Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

НАСТАВНИК – УЧЕНИК

Научная статья

УДК 517.9, 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_64

К решению неоднородного бигармонического уравнения

Андрей Васильевич Ермоленко, Никита Вадимович Кожагельдиев
Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина

Аннотация. При расчете напряженно–деформированного состояния пластин возникает необходимость в решении неоднородного бигармонического уравнения, сложность которого обусловлена наличием четвертых производных. В статье рассматривается обзор методов решения таких уравнений, при этом приводится реализация трех методов решения – метода Галеркина и двух итерационных методов. Приводится алгоритм построения тестовых примеров.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод Галеркина, итерационные методы

Для цитирования: Ермоленко А. В., Кожагельдиев Н. В. Численное решение неоднородного бигармонического уравнения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 64–78. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_64

MENTOR – STUDENT

Original article

On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation

Andrey V. Yermolenko, Nikita V. Kozhageldiev
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

Annotation. When calculating the stress-strain state of plates, it becomes necessary to solve an inhomogeneous biharmonic equation, the complexity of which is due to the presence of fourth derivatives. The article considers a review of methods for solving such equations, while the implementation of three solution methods is given - the Galerkin method and two iterative methods. An algorithm for constructing test cases is given.

Keywords: biharmonic equation, Galerkin method, iterative methods

For citation: Yermolenko A. V., Kozhageldiev N. V. On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 64–78. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_64

1. Введение

Решение бигармонического уравнения остается актуальной задачей, так как является базовой частью более сложных задач механики жидкости и газа, например, расчет течения вязкой жидкости [1] или определение напряженно–деформированного состояния пластин и оболочек [2].

Нелинейное бигармоническое уравнение является типичным эллиптическим уравнением четвертого порядка и в декартовых координатах имеет вид[1]

$$\Delta^2 w = f, \tag{1}$$

[1]Для простоты изложения рассматриваем решения на единичном квадрате.

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$$

Рис. 1. 13-точечный трафарет

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, w = w(x, y), f = f(x, y), x, y \in (0, 1)$.

Наиболее простой в построении сетки численный метод решения бигармонического уравнения для прямоугольной пластины – это метод конечных разностей. При этом возможны два подхода, первый заключается в введении новой функции $u(x, y)$ [3–5], такой, что

$$\Delta w = u,$$

$$\Delta u = f.$$

Недостатком данного подхода является то, что граничные условия на функцию w избыточны, а для функции u их необходимо определять из некоторых дополнительных условий. Второй подход связан с аппроксимацией бигармонического оператора по 13-точечному трафарету, см. рис. 1, с последующим переходом от двумерной задачи к одномерной, см., например, [2], и решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

СЛАУ можно решать как с использованием прямых (точных), так и с помощью итерационных методов приближенно с заданной точностью. Несмотря на точное решение, существенным недостатком прямых подходов является большая размерность и разряженность матриц. Поэтому востребованы итерационные методы, которые, как правило, требуют меньшее количество арифметических операций.

При этом итерационными могут быть не только методы решения СЛАУ, но и самого бигармонического уравнения, см., например, [6–8].

Альтернативой конечным разностям являются конечные элементы [7; 9]. Метод конечных элементов позволяет строить более гибкую сетку, однако создание сетки конечных элементов с большим числом узлов и элементами различных размеров, форм и ориентаций также является нетривиальной задачей.

Одним из направлений развития итерационных методов решения систем алгебраических уравнений, возникающих из конечно-элементной и конечно-разностной дискретизации эллиптических краевых задач, являются многосеточные методы [10; 11].

Существуют и другие подходы к бигармоническому уравнению. К ним, например, относятся использование граничных интегральных уравнений с аппроксимацией быстрыми преобразованиями Фурье [12], быстрый метод мультиполей [13], метод сплайн-коллокации [14].

Целью представленной статьи является описание решения нелинейного бигармонического уравнения тремя алгоритмами.

Для проверки решения подобраны несколько модельных задач.

2. Материалы и методы

Данное исследование построено на базе использования теоретического и численного методов исследования. Применение теоретического метода позволило провести анализ способов решения бигармонического уравнения, выбрать наиболее эффективные способы решения уравнения. На основе выбранных методов проводится численный эксперимент по определению наиболее эффективного способа решения бигармонического уравнения.

3. Результаты

3.1. Метод Галеркина

Применен метода Галеркина [7] к решению следующей краевой задачи[2]:

$$\Delta^2 w = f, \tag{2}$$

[2]В терминах механики пластин данная краевая задача соответствует задаче определения прогиба жестко закрепленной прямоугольной пластины единичной ширины и длины под действием нормальной нагрузки с использованием уравнения Софи Жермен – Лагранжа [15].

$$w(0,y)=0, w(1,y)=0, \frac{\partial w}{\partial x}(0,y)=0, \frac{\partial w}{\partial x}(1,y)=0, y\in[0,1],$$
$$w(x,0)=0, w(x,1)=0, \frac{\partial w}{\partial y}(x,0)=0, \frac{\partial w}{\partial y}(x,1)=0, x\in[0,1]. \quad (3)$$

Рассмотрим функции

$$\Phi_{kl}(x,y)=x^k(x-1)^2y^l(y-1)^2, k,l=2,3,...,$$

удовлетворяющие граничным условиям (3).

Решение краевой задачи $\{(2),(3)\}$ ищем в виде

$$w(x,y)=\sum_{k=2}^{p+1}\sum_{l=2}^{p+1}c_{kl}\Phi_{kl}(x,y), p>1,$$

перепишем последнюю двойную сумму в следующем виде:

$$w(x,y)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,y), \quad (4)$$

где c_j – неизвестные коэффициенты, $n=p^2$, $\varphi_1=\Phi_{22}, \varphi_2=\Phi_{23}, ...$

На основании (2), (4) определим невязку R так:

$$R=\sum_{j=1}^{n}C_j\Delta^2(\varphi_j)-f,$$

используя которую, коэффициенты C_j найдем из системы уравнений

$$(R,\varphi_i)=0, i=1,..,n,$$

где

$$(R,\varphi_i)=\int_0^1\int_0^1 R(x,y)\varphi_i dxdy.$$

3.2. Итерационные методы

3.2.1. Сеточный метод с использованием фиктивной переменной

В качестве первого итерационного метода решения бигармонического уравнения рассмотрим подход, предложенный в статье [8]. Для этого наряду с краевой задачей $\{(2),(3)\}$ рассмотрим следующую задачу при $t \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \Delta^2 Z = f, \tag{5}$$

$$Z(x,y,0) = 0,$$

$$Z(0,y,t) = 0, Z(1,y,t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial x}(0,y,t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial x}(1,y,t) = 0, y \in [0,1],$$

$$Z(x,0,t) = 0, Z(x,1,t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial y}(x,0,t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial y}(x,1,t) = 0, x \in [0,1]. \tag{6}$$

Для построения конечно–разностной аппроксимации, задав количество разбиений n по осям Ox, Oy, введем сетку

$$x_i = ih, y_j = jh, h = 1/n, i, j = 1,..,n, t_k = k\tau,$$

где τ – шаг по переменной t.

Условие $Z(0,y,t) = 0$ дает, что $Z_{0j}^k = 0$ при всех j и k. Далее, записывая условие $\dfrac{\partial Z}{\partial x}(0,y,t) = 0$ в виде

$$\frac{Z_{1j}^k - Z_{0j}^k}{h} = 0,$$

получаем $Z_{1j}^k = 0$. Таким образом получены первые два соотношения из следующих:

$$Z_{0j}^k = 0, Z_{1j}^k = 0, Z_{n-1j}^k = 0, Z_{nj}^k = 0,$$

$$Z_{i0}^k = 0, Z_{i1}^k = 0, Z_{in-1}^k = 0, Z_{in}^k = 0.$$

На рис. 2 закрашенными точками отмечены узлы, в которых $Z_{ij}^k = 0$. Это означает, что в дальнейшем при выполнении итерационной схемы эти точки не рассматриваем, а индексы i, j изменяются от 2 до $n-2$.

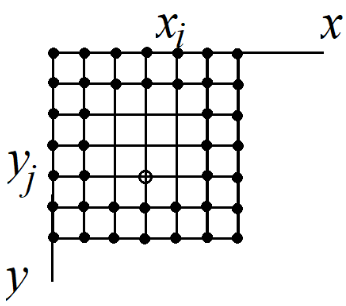

Рис. 2. Сетка

Бигармонический оператор с учетом рис. 1 запишем в виде

$$(\Delta^2 Z)_{ij}^k = \frac{1}{h^4}\big(Z_{i+2j}^k + Z_{i-2j}^k + Z_{ij+2}^k + Z_{ij-2}^k -$$

$$-8Z_{i+1j}^k - 8Z_{i-1j}^k - 8Z_{ij+1}^k - 8Z_{ij-1}^k +$$

$$+2Z_{i+1j+1}^k + 2Z_{i+1j-1}^k + 2Z_{i-1j+1}^k + 2Z_{i-1j-1}^k + 20Z_{ij}^k\big), \tag{7}$$

а частную производную по t – так:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{ij}^k = \frac{Z_{ij}^{k+1} - Z_{ij}^k}{\tau}. \tag{8}$$

Рассматривая вместо функции $f(x,y)$ дискретные значения $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, подставляя (7), (8) в уравнение (5) и выражая Z_{ij}^{k+1}, получим следующую итерационную схему:

$$Z_{ij}^{k+1} = Z_{ij}^k + \tau(f_{ij} - (\Delta^2 Z)_{ij}^k). \tag{9}$$

В качестве начальных значений берем $Z_{ij}^0 = 0$.

Вопросы сходимости схемы (9) описаны в работе [8].

Решение задачи (1) на основе схемы (9) имеет вид

$$w_{ij} = \lim_{k\to+\infty} Z_{ij}^k,$$

где $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ – значения неизвестной функции на сетке.

3.2.2. Сеточный метод типа Либмана

В работе [6] для решения уравнения Лапласа используется метод Либмана. Применим данный метод для решения бигармонического уравнения. Для этого, выражая из конечно–разностной аппроксимации бигармонического уравнения (см. (1), (7)) слагаемое w_{ij}, будем иметь

$$w_{ij} = \frac{h^4 f_{ij}}{20} - \frac{1}{20}\big(w_{i+2j} + w_{i-2j} + w_{ij+2} + w_{ij-2} -$$
$$-8w_{i+1j} - 8w_{i-1j} - 8w_{ij+1} - 8w_{ij-1} +$$
$$+2w_{i+1j+1} + 2w_{i+1j-1} + 2w_{i-1j+1} + 2w_{i-1j-1}\big), \tag{10}$$

таким образом получили, что для определения значения в узле (i,j) необходимо знать значения в 12 соседних узлах (см. рис. 1).

С учетом сказанного определяем итерационную схему так. На двух крайних рядах узлов, помеченных закрашенными кружочками на рис. 2, полагаем $w_{ij} = 0$. Во внутренних точках в качестве начального приближения также полагаем $w^0_{ij} = 0$. Далее на основании (10) определяем следующую итерационную схему:

$$w^{k+1}_{ij} = \frac{h^4 f_{ij}}{20} - \frac{1}{20}\big(w^k_{i+2j} + w^k_{i-2j} + w^k_{ij+2} + w^k_{ij-2} -$$
$$-8w^k_{i+1j} - 8w^k_{i-1j} - 8w^k_{ij+1} - 8w^k_{ij-1} +$$
$$+2w^k_{i+1j+1} + 2w^k_{i+1j-1} + 2w^k_{i-1j+1} + 2w^k_{i-1j-1}\big). \tag{11}$$

3.3. Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента были написаны программы на языке Python [15]. В качестве модельных точных решений были взяты функции

$$w_1(x,y) = x^2(x-1)^2y^2(y-1)^2, \tag{12}$$

$$w_2(x,y) = \begin{cases} (x-0,5)^2(x-1)^2(y-0,5)^2(y-1)^2, & x,y \in (0,5;1),\\ 0, & x,y \notin (0,5;1). \end{cases} \tag{13}$$

Данные функции удовлетворяют краевой задаче $\{(2),(3)\}$ при следующих правых частях:

$$f_1(x,y) = 24x^2(x-1)^2+24y^2(y-1)^2+2(12x^2-12x+2)(12y^2-12y+2), \quad (14)$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 6(2y-1)^2(y-1)^2+ \\ +(24x^2-18x+13)(24y^2- \\ -18y+13)/4+6(2x-1)^2(x-1)^2, & x,y \in (0,5;1), \\ 0, & x,y \notin (0,5;1). \end{cases} \quad (15)$$

Можно легко убедиться, что при подстановке пар (12), (14) и (13), (15) в уравнение (2) получается тождество.

При этом в каждом эксперименте рассчитывалась погрешность вычислений по формуле

$$\delta = \frac{||w-w_{true}||}{||w_{true}||} * 100\%,$$

где

$$||u||^2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x,y)dxdy,$$

w – решение задачи (2)–(3), вычисленное одним из методов, w_{true} – точное решение.

Результат метода Галеркина существенно зависит от выбора базовых функций, при выбранной правой части в виде (14) погрешность равна 5 % при $p=2$ и числе узлов разбиения 80 при вычислении интегралов. При этом погрешность решения для правой части в виде (15) при выбранных функциях Φ_{kl} является значительной.

На рис. 3, 4 показано решение задачи (1) по схеме (9). При этом результаты экспериментов, соответствующих работе [8], совпадают по форме и максимальным значением.

Что касается схемы (11), то для предложенных примеров удалось достичь погрешность только в 31 %.

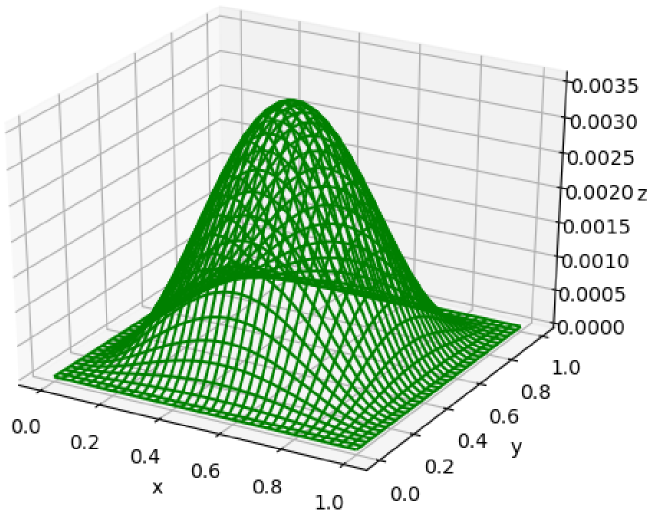

Рис. 3. Схема (9), количество итераций 15000, $\tau = 6 \cdot 10^{-8}$, погрешность 11 %

4. Обсуждение

Представленная работа поможет молодым ученым, использующим математическое моделирование, обоснованно выбирать методы численного решения.

Список источников

1. **Казакова А. О., Петров А. Г.** Расчет течения вязкой жидкости между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2019. Т. 59. № 6. С. 1063–1082.

2. **Ермоленко А. В., Мельников В. А.** Расчет контактного взаимодействия прямоугольной пластины и основания по теории Кармана // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2018. Вып. 2 (27). С. 86–92.

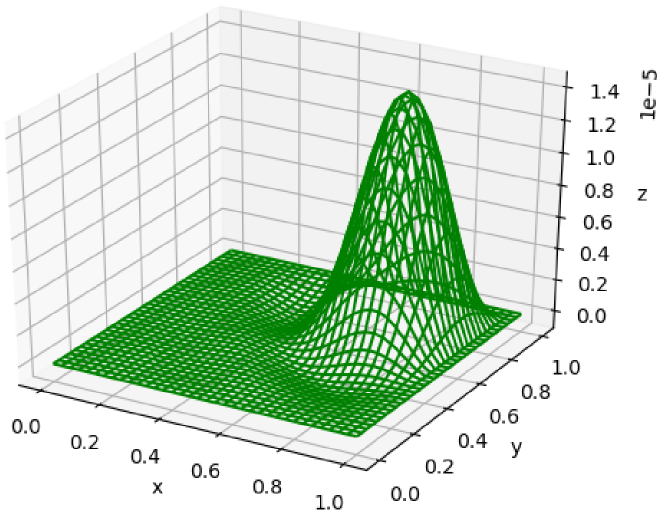

Рис. 4. Схема (11), количество итераций 200, $\tau = 6 \cdot 10^{-8}$, погрешность 23 %

3. **Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D.** A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains // *SIAM J.* 2009. No 47. Pp. 3087—3108.

4. **Linden J.** A Multigrid Method for Solving the Biharmonic Equation on Rectangular Domains // *Advances in Multi-Grid Methods : proceedings of the conference held in Oberwolfach, December 8 to 13, 1984*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1985. (Notes on numerical fluid mechanics; Vol. 11). Pp. 64–66.

5. **Кобельков Г. М.** О сведении краевой задачи для бигармонического уравнения к задаче типа Стокса // *Докл. АН СССР*. 1985. Т. 283. № 3. С. 539–541.

6. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З .** Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математичекой литературы, 1963. 400 с.

7. **Михайловский Е. И.** Лекции по вариационным методам механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2002. 256 с.

8. **Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И.** Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10.* 2013. Вып. 1. С. 52–62.

9. **Еременко С. Ю.** Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Изд-во «Основа» при Харьк. ун-те, 1991. 272 с.

10. **Федоренко Р. П.** О скорости сходимости одного итерационного процесса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. Т. 4. № 3. С. 559–564.

11. **Brenner S. C.** An optimal-order nonconforming multigrid method for the biharmonic equation // *SIAMJ. Numer. Anal.* 26 (1989). Pp. 1124-1138.

12. **Jiang Y., Wang B., Xu Y.** A fast Fourier–Galerkin method solving a boundary integral equation for the biharmonic equation // *SIAM J. Numer. Anal.* 2014. V. 52. № 5. Pp. 2530–2554.

13. **Greenbaum A., Greengard L. , Mayo A.** On the numerical solution of the biharmonic equation in the plane // *Phys. D.* 60 (1992). Pp. 216–225.

14. **Ромакина О. М., Шевцова Ю. В.** Метод сплайн-коллокации и его модификация в задачах статического изгиба тонкой ортотропной прямоугольной пластинки // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2010. Т. 10. № 1. С. 78–82.

15. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета.*

Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

References

1. **Kazakova A. O., Petrov A. G.** Calculation of the flow of a viscous fluid between two arbitrarily moving cylinders of arbitrary section. *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2019. Vol. 59. No 6. Pp. 1063–1082. (In Russ.)

2. **Yermolenko A. V., Melnikov V. A.** Calculation of the contact interaction of a rectangular plate and a base by the Karman theory. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2018, 2 (27). Pp. 86–92. (In Russ.)

3. **Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D.** A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains. *SIAM J.*, 2009, No 47, pp. 3087—3108.

4. **Linden J.** A Multigrid Method for Solving the Biharmonic Equation on Rectangular Domains. *Advances in Multi-Grid Methods : proceedings of the conference held in Oberwolfach, December 8 to 13, 1984*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1985. (Notes on numerical fluid mechanics; Vol. 11), pp. 64–66.

5. **Kobel'kov G. M.** On the reduction of a boundary value problem for a biharmonic equation to a Stokes-type problem. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1985, Vol. 283, No 3, pp. 539–541. (In Russ.)

6. **Demidovich B. P., Maron I. A., SHuvalova E. Z.** *Chislennye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moskva: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematichekoj literatury, 1963. 400 p. (In Russ.)

7. **Mihajlovskii E. I.** *Lekcii po variacionnym metodam mekhaniki uprugih tel* [Lectures on variational methods of mechanics of elastic bodies]. Syktyvkar: Izd-vo Syktyvkarskogo universiteta, 2002. 256 p. (In Russ.)

8. **Ryazhskih V. I., Slyusarev M. I., Popov M. I.** Numerical integration of the biharmonic equation in the square domain. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10* [Herald of St. Petersburg University. Series 10]. 2013, No. 1, pp. 52–62. (In Russ.)

9. **Eremenko S. YU.** *Metody konechnyh elementov v mekhanike deformiruemyh tel* [Finite element methods in mechanics of deformable bodies]. Kharkov: Izd-vo "Osnova" pri Har'k. un-t, 1991. 272 p. (In Russ.)

10. **Fedorenko R. P.** On the rate of convergence of one iterative process. *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.* [Journal of Computational and Mathematical Physics], 1964, Vol. 4, No 3, pp. 559—564. (In Russ.)

11. **Brenner S. C.** An optimal-order nonconforming multigrid method for the biharmonic equation. *SIAMJ. Numer. Anal.* 26 (1989), pp. 1124-1138.

12. **Jiang Y., Wang B., Xu Y.** A fast Fourier–Galerkin method solving a boundary integral equation for the biharmonic equation. *SIAM J. NUMER. ANAL.* 2014, Vol. 52, No 5, pp. 2530–2554.

13. **Greenbaum A., Greengard L. , Mayo A.** On the numerical solution of the biharmonic equation in the plane. *Phys. D*, 60 (1992), pp. 216–225.

14. **Romakina O. M., Shevcova YU. V.** Spline-collocation method and its modification in problems of static bending of a thin orthotropic rectangular plate. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestia of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2010, Vol. 10. No 1, pp. 78–82. (In Russ.)

15. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33), pp. 86–95. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Андрей Васильевич Ермоленко / Andrey V. Yermolenko

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Никита Вадимович Кожагельдиев / Nikita V. Kozhageldiev

студент / student

Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 10.09.2022

Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.09.2022

Принято к публикации / Accepted for publication 28.09.2022