Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 4 (45)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 4 (45)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.83
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_4

К МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНФЛИКТОВ В КИБЕРПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ИГР

Николай Никандрович Петров[1], **Дилшодбек Мансурович Аллашкуров**[2]
[1] Удмуртский государственный университет, e-mail: kma3@list.ru
[2] Ургенчский государственный университет, Узбекинстан, e-mail: allashkurovdilshod@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о конфликте в киберпространстве между группой, отвечающей за работу серверов, и группой, пытающейся нарушить работу этих серверов. Предполагается, что в силу ограниченности ресурсов дополнительную защиту получают не все серверы, а подвергаются атаке один или два сервера. Целью нападающей стороны является увеличение вероятности вывода из строя части серверов. Строится модель такого конфликта в виде матричной игры. Находится ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: киберпространство, матричная игра, смешанные стратегии, ситуация равновесия

Для цитирования: Петров Н. Н., Аллашкуров Д. М. К моделированию конфликтов в киберпространстве при помощи матричных игр // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 4 (45). С. 4–16. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_4

Article

To modeling conflicts in cyberspace using matrix games

Nikolai N. Petrov[1], **Dilshodbek M. Allashkurov**[2]
[1] Udmurt State University, e-mail: kma3@list.ru
[2] Urgench State University, Uzbekistan,
e-mail: allashkurovdilshod@gmail.com

Annotation. The problem of a conflict in cyberspace between a group responsible for the operation of servers and a group trying to disrupt the operation of these servers is considered. It is assumed that due to limited resources not all of the servers receive additional protection, and one or two servers are under attack. The aim of the attacking side is to increase the probability of bringing down some of the servers. A model of such a conflict is constructed in the form of a matrix game. An equilibrium situation is found in mixed strategies.

Keywords: cyberspace, matrix game, mixed strategies, equilibrium situation

For citation: Petrov N. N., Allashkurov D. M. To modeling conflicts in cyberspace using matrix games. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 4 (45), pp. 4–16. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_4_4

Введение

Появление Интернета привело к тому, что многие организации стали использовать его в своей деятельности. Как результат, появились возможности нарушить работу этих организаций. Поэтому естественным стало появление компьютерного противостояния в пространстве Интернета, называемого киберпространством, такого термина, как «кибервойна».

Кибервойна — это применение одним из участников киберпространства технических и информационных средств с целью причинения вреда другому или другим участникам киберпространства. Поэтому для исследования такого противоборства между участниками киберпространства естественно использовать теорию игр.

В монографии [1] как раз и рассматриваются различные модели конфликтов в киберпространстве. Описывается игровой подход при защите от DDoS-атак, защите от противодействия к несанкционированному доступу. Там же приводится обширная библиография по указанной тематике. В монографии [2] предложены общие теоретико-методологические подходы к решению задачи формирования перечня актуальных для защищаемой автоматизированной системы компьютерных атак, задачи формирования функциональных требований к системе защиты, а также теоретико-методологический подход к решению задачи построения системы защиты от компьютерных атак. Работы [3; 4] рассматривают теоретико-игровые методы в задачах проектирования систем обнаружения вторжений. В статье [5] представлены алгоритмы распределения ресурсов для защиты информации между объектами информационной системы на основе игровой модели и принципа равной защищенности объектов.

В данной статье рассматривается конфликт в киберпространстве между группой, отвечающей за работу серверов, и группой, пытающейся нарушить работу этих серверов. Предполагается, что в силу ограниченности ресурсов дополнительную защиту получают не все серверы, а подвергаются атаке один или два сервера. Целью нападающей стороны является увеличение вероятности вывода из строя части серверов. Строится модель такого конфликта в виде матричной игры. Находится ситуация равновесия в смешанных стратегиях.

1. Модель конфликта с двумя атаками нападающей стороны

Предположим, что в распоряжении группы (обозначим B), отвечающей за компьютерную безопасность, находятся n серверов. В силу ограниченности ресурсов группа B имеет возможность установить дополнительную защиту на все серверы, кроме одного. Нападающая сторона (обозначим A) стремится нанести максимальный ущерб стороне B путем проведения двух атак на один из серверов при каждой атаке или двух последовательных атак на один сервер. Будем предполагать, что если атакуется защищенный сервер, то он не теряет свой работоспособности. Если же атакуется незащищенный сервер, то с определенной вероятностью он выходит из строя.

Пусть α_i — вероятность выхода из строя сервера с номером i, если он дополнительно незащищен и подвергаетсяя атаке, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда чистой стратегией стороны B является выбор натурального числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ — номер сервера, который не будет защищаться. Чистой стратегией стороны A будет пара (i, j), где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, i — номер сервера, подвергающийся атаке в первый раз, j — номер сервера, подвергающийся атаке второй раз. Выигрыш стороны A будем считать равным

$$h((i,j),k) = \begin{cases} \alpha_i, \text{ если } k = i, k \neq j, \\ \alpha_j, \text{ если } k = j, k \neq i, \\ \alpha_k(2-\alpha_k), \text{ если } k = i = j. \end{cases}$$

Введем следующее соответствие между множеством чистых стратегий стороны A и отрезком натурального ряда следующим образом:

$$(i,j) \to n(i-1)+j, \ i,j,=1,\dots,n.$$

Получаем игру с матрицей H вида

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1(2-\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(2-\alpha_2) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n(2-\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Отметим, что порядок матрицы H равен $n^2 \times n$. Будем предполагать, что

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant 1,$$

при этом все $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ одновременно не равны 0.

Определение 1 (см. [6, с. 18])**.** Пара (k^*, l^*) образует ситуацию равновесия в чистых стратегиях, если для всех (k, l) справедливо неравенство

$$h_{kl^*} \leqslant h_{k^*l^*} \leqslant h_{k^*l}.$$

Теорема 1 (см. [6, следствие 2, с. 21])**.** В матричной игре существует ситуация равновесия в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда

$$\max_k \min_l h_{kl} = \min_l \max_k h_{kl}.$$

Утверждение 1. В данной игре отсутствует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Действительно, для данной матрицы H имеем

$$\max_k \min_l h_{kl} = 0, \quad \min_l \max_k h_{kl} = \alpha_1(2-\alpha_1) > 0,$$

и поэтому в силу теоремы 1 в игре отсутствует ситуация равновесия в чистых стратегиях

Замечание 1. Если все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равны нулю, то в игре любая ситуация является ситуацией равновесия в чистых стратегиях.

Определение 2 (см. [6, с. 23])**.** Смешанной стратегией стороны A называется вектор $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, такой, что $y_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$.

Определение 3 (см. [6, с. 23])**.** Смешанной стратегией стороны B называется вектор $X = (x_1, \ldots, x_{n^2})$, такой, что $x_j \geqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, n^2$ и $\sum\limits_{j} y_j = 1$.

Пара (X, Y), где X — смешанная стратегия стороны A, Y — смешанная стратегия стороны B, называется ситуацией в матричной игре с матрицей H. Выигрышем стороны A в ситуации (X, Y) называется число, равное

$$E(X, Y) = \sum_{ij} x_i h_{ij} y_j.$$

Определение 4 (см. [6, с. 24])**.** Ситуация (X^*, Y^*) называется ситуацией равновесия в смешанных стратегиях, если для всех X, Y справедливо неравенство

$$E(X, Y^*) \leqslant E(X^*, Y^*) \leqslant E(X^*, Y).$$

Если (X^*, Y^*) является ситуацией равновесия, то число $v = E(X^*, Y^*)$ называется ценой игры.

В дальнейшем будем считать, что X — вектор-строка, а Y — вектор-столбец. Введем следующие обозначения. $a_j = \frac{1}{\alpha_j}$, $H_{i\cdot}$ — i-я строка матрицы H, $H_{\cdot j}$ — j-й столбец матрицы H.

Теорема 2. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1 > 0$ и

$$a_1 \geqslant \sum_{i=2}^{n} a_i.$$

Тогда (X^*, Y^*) — ситуация равновесия, v — цена игры, где

$$v = \frac{2 - \alpha_1}{a_1 + (1 - \alpha_1) \sum\limits_{i=2}^{n} a_i},$$

$$y_1^* = \frac{va_1}{2 - \alpha_1}, \quad y_j^* = \frac{va_j(1 - \alpha_1)}{2 - \alpha_1}, \quad j = 2, \ldots, n,$$

$$x_1^* = \frac{v\bigl(a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} a_i\bigr)}{2 - \alpha_1}, \quad x_i^* = va_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$

$$x_i^* = 0, \text{ если } \ i \notin \{1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой (см. [6, с. 30]) пара (X^*, Y^*) является ситуацией равновесия, а v — цена игры тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, \ldots, n^2\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ справедливы неравенства

$$H_{i\cdot}Y^* \leqslant v \leqslant X^* H_{\cdot j}. \tag{1}$$

Докажем, что для всех $i \in \{1, \ldots, n^2\}$ справедливо неравенство $H_{i\cdot}Y^* \leqslant v$. Имеем $H_{1\cdot}Y^* = \alpha_1(2 - \alpha_1)y_1^* = v$. Пусть $i \geqslant 2, k = i + (n-1)i$. Тогда

$$H_{k\cdot} = \alpha_i(2 - \alpha_i)y_i^* = \frac{(2 - \alpha_i)(1 - \alpha_1)v}{2 - \alpha_1} \leqslant \frac{2(1 - \alpha_1)v}{2 - \alpha_1} \leqslant v.$$

Пусть теперь $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $k = i + (n-1)j$. Тогда

$$H_{k\cdot} = \alpha_i y_i^* + \alpha_j y_j^* = \frac{2v(1 - \alpha_1)}{2 - \alpha_1} \leqslant \frac{v(2 - \alpha_1)}{2 - \alpha_1} = v.$$

Тем самым левая часть неравенства (1) доказана.

Докажем, что для всех $j = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство $X^* H_{\cdot j} \geqslant v$. Имеем

$$X^* H_{\cdot 1} = \alpha_1(2 - \alpha_1)x_1^* + \alpha_1 x_2^* + \ldots \alpha_1 x_{n+1}^* =$$
$$= \alpha_1 v\Big(a_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i\Big) + \alpha_1 v \sum_{i=2}^{n} a_i = \alpha_1 a_1 v = v.$$

Пусть $j \in \{2, \ldots, n\}$. Тогда

$$X^* H_{\cdot j} \geqslant \alpha_j(2 - \alpha_j)x_{j+(n-1)j}^* + \alpha_j x_j^* \geqslant \alpha_j x_j^* = \alpha_j a_j v = v,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

2. Модель конфликта с атаками нападающей стороны на два сервера

В данном разделе будем рассматривать следующий конфликт между нападением и защитой. Предположим, что в распоряжении группы (обозначим B), отвечающей за компьютерную безопасность, находятся n серверов. В силу ограниченности ресурсов группа B имеет возможность установить дополнительную защиту на все серверы, кроме одного. Нападающая сторона (обозначим A) стремится нанести максимальный ущерб стороне B путем проведения атаки на любые два сервера с номерами из множества $I = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n - 1, n), (n, 1)\}$. Предполагается, что если атакуется защищенный сервер, то ущерба нет. Если атакуется незащищенный сервер, то этому серверу наносится ущерб с определенной вероятностью. Таким образом, сторона B должна выбрать сервер, который не будет защищаться, а сторона A должна выбрать два сервера из указанного списка, которые подвергнутся нападению. Пусть α_i — вероятность выхода из строя сервера с номером i, если он дополнительно незащищен и подвергается атаке, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда чистой стратегией стороны B является выбор натурального числа $k \in \{1, \ldots, n\}$ — номер сервера, который не будет защищаться. Чистой стратегией стороны A будет пара (i, j), где $(i, j) \in I$. Определим выигрыш стороны A следующим образом:

$$h((i, j), k) = \begin{cases} 0 \text{ если } k \notin \{i, j\}, \\ \alpha_i, \text{ если } k = i, \\ \alpha_j, \text{ если } k = j. \end{cases}$$

Обозначим пару $(i, i+1)$ для $i = 1, \ldots, n-1$ через i, а пару $(n, 1)$ через n. Получаем матричную игру с матрицей выигрыша H вида

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Считаем, что $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, при этом все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ одновременно не равны 0.

Утверждение 2. В данной игре отсутствует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Действительно, для данной матрицы H имеем

$$\max_k \min_l h_{kl} = 0, \quad \min_l \max_k h_{kl} = \alpha_1 > 0$$

и поэтому в силу теоремы 1 в игре отсутствует ситуация равновесия в чистых стратегиях.

Замечание 2. Если все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равны нулю, то в игре любая ситуация является ситуацией равновесия в чистых стратегиях.

Лемма 1. Пусть $n = 2k+1$ и дана система уравнений

$$\begin{gathered} x_1 + x_{2k+1} = b_1, \\ x_i + x_{i+1} = b_{i+1},\ i = 1, \ldots, 2k, \\ x_{2k} + x_{2k+1} = b_{2k+1}. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда решение системы представимо в виде

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2}\big(b_1 + b_2 + \ldots + b_{2k+1} - b_2 - b_4 - \ldots - b_{2k}\big),$$

$$x_{2k} = \frac{1}{2}\big(b_2 + b_4 + \ldots + b_{2k} + b_{2k+1} - b_1 - b_3 - \ldots - b_{2k-1}\big),$$

$$\begin{gathered} x_{2p} = \frac{1}{2}\big(b_2 + b_4 + \ldots + b_{2p} + b_{2p+1} + b_{2p+3} + \ldots + b_{2k+1} - \\ - b_1 - b_3 - \ldots - b_{2p-1} - b_{2p+2} - \ldots - b_{2k}\big), \end{gathered}$$

$$x_{2p+1} = \frac{1}{2}\big(b_1 + b_3 + \ldots + b_{2p+1} + b_{2p+2} + \ldots + b_{2k} -$$
$$- b_2 - b_4 - \ldots b_{2p} - b_{2p+3} - \ldots - b_{2k+1}\big),$$
$$p = 1, 2, \ldots, k-1,$$
$$x_1 = \frac{1}{2}\big(b_1 + b_2 + b_4 + \ldots + b_{2k} - b_3 - b_5 - \ldots - b_{2k+1}\big).$$

Справедливость леммы проверяется непосредственной подстановкой.

Лемма 2. Пусть для системы (2) выполнены следующие условия:

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{2k+1}.$$

Тогда для решения системы (2) справедливы следующие неравенства:

1. $x_{2p+1} \geqslant 0$ для всех $p = 0, 1, \ldots, k$;

2. $x_{2p} \geqslant x_{2p+2}$ для всех $p = 1, 2, \ldots, k-1$.

Доказательство. В силу леммы 1 x_{2p+1} представимо в виде

$$x_{2p+1} = \frac{1}{2} b_{2k+1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big[(b_1 - b_2) + \ldots + (b_{2p-1} - b_{2p}) + (b_{2p+2} - b_{2p+3}) + \ldots + (b_{2k} - b_{2k+1})\Big].$$

Из условия леммы сразу следует справедливость пункта 1.

Из леммы 1 следует, что

$$x_{2p} - x_{2p+2} = \frac{1}{2}\big(b_{2p+1} - b_{2p+2}\big) \geqslant 0,$$

откуда следует справедливость пункта 2 леммы. Лемма доказана.

Введем следующие обозначения: $a_i = \frac{1}{\alpha_j}$,

$$S_{2k+1} = \frac{1}{2}\big(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k+1} - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2k}\big),$$
$$S_{2k} = \frac{1}{2}\big(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k} + a_{2k+1} - a_1 - a_3 - \ldots - a_{2k-1}\big),$$
$$S_{2p} = \frac{1}{2}\big(a_2 + a_4 + \ldots a_{2p} + a_{2p+1} + a_{2p+3} + \ldots + a_{2k+1} -$$
$$- a_1 - a_3 - \ldots - a_{2p-1} - a_{2p-2} - \ldots - a_{2k}\big),$$

$$S_{2p+1} = \frac{1}{2}\big(a_1 + a_3 + \ldots + a_{2p+1} + a_{2p+2} + \ldots + a_{2k} - \\ - a_2 - a_4 - \ldots - a_{2p} - a_{2p+3} - \ldots - a_{2k+1}\big), \\ p = 1, 2, \ldots, k-1,$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\big(a_1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k} - a_3 - a_5 - \ldots - a_{2k+1}\big).$$

Теорема 3. Пусть $n = 2k+1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k+1}$ таковы, что $\alpha_1 > 0$ и $S_{2k} \geqslant 0$. Тогда (X^*, Y^*) — ситуация равновесия, v — цена игры, где

$$v = \frac{2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k+1}}, \quad x_i^* = v \cdot S_i, \quad i = 1, \ldots, 2k+1,$$
$$y_j^* = \frac{1}{2} a_j v, \quad j = 1, 2, \ldots, 2k+1.$$

Доказательство. Из леммы 2 и предположения теоремы следует, что $R_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $x_i^* \geqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $y_j^* \geqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Кроме того,

$$x_1^* + \ldots + x_n^* = v(S_1 + \ldots S_n) = v\frac{a_1 + \ldots + a_n}{2} = 1,$$
$$y_1^* + \ldots + y_n^* = \frac{1}{2}\big(a_1 + \ldots + a_n\big) = 1.$$

Значит, (X^*, Y^*) — смешанные стратегии. В соответствии с теоремой (см. [6, с. 30]) пара (X^*, Y^*) является ситуацией равновесия, а v — цена игры тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ справедливы неравенства (1). Имеем

$$H_{i\cdot} Y^* = \alpha_i y_i^* + \alpha_{i+1} y_{i+1}^* = \frac{1}{2}\alpha_i v a_i + \frac{1}{2}\alpha_{i+1} v a_{i+1} = v.$$

Кроме того,

$$X^* H_{\cdot 1} = \alpha_1 x_1^* + \alpha_1 x_n^* = \alpha_1 (v S_1 + v S_n) = \alpha_1 v a_1 = v,$$
$$X^* H_{\cdot j} = \alpha_{j+1} x_j^* + \alpha_{j+1} x_{j+1}^* = \alpha_{j+1}(v S_{j+1} + v S_j) = \alpha_{j+1} v a_{j+1} = v,$$

для всех $j = 2, \ldots n$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $n = 2k+1$, $\alpha_1 > 0$ и существует $p \in \{1, \ldots, k\}$, такой, что выполнено одно из следующих двух условий:

1. $p \geqslant 2$, $S_{2p} < 0$, $S_{2p-2} \geqslant 0$.

2. $p = 1$, $S_2 < 0$.

Тогда (X^*, Y^*) — ситуация равновесия, v — цена игры, где

$$v = \frac{1}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}}, \quad y^*_{2k+1} = y^*_{2i} = 0, \quad y^*_{2i-1} = va_{2i-1}, i = 1, \ldots, k,$$

$$x^*_{2p} = x^*_{2p+2} = \ldots = x^*_{2k} = 0, \quad x^*_{2k-1} = va_{2k},$$

$$x^*_1 = v\big(a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots + a_{2p-2} - a_{2p-1} + a_{2p}\big),$$

$$x^*_{2j+1} = v\big(a_{2j+2} - a_{2j+3} + \ldots + a_{2p-2} - a_{2p-1} + a_{2p}\big), \ j = 1, \ldots, p-2,$$

$$x^*_{2l+1} = va_{2l+1}, \quad , l = p, p+1, \ldots, k-1,$$

$$x^*_{2k+1} = v\big(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2p-1} - a_{2p}\big),$$

$$x^*_{2l} = v\big(a_{2l+1} - a_{2l+2} + a_{2l+3} - a_{2l+4} + \ldots + a_{2p-1} - a_{2p}\big), l = 1, \ldots, p-1.$$

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 5. Пусть $n = 2k$, $\alpha_1 > 0$. Тогда (X^*, Y^*) — ситуация равновесия, а v — цена игры, где

$$v = \frac{1}{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}}, \quad x^*_{2j} = y^*_{2j} = 0, \quad j = 1, \ldots, k,$$

$$x^*_{2j-1} = y^*_{2j-1} = va_{2j-1}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.

Список источников

1. Гуц А. К., Вахний Т. В. Теория игр и зашита информации. Омск: Изд-во Омского ун-та, 2013. 160 с.

2. Дроботун Е. Б. Теоретические основы построения систем защиты от компьютерных атак для автоматизированных систем управления. СПб.: Наукоемкие технологии, 2017. 120 с.

3. Manshaei M. H., Zhu Q., Alpcan T., Basar T., Hubaux J.-P. Game theory meets network security and privacy// *ACM Comput. Surv.* 2013. Vol. 45, no. 3, Article 25 (June 2013), 39 p.

4. Corona I., Giacinto G., Roli F. Adversarial attacks against intrusion detection systems: Taxonomy, solutions and open issues // *Information Sciences.* 2013. Vol. 239, pp. 201–225.

5. Быков А. Ю., Шматова Е. С. Алгоритмы распределения ресурсов для защиты информации между объектами информационной системы на основе игровой модели и принципа равной защищенности объектов//*Наука и Образование. Электрон. журн. / МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2015. № 9. С. 160–187.

6. Петросян Л. А., Зенкевич Н. Л., Шевкопляс Е. В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

References

1. **Guts A.K., Vakhniy T. V.** *Teoriya igr i zashita informacii* [Game theory and information protection]. Omsk: Izd-vo Omskogo un-ta, 2013. 160 p. (In Russ.)

2. **Grobotun E.E.** *Teoreticheskie osnovy postroeniya sistem zashhity ot kompyuternyx atak dlya avtomatizirovannyx sistem upravleniya* [Theoretical foundations for building protection systems against computer attacks on automated systems management]. SPB.: High technologies, 2017. 120 p. (In Russ.)

3. **Manshaei M. H., Zhu Q., Alpcan T., Basar T., Hubaux J.-P.** Game theory meets network security and privacy. *ACM Comput. Surv.* 2013. Vol. 45, no. 3, Article 25 (June 2013), 39 p.

4. **Corona I., Giacinto G., Roli F.** Adversarial attacks against intrusion detection systems: Taxonomy, solutions and open issues. /*Information Sciences.* 2013. Vol. 239, pp. 201-–225.

5. **Bykov A. Yu., Shmatova E. S.** The Algorithms of Resource Distribution for Information Security Between Objects of an Information System Based on the Game Model and Principle of Equal Security of Objects. *Science and Education of the Bauman MSTU.* 2015, no 09, pp. 160–187. (In Russ.)

6. **Petrosyan L. A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E. V.** *Teoriya igr* [Game Theory]. SPB.: BHV-Peterburg, 2012. 432 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Николай Никандрович Петров / Nikolai N. Petrov
д.ф.-м.н., профессор кафедры дифференциальных уравнений / Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Differential Equations
Удмуртский государственный университет / Udmurt State University
426034, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 / 426034, Udmurt Republic, Izhevsk, Universitetskaya St., 1

Дилшодбек Мансурович Аллашкуров / Dilshodbek M. Allashkurov
магистр / student
Ургенчский государственный университет/ Urgench State University
220100, Узбекистан, г. Ургенч, ул. Хамида Алимджана, 14 / 220100, Uzbekistan, Urgench, ul. Khamida Alimdjana, 14

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 12.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 20.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 25.09.2022