Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_47

ИСТОРИЧЕСКИЕ ПУТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Асланов Рамиз Муталлим оглы[1], **Сушков Владислав Викторович**[2]

[1]Институт математики и механики НАН Азербайджана, e-mail: r_aslanov@list.ru

[2]Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: vvsu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена история возникновения и развития теории функции комплексного переменного как отрасли науки и её влияния на развитие соответствующей учебной дисциплины. В обоих случаях выделены основные этапы исторического процесса, указаны ключевые фигуры, даты, факты, публикации и результаты. Утверждается, что традиционная логика изложения учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. Разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, должна учитывать историю развития дисциплины, но также должна опираться на современные образовательные технологии и возможности электронных обучающих средств и ресурсов.

Ключевые слова: теория функций комплексного переменного, комплексный анализ, история математики, учебная дисциплина, этапы развития, образовательные технологии, методическая составляющая

Для цитирования: Асланов Р. М., Сушков В. В. Исторические пути возникновения и развития теории функций комплексного переменного // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 47–63. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_47

Methodical materials

Original article

Historical ways of emergence and development of complex analysis

Ramiz M. Aslanov[1], Vladislav V. Sushkov[2]
[1]Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, e-mail: r_aslanov@list.ru
[2]Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: vvsu@mail.ru

Abstract. The work considers the history of the emergence and development of the theory of the function of a complex variable as a branch of science and its influence on the development of the corresponding educational discipline. In both cases, the main stages of the historical process are highlighted, key figures, dates, facts, publications and results are indicated. It is argued that the traditional logic of the presentation of the educational discipline "Theory of functions of the complex variable"to a greater or lesser extent repeats the historical logic of the development of the scientific industry. The development of either specialized or as universal as possible textbooks adapted to different levels of teaching should take into account the history of the development of the discipline, but should be based on modern educational technologies and the possibilities of electronic teaching tools and resources.

Keywords: theory of functions of complex variable, complex analysis, history of mathematics, educational discipline, stages of development, educational technologies, methodological component

For citation: Aslanov R. M., Sushkov V. V. Historical ways of emergence and development of complex analysis. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 47–63. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_47

«Теория функций комплексного переменного» (ТФКП), или, иначе, «Комплексный анализ», – одна из дисциплин, считающихся сегодня классической и обязательной в рамках образовательных программ высшего образования для подготовки математиков, физиков, инженеров, педагогов и не только. В то же время её место и значение как в математической науке, так и в математическом образовании были сформированы исторической необходимостью. Более того, можно утверждать, что содержание и логика изложения ТФКП как дисциплины в значительной степени повторяют историю развития ТФКП как научной дисциплины. Эта логика развития понятийного аппарата, повторяемая в рамках учебного курса, позволяет в значительной степени обеспечить логику освоение студентами учебного материала, осознать целостный характер математики.

Начало развития комплексного анализа как науки принято отсчитывать с работ Джероламо Кардано, в частности с «Artis magnae sive de regulis algebraicis» (1545). Значение этой книги в истории математики позже, уже в XX веке, описано словами Феликса Клейна: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыш современной алгебры, выходящей за пределы античной математики» [1]. Важнейшее значение «Artis magnae…» заключалось не в прикладной значимости, а в его теоретической глубине, превосходящей все современные и предшествовавшие работы математиков Новой Европы. В работе Кардано приведено описание и обоснование приемов решений уравнений третьей и четвертой степени, как известно, открытых и развитых С. дель Ферро, Н. Тарталья и Л. Феррари. Однако обвинять Кардано в плагиате было бы неправомерно, он прямо указывал не только на авторство формул, но и на порядок попадания этих формул в его поле зрения. Несмотря на то что опубликованные формулы подразумевали использование квадратных корней из отрицательных чисел, сам Дж. Кардано полагал такие величины «софистически отрицательными», бесполезными (по тексту: «фиктивными» (fictae), хотя учитывал их при анализе уравнений и иногда использовал их как промежуточное средство для получения «истинного» результата) и старался не обращаться к ним вне умозрительных построений в рамках развитой теории.

Например, в своей работе Дж. Кардано ставит задачу: найти два числа a, b, сумма которых равна 10, а произведение равно 40. Решение $(5+\sqrt{-15}, 5-\sqrt{-15}$ или, в обозначениях Кардано, 5p:Rm:15 и 5m:Rm:15) он считает «софистическим», однако формально соответствующим условию. Полученный ответ «столь же тонок, сколь и бесполезен», утверждает Кардано, аргументируя своё отношение невозможностью с помощью таких чисел ни измерения какой-нибудь величины, ни выражения изменения какой-либо реальной величины [2].

В то же время чисто мыслительный эксперимент итальянских математиков привлек внимание других ученых, в частности их земляка Р. Бомбелли, который в своей книге «Алгебра» (L'Algebra, 1572) не только осознал структуру комплексных корней из вещественного числа, фактически указав на понятие комплексно-сопряжённых чисел [3], но и описал первые правила арифметических операций над «невозможными» числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Впрочем, в своих работах Бомбелли вообще серьёзно продвинул формальную сторону алгебры – например, он впервые использовал знак скобок (они имели вид прямой и зеркально отражённой буквы L) и числовое обозначение возведения в натуральную степень.

Вскоре, в 1637 году, появился и термин «мнимые числа» («воображаемые», imaginariae), введённый в труде «Геометрия» французским математиком и философом Р. Декартом. Само обозначение корня из (-1) первой буквой от этого слова было введено в обиход только спустя полтора столетия Л. Эйлером [4]. Мнимые корни появлялись у Декарта в решении задачи о пересечении окружности с параболой, описывая ситуацию не-пересечения и не-касания кривых. Впрочем, сам он полагал какую бы то ни было интерпретацию комплексных чисел бесполезной и писал в части, посвященной основной теореме алгебры: «Всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений» с оговоркой «…но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням» [5].

Осмысление новой отрасли знания продолжалось, отчасти не столько формализованное, сколько романтизированное (в 1702 году Г. В. Лейбниц писал: «То, что мы называем мнимым корнем – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием»). Впрочем, даже интуитивное использование комплексных чисел зачастую приводило к формулировке важных результатов, как, например, в 1707 году, когда Абрахам де Муавр опубликовал свою знаменитую формулу для вычисления степеней комплексных чисел для положительных целых n. А ещё до того, в 1685 году, Джон Валлис опубликовал «Трактат по алгебре», в котором, кроме всего прочего, привел геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Мнимую величину он понимает как «среднее пропорциональное между положительной и отрицательной величиной», действуя на классическом примере прямоугольного треугольника. Таким образом, Валлис первым пришел к изображению комплексных чисел не на прямой, а на плоскости, что, впрочем, осталось совершенно незамеченным современниками.

Фактаж в рамках новой отрасли математики нарастал, в 1702 году Иоганн Бернулли столкнулся с проблемой вычисления логарифма комплексного числа, к 1712 году Бернулли и Лейбниц спорили по поводу того, чем является логарифм отрицательного числа. В 1707 и 1722 годах Абрахам Муавр пришел к тригонометрической интерпретации комплексного числа, рассматривая решение уравнений высших порядков тригонометрическим способом, с помощью синусов кратных дуг. Но всё же только с работ Леонарда Эйлера (в частности, с «Введения в анализ бесконечно малых», 1748 [6]) в научный обиход вошли и комплексная переменная, и величина i – и тогда же началось систематическое освоение математиками возможностей нового аналитического аппарата. Изначально Эйлер рассматривал комплексную переменную при решении задачи разложения на линейные сомножители, однако впоследствии дал подробное описание элементарных функций комплексного переменного, а ещё позже – условий дифференцируемости и основных положений интегрального исчисления комплексного анализа.

Первый этап развития комплексного анализа как отрасли математики предоставляет преподавателю неограниченный объем исторического материала, позволяющего на конкретных математических и биографических примерах продемонстрировать как необходимость рассмотрения нового математического объекта – комплексного числа, так и взаимосвязь внутриматематических разделов, целостность научного знания как такового. Мотивация к изучению дисциплины обучающимися формируется обоими этими факторами.

В середине XVIII века комплексные числа всё ещё в значительной мере оставались «вещью в себе», постигались математиками постепенно, используясь скорее «по необходимости». Тот же Л. Эйлер в этот период пишет об обнаруженном «парадоксальном факте»: число

$$\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

оказывается вещественным, «весьма близким к 10/13», пытаясь найти объяснение «парадоксу». Однако прикладной характер «воображаемых величин» становился всё очевиднее. Одной из областей их приложений оказалась гидродинамика – в 1752 году Жан Д'Аламбер впервые сумел применить комплексный анализ при решении дифференциальных уравнений с частными производными. В статье «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» он рассматривает скорость $u(x,y) + v(x,y)\sqrt{-1}$.

В работах Д'Аламбера выведены соотношения между частными производными от действительной и мнимой части аналитической функции, к чему три года спустя пришел и Эйлер. Впоследствии эти соотношения были названы условиями Коши–Римана, хотя из принципа первенства их стоило бы именовать условиями Д'Аламбера–Эйлера. Разработанные Д'Аламбером математический аппарат и методология впоследствии начали применяться в теории потенциала – и далее широко и плодотворно практически повсеместно в гидродинамике и вообще математической физике.

В докладе «О формах дифференциалов углов, особенно с иррациональностями, которые интегрируются с помощью логарифмов и круговых дуг, Магистр естественных наук Академии представил 5 мая 1777 года» Л. Эйлер впервые ввел символ мнимой единицы i. [5] Именно с этого момента комплексные числа меняют статус с «формализм для вычислительных задач» на «самостоятельный математический объект», получают современное определение, описание свойств. Тогда же Эйлер ввел в рассмотрение по сути конформные отображения, называя их «подобными в малом», откуда взяло своё начало новое направление приложений комплексного анализа. В продолжение идей Л. Эйлера термин «конформность» был впервые использован двенадцатью годами позже него академиком Российской академии наук Ф.И. Шубертом, рассматривавшим в связи с астрономией и картографией понятие «конформная проекция» (хотя некоторые историки математики полагают первооткрывателем практического применения конформного отображения стереографической проекции на плоскость Птолемея, описавшего его ещё около 150 г.). Дальнейшее развитие теории нашло своё место в работах Ж.Л. Лагранжа – а после того, как в 1797 году в работе Каспара Весселя «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» [7] была предложена непротиворечивая наглядная геометрическая интерпретация комплексных чисел, начинают появляться работы, в которых были даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены действия над ними.

Удивительно при этом, что Вессель, геодезист-картограф Датской академии наук, писал свой знаменитый труд для не для математиков, а для профессиональных картографов. Он ввел понятие направленного отрезка, определил сложение как параллельное смещение плоскости, а умножение – как вращение плоскости с растяжением, тем самым полностью сформулировав нынешнюю геометрическую интерпретацию комплексных чисел и операций над ними, принятые в объемах современного курса ТФКП. Достаточно же общая теоретическая трактовка и геометрическая интерпретация была опубликована К.-Ф. Гауссом лишь в 1831 году [4].

Параллельно в работах того же Гаусса получила своё развитие теория интеграла от функции комплексного переменного. Новая отрасль ТФКП началась с данного им определения интеграла в комплексной плоскости, с доказанной интегральной теоремы о разложимости аналитической функции в степенной ряд. Чуть позже П.-С. Лаплас использовал комплексные переменные для вычисления отдельных трудных интегралов и развил метод решения разностных и дифференциальных линейных уравнений, известный сейчас под названием метода преобразований Лапласа.

Таким образом, Л. Эйлер и его современники оставили потомкам богатое наследие в виде огромного массива частично систематизированных, но в целом разрозненных фактов из области комплексного анализа. Фактологический материал требовал систематизации в виде единой теории – и вскоре явились математики, сумевшие сформировать стройное здание комплексного анализа, математической отрасли, давшей последователям богатейший инструментарий для применений.

Основные заслуги в создании целостной теории функций комплексного переменного принадлежат О.-Л. Коши, Б. Риману и К. Вейерштрассу. Каждый из них сформировал и развил одно из направлений ТФКП, ныне образующие совместно основное тело комплексного анализа. Каждый из них заложил фундамент огромной области комплексного анализа. Первая такая область получила название «теория моногенных или дифференцируемых функций». Её отцом-основателем принято считать Огюстена-Луи Коши. Он не только объединил и систематизировал разрозненные факты, доказанные предшественниками в области дифференциального и интегрального исчисления в комплексном анализе, но и сумел разъяснить глубинный смысл и взаимосвязь основных понятий и операций с мнимыми величинами. В своих работах О.-Л. Коши изложил базу всего последующего анализа – систематическую теорию пределов и основанные на ней теории рядов и элементарных функций, именно Коши представил теорему, полностью проясняющую проблему области сходимости степенного ряда. Чуть позже, в 1826 году, он ввел в обиход термин «вычет», понимая его как разность между значениями интегралов от функции комплексного переменного по двум разным путям. В последующие 3 года он фактически создал стройную и логически безупречную теорию вычетов, ставшую в итоге мощнейшим инструментом в приложениях ТФКП.

Коши вывел интегральную формулу, связавшую значение контурного интеграла со значением подынтегральной функции внутри контура; получил теорему существования разложения функции комплексного переменного в степенные ряды, заложил основы теории аналитических функций многих переменных, определил главные ветви многозначных функций комплексного переменного, впервые использовал для вычислений разрезы плоскости. В 1850 году Коши ввел понятие монодромных функций и выделил класс моногенных функций. Материал, сформулированный и представленный Огюстеном-Луи Коши и его предшественниками, в первую очередь Леонардом Эйлером, составляет базу любого учебного курса ТФКП, в каком варианте бы он ни излагался.

Более того, с 1821 году сам Коши начал читать курс анализа в Политехнической школе, в рамках которого излагались основы комплексного анализа. Современники сообщали о бурном недовольстве его студентов [8] фактом изучения «воображаемых» комплексных чисел, полагая эти знания бесполезными. Впрочем, первое в истории обучение комплексным числам базировалось на достаточно формальном операционном изложении темы в Analyse algébrique, потому негодование обучающихся вполне объяснимо.

В отличном от идей О.-Л. Коши направлении начал развивать комплексный анализ Бернхард Риман – он оформил другое, «геометрическое», направление развития ТФКП. В 1851 году в докторской диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» он предложил связывать функции комплексного переменного с отображениями одной области комплексной плоскости на другую, что, во-первых, позволило воспользоваться сильными сторонами имеющейся геометрической интерпретации и сразу же дало простор для возможных приложений, а во-вторых – позволило наглядно продемонстрировать, что функции комплексного переменного являются расширением понятия функции вещественного переменного. Это стало существенно новым шагом в истории теории аналитических функций и позволило в дальнейшем эффективно выстраивать учебный курс ТФКП как учебную дисциплину, расширяющую стандартный курс вещественного математического анализа и дающую логическое объяснение многим фактам, необъяснимым в рамках этого вещественного анализа. Именно Риман описал различия между функциями комплексного и действительного переменного, а также положил начало геометрической теории функций, введя понятие точек ветвления [9], логичным продолжением чего стало рассмотрение так называемых римановых поверхностей. Доказательство теоремы о существовании конформного отображения односвязных областей позволило Б. Риману стать основателем полноценной теории конформных отображений. В своих работах он вскрыл внутреннюю взаимосвязь комплексного анализа с другими отраслями математики, что позволило создавать новые разделы теории на междисциплинарном пространстве. В частности, именно Риман установил взаимосвязь между аналитическими и гармоническими функциями, а также смог применить комплексный анализ в теории чисел, в частности, введя в рассмотрение дзета-функцию.

Ещё одно направление развития ТФКП сформировалось благодаря реализации возможности представления функций степенными рядами, что породило новое, «аналитическое» направление развития комплексного анализа [1]. В его основу легли результаты Карла Вейерштрасса, доказавшего, что множество всех комплекснозначных многочленов позволяет с любой требуемой точностью воспроизводить значения любой непрерывной функции. Он сумел описать сходимость последовательности аналитических функций, обобщить теорему Коши о разложении функции комплексного переменного в степенной ряд, описал процесс аналитического продолжения степенных рядов и его применение в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках развитой теории Вейерштрасс сформулировал и доказал теоремы об операциях над степенными рядами и поставил их, с учетом отношения аналитического продолжения, в центр теории аналитических функций. Также Вейерштрассом была доказана теорема о разложении целой функции в произведение, он заложил основы теории аналитических функций многих переменных, построил основы теории делимости степенных рядов. Идеи Вейерштрасса продолжили в своих работах его ученики М. Г. Миттаг-Лефлер и К. Г. Шварц.

Несмотря на то что ещё в 1850 году профессор И. И. Сомов, опираясь на работы Якоби, издал свой труд «Основания теории аналитических функций», а в 1856 году небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного» Ш. Брио и Т. Буке стал первым известным учебным пособием по комплексному анализу, но именно Карла Вейерштрасса принято считать основателем ТФКП как учебной дисциплины. С 1856 года Вейерштрасс читал лекции о представлении функций в виде степенных рядов, а с 1861 года – лекции по ТФКП в целом [4]. В 1876 году появилось его сочинение «К теории однозначных аналитических функций», а в 1880 году «К учению о функциях». С изданием упомянутых трудов, максимально близко соответствующих понятию учебника в современном его понимании, развитая Вейерштрассом и его предшественниками теория аналитических функций приобрела завершенную форму.

В этот же период одним из первых российских математиков, обратившихся к теме комплексных переменных, стал М. В. Остроградский, который исследовал интегралы от функций комплексного переменного, обобщил некоторые ранее доказанные частные утверждения, в частности, вывел формулу для вычета функции относительно полюса n-го порядка. О нём с уважением отзывался О.-Л. Коши («Этот русский молодой человек одарён большой проницательностью и весьма сведущ»). В обширном публичном курсе лекций, прочитанном в 1858—1859 годах, ставшем первым учебным курсом ТФКП в России, М. В. Остроградский делал упор на применения теории вычетов и формулы Коши к вычислению определенных интегралов.

Однако первым по-настоящему оригинальным русским исследователем в области ТФКП стал Ю. В. Сохоцкий, описавшим свои результаты в области приложений теории вычетов, аналитических функций, многочленов Лежандра в своей магистерской диссертации «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (1868). Там же был сформулирован и доказан общеизвестный фундаментальный результат о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки [10]. Впоследствии Ю. В. Сохоцкий начал читать лекционные курсы, а в его докторской диссертации (1873) впервые было введено в развернутом виде понятие интеграла типа Коши, понимаемого как интеграл «по траектории», соединяющей точки a и b, доказан ряд базовых теорем теории интегралов типа Коши.

С этого момента ТФКП как научная дисциплина вышла на этап экстенсивного расширения, началось создание функциональных отраслей приложений комплексного анализа, – а параллельно начала формироваться полноценная учебная дисциплина. К концу XIX века теория функций комплексного переменного включала в себя обширный комплекс разделов и дисциплин, а в начале XX века стало возможно констатировать факт появления учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного».

В отечественной высшей школе такая традиция длилась до середины XX века, например, в классическом учебнике В.И. Смирнова «Курс высшей математики» (1930) ТФКП всё ещё рассматривается как составная часть общих курсов [11], и только к 1950-м годам сформировались общие традиции преподавания дисциплины и были изданы классические учебники – А. И. Маркушевича («Теория аналитических функций» и

«Очерки по истории теории аналитических функций») и И. И. Привалова («Введение в теорию функций комплексного переменного»). После этого параллельно с развитием комплексного анализа как научной дисциплины был издан целый комплекс классических университетских учебников для студентов-математиков, физиков и обучающихся инженерных специальностей за авторством Б. А. Фукса, Б. В. Шабата, М. А. Лаврентьева, задачники и курсы лекций А. И. Маркушевича, М. И. Шабунина, М. А. Евграфова и других отечественных математиков. К тому времени базовый учебный курс «ТФКП» уже сформировался, что явственно следует из пояснения автора (Б. В. Шабат) к учебнику «Введение в комплексный анализ» 1969 года: «Первая часть, посвященная функциям одного переменного, содержит материал обязательного университетского курса. Вторая часть посвящена функциям нескольких переменных и содержит материалы основного спецкурса» [12].

С этого момента можно говорить о «канонизации» дисциплины ТФКП, ставшей полноценной частью учебного процесса. Необходимо отметить, что традиционно логика изложения учебной дисциплины в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. В последние годы работа математиков в области комплексного анализа была посвящена в первую очередь разработке эффективных приложений теории и, соответственно, учебных пособий в сопровождение соответствующих спецкурсов. Это породило значительный массив учебных пособий, учебников, сборников задач, ориентированных не на целостное освещение теории, а на проработку более-менее специфического материала, ориентированного на конкретные приложения ТФКП. Отдельным направлением деятельности в развитии методической составляющей преподавания дисциплины является разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, а также соответствующих электронных образовательных ресурсов и электронных пособий. Использование современных образовательных технологий открывает перед преподавателем новые перспективы в формировании учебного курса по комплексному анализу в зависимости от поставленных задач.

Однако в силу вариативности содержания учебного курса необходимость акцентированного изучения того или иного раздела, той или иной содержательной траектории теории функции комплексного переменного определяется необходимостью использования его в качестве инструмента или целостной отрасли математики. Выбор соответствующей содержательно-методической линии преподавания дисциплины в значительной степени совпадает с историческими линиями развития комплексного анализа, изложенными в нашей статье.

Список источников

1. **Гиндикин С. Г.** Великое искусство // *Рассказы о физиках и математиках.* 3-е изд., расш. М.: МЦНМО, 2001. С. 8–42.

2. **Никифоровский В. А.** Из истории алгебры XVI—XVII веков. М.: Наука, 1979. С. 42–88.

3. **Стиллвелл Д.** Математика и ее история. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. С. 130.

4. **Анохина Е. Ю.** История развития и становление теории функции комплексного переменного (ТФКП) учебным предметом // *Вестник ТГПИ. Естественные науки.* 2008. №1. С. 83–87.

5. **Синкевич Г.И.** История геометрических представлений комплексных чисел // *История науки и техники.* 2017. №4. С. 15–30.

6. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечно малых. М.; Л. 1936. Т. 1.

7. **Wessel C.** On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefl y to the Solution of Plane and Spherical Polygons. Smith D.E. // *A source book in Mathematics.* Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. 701 p. Pp. 55–66.

8. История математики. С древнейших времен до начала Нового времени // *История математики : в 3 т. / под ред. А. П. Юшкевича.* М.: Наука, 1970. Т. I. 352 с.

9. **Риман Б.** Сочинения. М.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1948.

10. **Маркушевич А. И.** Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций // *Историко-математические исследования, в 3 т.*, М.; Л., 1950.

11. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики для техников и физиков : в 5 т. М. ; Л., 1930. 467 с.

12. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ : в 2 т. Москва: Ленанд, 2020. 344 с.

References

1. Gindikin S. G. Great Art. *Rasskazy o fizikax i matematikax* [Stories about physicists and mathematicians. 3rd edition, expanded.] M.: ICNMO, 2001. Pp. 8–42. (In Russ.)

2. **Nikiforovsky V. A.** *Iz istorii algebry XVI—XVII vekov* [From the history of algebra of the XVI–XVII centuries]. M.: Science, 1979. Pp. 42–88. (In Russ.)

3. **Stillwell D.** *Matematika i ee istoriya* [Mathematics and its history]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2004. P. 130. (In Russ.)

4. **Anokhina E. Yu.** History of the development and formation of the theory of the function of the complex variable (TFKP) as a educational subject. *Vestnik TGPI. Estestvennye nauki* [Bulletin of TSPI. Natural sciences]. 2008. No 1. Pp. 83–87. (In Russ.)

5. **Sinkevich G. I.** History of geometric representations of complex numbers. *Istoriya nauki i tekhniki* [History of science and technology]. 2017. No 4. Pp. 15–30. (In Russ.)

6. **Euler L.** *Vvedenie v analiz beskonechno malyh* [Introduction to infinitesimal analysis]. Moscow-Leningrad, 1936. Vol. 1. (In Russ.)

7. **Wessel C.** On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefl y to the Solution of Plane and Spherical Polygons. Smith D.E. *A source book in Mathematics*. Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. Pp. 55–66.

8. History of mathematics. From ancient times to the beginning of the New Age. *Istoriya matematiki* [History of Mathematics] / edited by A.P. Yushkevich, in three volumes. M.: Science, 1970. Vol. I. 352 p. (In Russ.)

9. **Riemann B.** *Sochineniya* [Works]. M.: OGIZ; Gostekhizdat, 1948. (In Russ.)

10. **Markushevich A. I.** Contribution of Yu.V. Sokhotsky to the general theory of analytical functions. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya : v. 3 t.* [Historical and mathematical research].Vol. 3. M.; L., 1950. (In Russ.)

11. **Smirnov V. I.** *Kurs vysshej matematiki dlya tekhnikov i fizikov : v 5 t.* [Course of higher mathematics for technicians andphysicists : in 5 vols.]. M.; L., 1930. 467 p. (In Russ.)

12. **Shabat B. V.** *Vvedenie v kompleksnyj analiz : v 2 t.* [Introduction to complex analysis : in 2 vol.]. Moscow: Lenand, 2020. 344 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Асланов Рамиз Муталлим оглы / Aslanov Ramiz Mutallim ogly
д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, старший научный сотрудник отдела «Алгебра и математическая логика» / Doctor of Education, Ph.D., Professor, Senior Researcher, Algebra and Mathematical Logic Department

Институт математики и механики НАН Азербайджана / Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan
AZ1141, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. Вагабзаде, 9 / AZ1141, Azerbaijan Republic, Baku, 9 Vagabzade St.

Сушков Владислав Викторович / Vladislav V. Sushkov
к.ф.-м.н, доцент, начальник учебного управления / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Educational Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 12.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.09.2022