\alpha,\beta} < h_{\alpha,\beta}(E) < (1+\varepsilon)^{1+2\alpha} \int\limits_{\mathcal{F}} |\varphi'(w)|^\alpha dh_{\alpha,\beta}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение леммы.

2.2. Лемма 2

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F} \in D$, $h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}) < \infty$. Пусть $\mathcal{F}_R$ – часть $\mathcal{F}$, проекция которой лежит на окружности $|w| = R$. Тогда выполнено неравенство

$$\int\limits_{(0;\infty)} h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R)\lambda(dR) \le 2h_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}_R).$$

Доказательство.

Разобьем поверхность D на не более чем счетное число частей $Q_{jm}^{(\nu)}$, которые однозначно проектируются на области-сектора, определяемые неравенствами $R_j < |w| < R_{j+1}$, $\psi_m < |\arg w| < \psi_{m+1}$; N_{jm} – кратность покрытия Q_{jm} (то есть n – наибольшее из натуральных чисел, для которого существует точка из Q_{jm}, которая покрыта ровно n элементами покрытия).

Из аддитивности интеграла Лебега мы понимаем, что достаточно показать выполнение леммы для множества $\mathcal{F} \subseteq Q_{jm}$, что и предполагаем в дальнейшем.

Напомним обозначение

$$h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_n r_n^\alpha \left|\ln\ r_n\right|^\beta \right\},$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям множества $\mathcal{F}_R$ кругами K_n с радиусами $r_n < \varepsilon$.

Пусть теперь $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – покрытие $\mathcal{F}$ кругами радиусов $\rho_n < \varepsilon$, для которого

$$\sum_n \rho_n^{\alpha+1} \left|\ln\ \rho_n\right|^\beta \le h_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}) + \varepsilon. \tag{7}$$

Выделим из покрытия $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ круги, которые пересекаются с $\mathcal{F}_R$ не по пустому множеству. Обозначим через $h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R)$ сумму

$$h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) = \sum_{K_n \cap \mathcal{F}_R \neq \varnothing} \rho_n^\alpha \left|\ln\ \rho_n\right|^\beta .$$

Так как выбранные круги образуют покрытие множества $\mathcal{F}_R$, выполнено следующее неравенство (инфимум по множеству не превосходит его элемента):

$$h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) \le h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R). \tag{8}$$

Перейдем к нижнему пределу в последнем неравенстве при $\varepsilon \to 0$. При этом заметим, что (так как функция $h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon)$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$), $\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) = h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R)$:

$$h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R) \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R). \tag{9}$$

Тогда

$$\int\limits_{(0;\infty)} h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R) d\lambda \le \int\limits_{(0;\infty)} \varliminf_{\varepsilon\to 0} h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda \le \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{(0;\infty)} h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda.$$

(Последнее неравенство выполнено по Теореме Фату ([2], с. 520).)

Рассмотрим отдельно интеграл $\int\limits_{(0;\infty)} h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R)d\lambda$. Заметим, что мы можем представить его в виде повторного.

Будем мыслить часть римановой поверхности, на которой расположены круги K_n, как плоскость. Заметим тогда, что каждый круг K_n (с учетом известного радиуса ρ_n задается углом θ_n (аргумент центра круга) и расстоянием $a\in\mathbb{R}$ от этого круга до начала координат (можно считать, что $a>0$). Сопоставим этой части римановой поверхности полуполосу $(0;\infty)\times(0;2\pi)$. Заметим, что кругу K_n соответствует прямоугольник $(a;a+2\rho_n)\times\left(\theta_n-\arcsin\frac{\rho_n}{a+\rho_n};\ \theta_n+\arcsin\frac{\rho_n}{a+\rho_n}\right)$.

Зафиксируем некоторый конкретный радиус $R>0$. Для него в этом прямоугольнике рассмотрим постоянную функцию $k^{(n)}_R=\frac{\rho_n^\alpha|\ln\rho_n|^\beta}{2\arcsin\frac{\rho_n}{a+\rho_n}}$. Заметим, что для данного фиксированного R подынтегральная функция $h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R)$ равна сумме интегралов констант $k^{(n)}_R$, умноженных на характеристические функции $\chi^{(n)}_R$ (относительно полуполосы) прямоугольников, соответствующих кругам K_n:

$$h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R)=\sum_{k_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing}\int\limits_0^{2\pi}\chi^{(n)}_R k^{(n)}_R d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing}\chi^{(n)}_R k^{(n)}_R d\theta.$$

Тогда интересующий нас интеграл может быть выписан следующим образом:

$$\int\limits_{(0;\infty)} h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R)d\lambda=\int\limits_0^{\infty}\lambda(dR)\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing}\chi^{(n)}_R k^{(n)}_R d\theta.$$

Сменим порядок интегрирования и рассмотрим внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\infty}\sum_{k_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing}\chi^{(n)}_R k^{(n)}_R\lambda(dR)=\sum_{k_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing}\int\limits_0^{\infty}\chi^{(n)}_R k^{(n)}_R\lambda(dR).$$

При фиксированном θ для конкретного круга (прямоугольника) K_n (считаем, что полупрямая $y=\theta$ пересекает прямоугольник K_n),

$$\int\limits_0^{\infty}\chi^{(n)}_R\cdot k^{(n)}_R\lambda(dR)=2\rho_n\frac{\rho_n^\alpha|\ln\rho_n|^\beta}{2\arcsin\frac{\rho_n}{a+\rho_n}}.$$

При взятии внешнего интеграла знаменатели у дробей сокращаются и мы получаем сумму $2\sum\limits_n \rho_n^{\alpha+1} |\ln \rho_n|^\beta$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{(0;\infty)} h^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda \leq 2\sum_n \rho_n^{\alpha+1} |\ln \rho_n|^\beta .$$

Причем с учетом выбора покрытия K_n

$$2\sum_n \rho_n^{\alpha+1} |\ln \rho_n|^\beta \leq 2h_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ в окончательном неравенстве

$$\int\limits_{(0;\infty)} h_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R) d\lambda \leq 2h_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}) + \varepsilon,$$

получаем утверждение леммы.

Следствие. Для каждого $\varepsilon > 0$ и для почти всех $R > 0$

$$h_{\alpha+1,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty.$$

Доказательство. Возьмем множество E_δ точек E, удаленных от границы области Δ не менее чем на ε, и пусть $\mathcal{F}_\delta = f(E_\delta)$. Функция $|f'|$ ограничена в области Δ, то есть существует положительное число $M > 0$, для которого $\forall z \in E_\delta \;\; |f'(z)| < M$.

С учетом этого перепишем *Лемму 1* для меры $h_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}_\delta)$:

$$h_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}_\delta) = \int\limits_{E_\delta} |f'(z)|^{\alpha+1} dh_{\alpha+1,\beta} \leq M^{\alpha+1} h_{\alpha+1,\beta}(E_\delta) < \infty.$$

($h_{\alpha+1,\beta}(E_\delta) < \infty$ по предположению из условия теоремы.)

3. Основная теорема

Аналогично леммам, формулировка теоремы не изменяется при замене α-меры на α, β-меру. Доказательство теоремы после данной замены проходит аналогично доказательству теоремы из статьи [1].

Напомним обозначения. Пусть $E \subset \Delta$ – множество конечной $\alpha+1, \beta$-меры: $h_{\alpha+1,\beta}(E) < \infty$. Зафиксированы $\alpha \in (1, 2]$, $\beta \in [0; 1)$. Через l_R обозначена линия уровня: $l_R = \{z \in \Delta \mid |f(z)| = R\}, R > 0$. T_R – образ части $E \cap l_R$ области E, лежащий на D при отображении функцией f. l_R, ε – часть l_R, отстоящая от E не менее чем на $\varepsilon > 0$, $\;T_{R,\varepsilon} = f(E \cap l_{R,\varepsilon})$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и при почти всех $R > 0$ имеем $h_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty$ и

$$\int\limits_{(0;\infty)} \varliminf_{\varepsilon \to 0} \frac{h_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(E \cap l_{R,\varepsilon})}{h_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})} \lambda(dR) \leq 2h_{\alpha+1,\beta}(E).$$

Доказательство.

Пусть $z = \varphi(w)$ – функция, обратная к $w = f(z)$. Воспользуемся *Леммой 1* и интегральным неравенством Гельдера:

$$h_{\alpha,\beta}(l_{R,\varepsilon} \cap E) = \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha} dh_{\alpha,\beta} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} dh_{\alpha,\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} =$$

$$= \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} h_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\sigma+1}}(T_{R,\varepsilon}).$$

(Конечность всех интегралов будет следовать из полученной далее верхней оценки всех выражений мерой $h_{\alpha+1,\beta}(E) < \infty$.)

Разделим полученное неравенство на $h_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\sigma+1}}(T_{R,\varepsilon})$ и возведем в степень $\frac{\alpha+1}{\alpha}$:

$$\frac{h_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(l_{R,\varepsilon} \cap E)}{h_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\sigma}}(T_{R,\varepsilon})} \leq \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta} \tag{10}$$

При $\varepsilon \to 0$ область интегрирования $T_{R,\varepsilon}$ «увеличивается» и, стало быть, правая часть неравенства монотонно возрастает и имеет конечный или бесконечный предел. Заметим, что этот же предел можно описать немного по-другому. Рассмотрим последовательность поверхностей D_n, таких, что $\bigcup\limits_n D_n \supset D$ и $\overline{D_n} \subset D$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta}.$$

Подействуем тогда последовательно на неравенство (10) нижним пределом и интегралом. При этом предел, полученный в правой части, перепишем указанным способом:

$$\int\limits_{(0;\infty)} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(l_{R,\varepsilon}\cap E)}{h_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\sigma}}(T_{R,\varepsilon})} dR \le \int\limits_{(0;\infty)} \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta} \right) dR \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(0;\infty)} \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha,\beta} \right) dR \le \ldots \tag{11}$$

Разобьем D_n на не более чем счетное число кусков $Q_{jm}^{(\nu)},\ \nu \le N_{jm}$. При этом потребуем, чтобы для любых $w_1, w_2 \in Q_{jm}^{(\nu)}$ и для заранее определенного $\eta > 0$ выполнялось бы $\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right| < 1+\eta$. Пусть $\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)} = \mathcal{F} \cap Q_{jm}^{(\nu)}$. Характеристическую функцию множества $Q_{jm}^{(\nu)}$ на D_n обозначим через $\chi_{jm}^{(\nu)}$. С учетом $E_{jm}^{(\nu)} = \varphi(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}),\ \psi_{jm}^{(\nu)} = \chi_{jm}^{(\nu)}|\varphi'|^{\alpha+1}$ можем переписать интеграл под пределом:

$$\ldots \le \int\limits_{(0;\infty)} (\ldots) dR = \sum_j \int\limits_{(R_j;R_{j+1})} (\ldots)\lambda(dR) =$$

$$= \sum_j \int\limits_{(R_j;R_{j+1})} \left(\int\limits_{T_{R,n}} \left(\sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) \right) \right) \lambda(dR) \le \ldots \tag{12}$$

Пользуясь свойствами интегралов Лебега, внесем их под знаки сумм:

$$\ldots \le \sum_j \int\limits_{(R_j;R_{j+1})} \left(\sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} \int\limits_{T_{R,n}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) dh_{\alpha,\beta} \right) \lambda(dR) \le$$

$$\le \sum_j \sum_m \sum_{\nu\le N_{jm}} \int\limits_{(R_j;R_{j+1})} \left(\int\limits_{T_{R,n}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) dh_{\alpha,\beta} \right) \lambda(dR) \le \ldots \tag{13}$$

В каждом $Q_{jm}^{(\nu)}$ выберем точку $w_{jm}^{(\nu)}$. В силу выполнения условия на разбиение $\{Q_{jm}^{(\nu)}\}$ и очевидного неравенства $\psi_{jm}^{(\nu)} \leq |\varphi'|^{\alpha+1}$ (на D_n) имеем (на $Q_{jm}^{(\nu)}$) неравенство

$$\int\limits_{T_{R,n}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) dh_{\alpha,\beta} \leq (1+\eta)^{\alpha+1} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} h_{\alpha,\beta}\left(T_{R,n} \cap Q_{jm}^{(\nu)}\right).$$

Применим его и продолжим раскрывать строку (12):

$$\ldots \leq \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leq N_{jm}} (1+\eta)^{\alpha+1} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} \int\limits_{(R_j;R_{j+1})} \left(h_{\alpha,\beta}\left(T_{R,n} \cap Q_{jm}^{(\nu)}\right)\right) dR \leq \ldots \tag{14}$$

С учетом $T_{R,n} \cap Q_{jm}^{(\nu)} = \mathcal{F} \cap Q_{jm}^{(\nu)} = \mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}$, *Леммы 2* и (во втором неравенстве) *Леммы 1*, примененной к $h_{\alpha+1,\beta}\left(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}\right)$, имеем

$$\ldots \leq 2(1+\eta)^{\alpha+1} \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leq N_{jm}} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} h_{\alpha+1,\beta}\left(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}\right) \leq \ldots \tag{15}$$

Будем мыслить

$$\left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} h_{\alpha+1,\beta}\left(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}\right) = \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} dh_{\alpha+1,\beta}$$

и еще раз применим условие на разбиение $\{Q_{jm}^{(\nu)}\}$:

$$\int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} dh_{\alpha+1,\beta} \leq (1+\eta)^{1+\alpha} \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} dh_{\alpha+1,\beta}.$$

С учетом этого

$$\ldots \leq 2(1+1\eta)^{2+2\alpha} \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leq N_{jm}} \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} \, dh_{\alpha+1,\beta} \leq \ldots \tag{16}$$

Мы свели все к сумме интегралов по областям $\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}$, составляющим разбиение области D_n. Таким образом, применяя *Лемму 1*, имеем

$$\ldots \leq 2(1+\eta)^{2+2\alpha} \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} \, dh_{\alpha+1,\beta} = 2(1+\eta)^{2+2\alpha} h_{\alpha+1,\beta}\left(E \cap \varphi(D_n)\right) \leq$$

$$\leq 2(1+\eta)^{2+2\alpha} h_{\alpha+1,\beta}(E). \tag{17}$$

Устремляя в неравенстве

$$\int\limits_{(0;\infty)} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{h_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(l_{R,\varepsilon} \cap E)}{h_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})} \lambda(dR) \leq 2(1+\eta)^{2+2\alpha} h_{\alpha+1,\beta}(E)$$

$\eta \to 0$, получаем утверждение теоремы.

4. Заключение

Содержательным результатом данной работы становится доказательство обобщения основной теоремы статьи [1]. Однако данный результат не вполне соответствует изначальным целям: в силу присутствия предположения об интегрируемости по Лебегу всех функций мы не можем считать, что обобщение проведено окончательно. В статье [1] в обход этого предположения были использованы верхние интегралы (определенные для произвольных функций), однако не было доказано неочевидное автору данной работы свойство верхнего интеграла по мере μ: если $f(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то

$$\int\limits_a^{b*} f(x)\mu(dx) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_a^{b*} f_n(x)\mu(dx).$$

Способы доказательства этого утверждения были предложены автору специалистами и будут изучены им уже вне рамок данной работы.

Автор выражает признательность своему научному руководителю за предложенную тему исследования и подробные консультации по возникавшим в связи с ним вопросам.

Список источников

1. Широков Н. А. Об одном обобщении теоремы Альфорса // *Зап. научных семинаров ЛОМИ.* 1974. Т. 44. С. 179–185.

2. Виноградов О. Л. Математический анализ : учебник. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 752 с.

References

1. **Shirokov N. A.** On one generalization of the Alphors theorem. *Zap. nauchnyx seminarov LOMI* [Notes of LOMI scientific seminars], 1974. Vol. 44, pp. 179–185. (In Russ.)

2. **Vinogradov O. L.** *Matematicheskij analiz: uchebnik* [Mathematical Analysis: Textbook] SPb.: BHV-Peterburg, 2021. 752 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Фофанов Кирилл Алексеевич / Kirill A. Fofanov
студент / student
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена / Herzen State Pedagogical University of Russia
191186, Санкт-Петербург, набережная реки Мойки, д. 48 / 191186, St. Petersburg, Moyka River Embankment, 48.

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 22.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 24.10.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 24.10.2022