Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_4

О КОММУТАТИВНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУКОЛЬЦАХ СО СВОЙСТВОМ МАКСИМАЛЬНОСТИ ПРОСТЫХ ИДЕАЛОВ

Евгений Михайлович Вечтомов
Вятский государственный университет

Аннотация. В статье продолжается изучение коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, обладающих свойством максимальности простых идеалов. Приведено подробное доказательство теоремы, утверждающей, что дистрибутивная решетка обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда она является решеткой с относительными дополнениями. Доказано, что свойство максимальности простых идеалов для произвольного коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с тождеством $x+2xy = x$ равносильно тому, что ассоциированная с ним дистрибутивная решетка является решеткой с относительными дополнениями.

Ключевые слова: полукольцо, коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо, свойство максимальности простых идеалов

Для цитирования: Вечтомов Е. М. О коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольцах со свойством максимальности простых идеалов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_4

Mathematics

Original article

About commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals

Ebgeniy M. Vechtomov
Vyatka State University, vecht@mail.ru

Annotation. The article continues investigation of commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals. The author gives a detailed proof of a theorem claiming that any distributive lattice has the property of maximality of prime ideals if and only if it is a lattice with relative complements. For an arbitrary of commutative multiplicatively idempotent semiring with the identity $x + 2xy = x$ the following is proved: the property of maximality for prime ideals there is equivalent the fact that the lattice associated with this semiring is a lattice with relative complements.

Keywords: semiring, commutative multiplicatively idempotent semiring, property of maximality of prime ideals

For citation: Vechtomov E. M. About commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_4

Введение

Статья посвящена теории мультипликативно идемпотентных полуколец (см. [1]). Мультипликативно идемпотентные полукольца с некоторыми дополнительными условиями изучались нами в работах [2–5], толчком для которых послужила более ранняя статья [6]. Мы продолжаем исследование коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, в которых все простые идеалы являются максимальными идеалами [2].

Подробно доказывается известный результат о том, что произвольная дистрибутивная решетка обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда она является решеткой с относительными дополнениями (теорема 1). Найден критерий выполнения свойства максимальности простых идеалов для коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x+2xy=x$ (теорема 2). Получены также другие результаты (предложения 4–6). Приведены примеры.

Предварительные сведения

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S,+,\cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что: $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо S называется:

коммутативным, если на S выполняется тождество $xy=yx$;

мультипликативно идемпотентным (соответственно, *аддитивно идемпотентным*), если S удовлетворяет тождеству $xx=x$ ($x+x=x$);

идемпотентным, если оно одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентно;

моно-полукольцом, если на S тождественно $x+y=xy$;

полукольцом с константным сложением, если оно удовлетворяет тождеству $x+y=u+v$.

Класс всех мультипликативно идемпотентных полуколец является многообразием, включающим в себя все булевы кольца и все дистрибутивные решетки. Мультипликативно идемпотентные кольца называются булевыми; они коммутативны и удовлетворяют тождеству $x+x=0$. Отметим также, что класс дистрибутивных решеток совпадает с классом коммутативных идемпотентных полуколец, удовлетворяющих тождеству поглощения $x+xy=x$.

Элемент θ полукольца S называют *поглощающим по умножению* (*по сложению*), если $\theta \cdot x = x \cdot \theta = \theta$ $(x + \theta = \theta)$ для всех $x \in S$. Элемент полукольца, являющийся поглощающим по умножению и поглощающим по сложению, называется просто *поглощающим* и обозначается ∞.

Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Непустое подмножество J полукольца S называется *идеалом* в S, если для любых $a, b \in J$, $s \in S$ элементы $a + b$, sa и as принадлежат J. Идеал полукольца S, отличный от S, называется *собственным.*

Собственный идеал P полукольца S называется:

простым (*первичным*), если для любых $a, b \in S$ из $ab \in P$ $(aSb \subseteq P)$ следует $a \in P$ или $b \in P$;

максимальным идеалом, если в S нет других собственных идеалов, содержащих P;

минимальным простым идеалом, если в S нет других простых идеалов, содержащихся в P.

Скажем, что полукольцо обладает *свойством максимальности простых идеалов*, если все его простые идеалы являются максимальными идеалами.

Мультипликативно идемпотентные полукольца S обладают следующими свойствами:
1) выполнение тождества $4x = 2x$ (очевидно);
2) в S первичные идеалы совпадают с простыми идеалами [2, предложение 4];
3) собственные идеалы полукольца S являются пересечениями простых идеалов [2, следствие 2];
4) максимальные идеалы полукольца S являются простыми идеалами [2, следствие 3];
5) коммутативность «по модулю» любого идеала J (даже мультипликативного идеала) в S : если произведение конечного множества эле-

ментов полукольца S, взятых в некотором порядке, принадлежит J, то принадлежит J и произведение этих элементов, взятых в любом другом порядке [2, предложение 1];
6) если полукольцо S коммутативно, то для любых двух его различных элементов существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов [2, предложение 7].

Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма существует ровно шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец: цепь $\mathbf{B} = \{0, 1\}$; поле $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$; идемпотентное монополукольцо $\mathbf{D} = \{1, \infty\}$; полукольцо $\mathbf{T} = \{1, \infty\}$ с константным сложением $(x+y = \infty)$; идемпотентное полукольцо $\mathbf{L} = \{a, b\}$ с тождеством $xy = x$; идемпотентное полукольцо $\mathbf{R} = \{a, b\}$ с тождеством $xy = y$.

Пусть S — произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо, P — простой идеал полукольца S и J — идеал в S, содержащийся в P. Множество $J_P = \{a \in S : \exists b \in S \setminus P \;\; ab \in J\}$ является идеалом в S, причем $J \subseteq J_P \subseteq P$. Если θ — поглощающий по умножению элемент из S, то $\{\theta\}$ будет идеалом в S. При этом обозначим $\theta_P = \{\theta\}_P$, в случае наличия в S нуля 0 получим идеал 0_P.

Предложение 1 [2, предложение 5]. *Пусть в мультипликативно идемпотентном полукольце S даны непересекающиеся идеал J и мультипликативная подполугруппа M $(J \cap M = \varnothing)$. Тогда в S существует простой идеал P, содержащий J и не пересекающийся с M.*

Предложение 2 [2, предложение 6]. *Для того, чтобы простой идеал P мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем 0 был минимальным простым идеалом, необходимо и достаточно, чтобы $P = 0_P$.*

Для мультипликативно идемпотентного полукольца S обозначим через $\mathrm{Spec}S$ множество всех простых идеалов в S, а через $\mathrm{Max}S$ $(\mathrm{Min}S)$ — его подмножество всех максимальных идеалов (всех минимальных простых идеалов). См. [7, параграф 3]. Множество $\mathrm{Spec}S$, наделенное топологией Стоуна – Зариского, становится T_0-пространством, называемым *простым спектром* полукольца S, а его подпространство $\mathrm{Max}S$ будет T_1-пространством, называемым *максимальным спектром* полукольца

S. Очевидно, выполнение свойства максимальности простых идеалов в полукольце S эквивалентно каждому из равенств $\mathrm{Spec}S = \mathrm{Max}S$, $\mathrm{Spec}S = \mathrm{Min}S$, $\mathrm{Max}S = \mathrm{Min}S$, а также тому, что упорядоченное множество $\langle \mathrm{Spec}S, \subseteq \rangle$ будет антицепью.

Напомним некоторые понятия теории решеток. См. [8; 9].

Рассмотрим произвольную решетку L. В решетке L можно задать два порядка $\leq$ и $\preceq$:

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = a,\ a \preceq b \Leftrightarrow a + b = b\ (\forall a, b \in L).$$

Поскольку, по законам поглощения, равенства $ab = a$ и $a + b = b$ эквивалентны, то порядки $\leq$ и $\preceq$ на L совпадают. При этом $ab = \inf\{a, b\}$ и $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in L$. Хорошо известно, что для решеток имеет место принцип (порядковой) двойственности. Решетка $\langle L, \geq \rangle$ является двойственной исходной решетке $\langle L, \leq \rangle$. Поэтому решетка, двойственная дистрибутивной решетке, также будет дистрибутивной, т. е. удовлетворяет дуальному тождеству дистрибутивности $(x + y)(x + z) = x + yz$.

Непустое подмножество F решетки L называется ее *фильтром* (дуальным идеалом, коидеалом), если $a, b \in F$, $x \in L$ влекут $ab, a + x \in F$. Заметим, что $a + L = [a) = \{x \in L : x \geq a\}$ и $aL = (a] = \{x \in L : x \leq a\}$ для любого $a \in L$. В решетках понятия идеала (главного идеала $(a]$) и фильтра (главного фильтра $[a)$) двойственны друг другу. Собственный фильтр F решетки L ($F \neq L$) называется *простым* (*максимальным*), если $a + b \notin F$ для любых $a, b \in L \setminus F$ (соответственно: $F \subseteq N$ влечет $F = N$ для всякого собственного фильтра N решетки L). Легко видеть, что для любого идеала J решетки L верны следующие равносильности:

$$J \text{ — простой идеал} \Leftrightarrow L \setminus J \text{ — фильтр решетки } L \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L \setminus J \text{ — простой фильтр;}$$
$$J \text{ — максимальный идеал} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L \setminus J \text{ — минимальный простой фильтр решетки } L;$$
$$J \text{ — минимальный простой идеал} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L \setminus J \text{ — максимальный фильтр решетки } L.$$

Решетка с нулем 0 и ненулевой единицей 1 называется *ограниченной*. Если в ограниченной решетке $a+b = 1$ и $ab = 0$, то элемент b называется *дополнением* элемента a (и наоборот). Ограниченная решетка называется *решеткой с дополнениями*, если любой ее элемент имеет дополнение. Напомним, что в дистрибутивной решетке каждый элемент имеет не более одного дополнения. Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой*. Решетка с нулем 0 называется *обобщенно булевой решеткой*, если для любого ее ненулевого элемента a интервал $[0, a] = (a]$ является булевой решеткой. Решетка L называется *решеткой с относительными дополнениями*, если для любых ее элементов a и b, таких, что $a < b$, интервал $[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$ будет булевой решеткой. Ясно, что булевы решетки являются обобщенно булевыми решетками, которые, в свою очередь, будут дистрибутивными решетками с относительными дополнениями.

Предложение 3 [4, теорема 22, с. 94]. *Всякая ограниченная дистрибутивная решетка L со свойством максимальности простых идеалов является булевой решеткой.*

Доказательство. В указанной монографии приведено прямое доказательство теоремы 22, использующее предложение 1 в случае дистрибутивных решеток. Мы дадим доказательство, основанное на топологическом представлении Стоуна ограниченных дистрибутивных решеток.

Пусть L — ограниченная дистрибутивная решетка со свойством максимальности простых идеалов. Множества $D(J) = \{P \in \mathrm{Spec}L : J$ не содержится в $P\}$, взятые по всем идеалам дистрибутивной решетки L, объявляются открытыми множествами простого спектра $\mathrm{Spec}L$ решетки L. Они определяют топологию на множестве $\mathrm{Spec}L$, называемую *топологией Стоуна – Зариского*. Действительно, для любых идеалов I, J решетки L верны равенства $D(I) \cap D(J) = D(I \cap J)$, $D(\{0\}) = \varnothing$ и $D(L) = \mathrm{Spec}L$. Для любого непустого семейства $(J_k)_{k \in K}$ идеалов решетки L справедливо равенство

$$\bigcup_{k \in K} D(J_k) = D(\sum_{k \in K} J_k).$$

Отметим также, что $D(I) = D(J) \Rightarrow I = J$ в силу свойств 3) и 6).

Так как L с 1, то $\mathrm{Spec}L$ — компактное пространство.

Множества $D(a) = D(aL) = \{P \in \mathrm{Spec}L : a \notin P\}$, $a \in L$, образуют открытую базу топологического пространства $\mathrm{Spec}L$. Решетка L изоморфна решетке множеств $\{D(a) : a \in L\}$ при отображении $a \to D(a)$, поскольку для любых $x, y \in L$ имеем:

$$D(x + y) = D(x) \cup D(y),\ D(xy) = D(x) \cap D(y),\ D(x) = D(y) \Rightarrow x = y$$

по свойству 6). В частности, $D(0) = \varnothing$ и $D(1) = \mathrm{Spec}L$.

По условию $\mathrm{Spec}L = \mathrm{Min}L$. Поэтому, в силу предложения 2, $P = 0_P$ для всех $P \in \mathrm{Spec}L$.

Возьмем произвольный элемент $a \in L$. Имеем

$$D(a) = \{P \in \mathrm{Spec}L : a \notin 0_P\} = \{P \in \mathrm{Spec}L : \mathrm{Ann}a \subseteq P\} = \\ (\mathrm{Spec}L) \setminus D(\mathrm{Ann}a),$$

где $\mathrm{Ann}a = \{x \in L : ax = 0\}$ — идеал в L, называемый *аннулятором элемента* a. Мы видим, что в простом спектре множество $D(a)$ открыто-замкнуто и имеет открыто-замкнутое дополнение $D(\mathrm{Ann}a)$. Замкнутое множество $D(\mathrm{Ann}a)$ компактного пространства $\mathrm{Spec}L$ само компактно. Поскольку

$$D(\mathrm{Ann}a) = \bigcup\{D(x) : x \in \mathrm{Ann}a\} \text{ — открытое покрытие } D(\mathrm{Ann}a),$$

то $D(\mathrm{Ann}a) = D(b_1) \cup \ldots \cup D(b_n)$ для конечного числа подходящих элементов $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathrm{Ann}a$. При $b = b_1 + \ldots + b_n$ получаем $D(\mathrm{Ann}a) = D(b)$. Тогда

$$D(a + b) = D(a) \cup D(b) = \mathrm{Spec}L = D(1) \text{ и} \\ D(ab) = D(a) \cap D(b) = \varnothing = D(0),$$

откуда $a + b = 1$ и $ab = 0$. Получаем, что каждый элемент дистрибутивной решетки L имеет дополнение. Следовательно, L — булева решетка.

Результаты

Основная теорема работы [2] утверждает: *произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

Мы продолжаем исследовать коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца со свойством максимальности простых идеалов.

Следующее утверждение обобщает предложение 2.

Предложение 4. *Для того чтобы простой идеал P мультипликативно идемпотентного полукольца S был минимальным простым идеалом, необходимо и достаточно, чтобы $P = J_P$ для любого идеала J полукольца S, содержащегося в P.*

Доказательство. **Необходимость**. Пусть дан минимальный простой идеал P полукольца S и $J \subseteq P$ — идеал в S. Предположим от противного, что $J_P \subset P$. Возьмем элемент $a \in P \setminus J_P$. Рассмотрим подполугруппу M мультипликативной полугруппы полукольца S, порожденную множеством $(S \setminus P) \cup \{a\}$. Если $J \cap M \neq \varnothing$, то в идеале J найдется элемент, равный произведению конечного числа элементов из $(S \setminus P) \cup \{a\}$, и тогда, в силу коммутативности S по модулю J, идеал J содержит элемент вида ab при $b \in S \setminus P$, что влечет $a \in J_P$, противоречие. Значит, $J \cap M = \varnothing$. По предложению 1 в полукольце S существует простой идеал Q, не пересекающийся с M, стало быть, не пересекающийся с $(S \setminus P) \cup \{a\}$. Получаем $Q \subset P$. Полученное противоречие с минимальностью простого идеала P показывает, что $J_P = P$.

Достаточность. Пусть для простого идеала P полукольца S выполнено достаточное условие доказываемого предложения. И пусть $Q \subseteq P$ для некоторого простого идеала Q в S. Тогда $Q_P = P$. Поэтому для любого $p \in P$ найдется элемент $b \in S \setminus P$, для которого $pb \in Q$. Значит, $p \in Q$. Следовательно, $Q = P$.

Предложение доказано.

Следствие 1. *Простой идеал P мультипликативно идемпотентного полукольца S с поглощающим по умножению элементом θ будет минимальным простым идеалом тогда и только тогда, когда $P = \theta_P$.*

Доказательство вытекает из предложения 3 с учетом следующего: $\{\theta\}$ является наименьшим идеалом полукольца S, поэтому $\theta_P \subseteq J_P$ для любого идеала $J \subseteq P$.

Следующий результат известен (см. [5, упр. 27, с. 94]). Мы докажем этот результат непосредственно, опираясь на его частный случай – предложение 3.

Теорема 1. *Для того чтобы произвольная дистрибутивная решетка удовлетворяла условию максимальности простых идеалов, необходимо и достаточно, чтобы она была решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. **Необходимость**. Пусть L — дистрибутивная решетка, в которой все простые идеалы максимальны, $a < b$ при $a, b \in L$. Покажем, что интервал $[a, b]$ обладает свойством максимальности простых идеалов.

Рассмотрим сначала главный фильтр $[a) = \{x \in L : x \geq a\}$ решетки L. Возьмем в решетке $[a)$ простой идеал P. Положим $Q = \{x \in L : \exists p \in P \ \ x \leq p\}$. Легко видеть, что Q — идеал в L и $P = Q \cap [a)$. Возьмем $x, y \in L \setminus Q$. Имеем $x+a, y+a \in [a) \setminus P$. Поэтому $xy+a = (x+a)(y+a) \in [a) \setminus P$ и, стало быть, $xy \notin Q$. Значит, Q — простой идеал решетки L, являющийся по условию максимальным идеалом в L. Отсюда следует, что P будет максимальным идеалом решетки $[a)$. Тем самым главный фильтр $[a)$ решетки L удовлетворяет свойству максимальности простых идеалов и, что равносильно, свойству максимальности простых фильтров.

Теперь рассмотрим главный идеал $[a, b]$ решетки $[a)$. Возьмем в ограниченной дистрибутивной решетке $[a, b]$ простой фильтр F. По аналогии с предыдущим абзацем, по двойственности, в решетке $[a)$ зададим простой фильтр $E = \{x \in [a) : \exists p \in P \ \ x \geq p\}$. По доказанному выше, в силу принципа порядковой двойственности, фильтр E максимален и $F = E \cap [a, b]$ — максимальный фильтр в $[a, b]$. Значит, в интервале

$[a,b]$ все простые фильтры максимальны и, эквивалентно, все простые идеалы максимальны.

Таким образом, все интервалы $[a,b]$, $a<b$, исходной дистрибутивной решетки L удовлетворяют свойству максимальности простых идеалов. По предложению 3 каждый такой интервал $[a,b]$ является булевой решеткой, т. е. L — решетка с относительными дополнениями.

Достаточность. Пусть L — дистрибутивная решетка с относительными дополнениями и P — простой идеал в L. Предположим от противного, что P не является максимальным идеалом. Тогда в L существует собственный идеал J, строго содержащий P. Возьмем элементы $p\in P$, $a\in J\setminus P$ и $b\in L\setminus J$. Рассмотрим интервал $[pa,a+b]$. По условию элемент a имеет в этом интервале дополнение $c: ac=pa$ и $a+c=a+b$. Поскольку $a+b\notin J\supset P$, то $c\notin P$. Получаем $a,c\notin P$, но $ac=pa\in P$, что противоречит простоте идеала P.

Предложение 5. *Всякое неодноэлементное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с поглощающим по умножению элементом θ, обладающее свойством максимальности простых идеалов, является подпрямым произведением двухэлементных полуколец $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{T}$.*

Доказательство. Пусть полукольцо S удовлетворяет условию доказываемого предложения.

Зафиксируем простой идеал P в полукольце S и рассмотрим следующее бинарное отношение $\rho(P)$ на $S:$ для любых $a,b\in S$

$$a\rho(P)b\Leftrightarrow \exists c\in S\setminus P\ (ac=bc).$$

Легко проверяется, что отношение $\rho(P)$ будет *конгруэнцией* на полукольце S, т. е. является отношением эквивалентности на множестве S и для любых $a,b,x\in S$, если $a\rho(P)b$, то $(a+x)\rho(P)(b+x)$ и $(ax)\rho(P)(bx)$.

Покажем, что конгруэнция $\rho(P)$ — двухклассовая, именно, $\rho(P)\equiv\{P,S\setminus P\}$. Если $a,b\in S\setminus P$, то $ab\in S\setminus P$, $a(ab)=ab=b(ab)$ и, значит, $a\rho(P)b$. Если $a,b\in P$, то, по предложению 2, $a,b\in 0_P$, т. е. $ac=0=bd$ для некоторых $c,d\in S\setminus P$, откуда $a(cd)=0=b(cd)$ при $cd\in S\setminus P$, стало быть, $a\rho(P)b$. Если же $a\in P$ и $b\in S\setminus P$, то при любом $c \in S \setminus P$ имеем $ac \in P$, но $bc \notin P$, значит, элементы a и b не $\rho(P)$-конгруэнтны. И мы получаем двухэлементное коммутативное мультипликативно идемпотентное фактор-полукольцо $S/\rho(P)$, необходимо изоморфное одному из четырех полуколец $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$.

Возьмем теперь два различных элемента $a, b \in S$. По свойству 6) существует простой идеал P в полукольце S, содержащий ровно один из этих элементов. Значит, $a\rho(P)b$ неверно. Поэтому $\bigcap\{\rho(P) : P \in \mathrm{Spec} S\}$ — отношение равенства на S. Следовательно, полукольцо S является подпрямым произведением фактор-полуколец $S/\rho(P)$, которые, как сказано выше, изоморфны полукольцам $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ или $\mathbf{T}$.

Известно, что коммутативные мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ суть в точности подпрямые произведения полуколец $\mathbf{B}$ и $\mathbf{Z}_2$ [1, следствие 6.3.2]. Заметим также, что если в полукольце с тождеством $x + 2xy = x$ существует поглощающий по умножению элемент θ, то он будет нулем: $\theta = 0$.

Предложение 6. *Коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S удовлетворяет тождеству $x + 2xy = x$ тогда и только тогда, когда алгебраическая структура $\langle S, \vee, \cdot\rangle$, где $a \vee b = a + ab + b$ для любых $a, b \in S$, будет дистрибутивной решеткой.*

Доказательство. Пусть дано коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S.

Необходимость. Предположим, что в полукольце S выполняется тождество $x+2xy = x$. Рассмотрим на S новую «аддитивную» операцию $\vee : a \vee b = a + ab + b$ для всех элементов $a, b \in S$. Докажем, что $\langle S, \vee, \cdot\rangle$ — дистрибутивная решетка. По условию $\langle S, \cdot\rangle$ — коммутативная идемпотентная полугруппа, ассоциированная с полурешеткой $\langle S, \leq\rangle : a \leq b$ означает $ab = a$ для любых $a, b \in S$. Покажем, что $a \vee b = \sup\{a, b\}$ в полурешетке $\langle S, \leq\rangle$. Имеем $a(a \vee b) = a(a + ab + b) = a + 2ab = a$, т. е. $a \leq a \vee b$. Аналогично, $b \leq a \vee b$. Значит, $a \vee b$ есть верхняя грань множества $\{a, b\}$. Пусть $c \in S$ — произвольная верхняя грань $\{a, b\}$, т. е. $a \leq c$ и $b \leq c$. Тогда $ac = a$, $bc = b$, и

$$(a \vee b)c = (a + ab + b)c = ac + abc + bc = a + ab + b = a \vee b,$$

т. е. $a \vee b \leq c$. Следовательно, $a \vee b$ есть точная верхняя грань $\{a, b\}$. Тем самым получили решетку $\langle S, \leq \rangle$ с $\inf\{a, b\} = ab$ и $\sup\{a, b\} = a \vee b$ для всех $a, b \in S$. В алгебраических терминах имеем решетку $\langle S, \vee, \cdot \rangle$. Для любых $a, b, d \in S$

$$(a \vee b)d = (a + ab + b)d = ad + abd + bd = ad \vee bd.$$

Стало быть, решетка $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ дистрибутивна. Будем называть дистрибутивную решетку $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ *ассоциированной с полукольцом* S.

Достаточность. Если $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ — дистрибутивная решетка, то $a + 2ab = a + ab + ab = a \vee ab = a$ при любых $a, b \in S$.

Пример 1. Дистрибутивная решетка, ассоциированная с булевым кольцом, будет обобщенно булевой решеткой.

Теорема 2. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда ассоциированная с ним дистрибутивная решетка является решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть $S = \langle S, +, \cdot \rangle$ — коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$. По предложению 6 алгебраическая структура $T = \langle S, \vee, \cdot \rangle$ является дистрибутивной решеткой. Легко видеть, что полукольцо S и дистрибутивная решетка T имеют одни и те же идеалы, одни и те же простые идеалы и одни и те же максимальные идеалы. Поэтому свойство максимальности простых идеалов одновременно выполняется либо не выполняется на S и T. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 1.

Пример 2. Полукольца $\mathbf{D}$ и $\mathbf{T}$ суть полукольца с единицей 1 и поглощающим элементом ∞, причем $1 + 1 = 1$ в $\mathbf{D}$ и $1 + 1 = \infty$ в $\mathbf{T}$. Полукольца $\mathbf{D}$ и $\mathbf{T}$ обладают свойством максимальности простых идеалов, но не удовлетворяют тождеству $x + 2xy = x$. Их прямое произведение $\Pi = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ не обладает свойством максимальности простых идеалов. Коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо

Π с поглощающим элементом (∞, ∞) имеет четыре собственных идеала: наименьший идеал $\{(\infty, \infty)\}$, простые идеалы $\{(\infty, \infty), (\infty, 1)\}$ и $\{(\infty, \infty), (1, \infty)\}$, максимальный идеал $\{(\infty, \infty), (\infty, 1), (1, \infty)\}$.

Пример 3. Возьмем произвольное непустое индексное множество I и рассмотрим прямое произведение $\Pi = \prod S_i$ семейства $(S_i)_{i \in I}$ полуколец S_i, совпадающих с **D** или **T**. Для каждого индекса $i \in I$ положим $\alpha_i = (a_j)_{j \in I} \in \Pi$, где $a_j = 1$ при $j = i$ и $a_j = \infty$ при $j \neq i$. Через ∞ обозначим также элемент из Π, все координаты которого равны ∞. Множество $S = \{\alpha_i : i \in I\} \cup \{\infty\}$ является подполукольцом полукольца Π. Получаем коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S (без нуля) с поглощающим элементом ∞, все простые идеалы которого максимальны. Легко видеть, что простые идеалы полукольца S исчерпываются идеалами $P_i = S \setminus \{\alpha_i\}$ по всем индексам $i \in I$. Если индексное множество конечно и имеет n элементов, то полукольцо S имеет $n + 1$ элемент и n простых (максимальных) идеалов.

Пример 4. Прямое произведение $S = R \times L$ произвольных булева кольца R и дистрибутивной решетки L с относительными дополнениями является коммутативным мультипликативно идемпотентным полукольцом со свойством максимальности простых идеалов и тождеством $x + 2xy = x$. Очевидно, что простые идеалы полукольца S суть в точности идеалы вида $P \times L$ и $R \times Q$ по всевозможным простым идеалам P и Q в R и L соответственно.

Остается открытым следующий

Вопрос

Всякое ли коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо со свойством максимальности простых идеалов и тождеством $x + 2xy = x$ разлагается в прямое произведение булева кольца и дистрибутивной решетки с относительными дополнениями?

Список источников

1. **Вечтомов Е. М., Петров А. А** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. СПб.: Лань, 2022. 180 с.

2. **Вечтомов Е. М., Петров А. А** Простые идеалы в мультипликативно идемпотентных полукольцах // *Математические заметки.* 2022. Т. 111. Вып. 4. С. 494–505.

3. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца, в которых все конгруэнции идеальные // *Математические заметки.* 2022. Т. 112. Вып. 3. С. 376–383.

4. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием // *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы.* Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2022. С. 125–128.

5. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца с дополнительными условиями // *Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Математика и проблемы образования»*. Киров: ВятГУ, 2022. С. 4–8.

6. **Вечтомов Е. М.** Аннуляторные характеризации булевых колец и дистрибутивных решеток // *Математические заметки.* 1993. Т. 53. Вып. 2. С. 15–24.

7. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

8. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

9. **Скорняков Л. А.** Элементы теории структур. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1982. 160 с.

References

1. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Funkcionalnaya algebra i polukolca. Polukolca s idempotentnym umnozheniem* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication]. St. Petersburg: Lan, 2022. 180 p. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M., Petrov A. A** Prime ideals in multiplicatively idempotent semirings. textitMatematicheskie zametki [Mathematical notes]. 2022. Vol. 111. Issue 4. P. 494–505. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings in which all congruences are ideal. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2022. Vol. 112. Issue 3. Pp. 376–383. (In Russ.)

4. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings with the annihilator condition. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii : materialy XXI Mezhdunarodnoj konferencii, posvyashhennoj 85-letiyu so dnya rozhdeniya A. A. Karacuby* [Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Materials XXI International conference dedicated to the 85th anniversary of the birth of A. A. Karatsuba]. Tula: TSPU im. L.N. Tolstoy, 2022. Pp. 125–128. (In Russ.)

5. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings with additional conditions. *Materialy 41-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskix vuzov «Matematika i problemy obrazovaniya»* [Proceedings of the 41st International Scientific Seminar for Teachers of Mathematics and Informatics of Universities and Pedagogical Universities «Mathematics and Problems of Education»]. Kirov: VyatGU, 2022. Pp. 4–8.

6. **Vechtomov E. M.** Annihilator characterizations of Boolean rings and distributive lattices. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1993. T. 53. Issue 2. Pp. 15–24. (In Russ.)

7. **Chermnykh V. V.** *Funkcionalnye predstavleniya polukolec* [Functional representations of semirings]. Kirov: Publishing house of VyatGGU, 2010. 224 p. (In Russ.)

8. **Gretzer G.** *Obshhaya teoriya reshetok* [General theory of lattices]. M.: Mir, 1982. 456 p. (In Russ.)

9. **Skornyakov L. A.** *Elementy teorii struktur. 2-e izd., dop.* [Elements of the theory of structures. 2nd ed., add.] Moscow: Nauka, 1982. 160 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeniy M. Vechtomov
Д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Кировская область, г. Киров, ул. Московская, д. 36 / 36 Moskovskaya St., Kirov, Russian Federation, 610000

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 15.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 25.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 25.09.2022