ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

3(44) выпуск 22

Вестник Сыктывкарского университета	Серия 1: *Математика* *Механика* *Информатика*	12+ ISSN 1992-2752
Основан в 1995 году		Выпуск 3 (44)
Выходит 4 раза в год		2022

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2022. — 3 (44). 2022. — 80 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён в перечень отечественных изданий, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования и в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденный приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям: «1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)», «1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)», «1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)», «5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровни общего и профессионального образования) (педагогические науки)».

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included in the list of editions included in international abstract databases and citation systems, and in which the main scientific results of dissertations for the degree of Candidate or Doctor of Sciences should be published, approved by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. The journal publishes scientific articles on the following scientific specialties: «1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory, and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)», «1.1.8. Mechanics of deformable solids (physical and mathematical sciences)», «1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages (technical sciences)», «5.8.2. Theory and methods of teaching and education (mathematics, general and vocational education levels) (pedagogical sciences)».

Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.

Адрес редакции
Вестника Сыктывкарского университета
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Свободная цена © ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2022.

Главный редактор:
д.п.н., доцент, ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»
Сотникова О. А.

Ответственный редактор:
Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой (СГУ им. Питирима Сорокина)

Редакционная коллегия:
Аббасов М.Э., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Асланов Р.М., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, старший научный сотрудник (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан)
Беляева Н.А., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой (ВятГУ)
Головач П.А., к.ф.-м.н., доцент, исследователь (Университет Бергена, Норвегия)
Григорьев С.Г., член-корреспондент РАО, д.т.н., профессор, профессор (МГПУ)
Дорофеев С.Н., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ТолГУ)
Калинин С.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор, профессор (ВятГУ)
Колесников Г.Н., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Колпак Е.П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ)
Крылатов А.Ю., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Махнев А.А., член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник (ИММ УрО РАН)
Одинец В.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Орлов В.В., д.п.н., профессор, профессор (Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена)
Парилина Е.М., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Певный А.Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Петров Н.Н., д.ф.-м.н., профессор, профессор (УдмГУ)
Петраков А.П., д.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой (СГУ им. Питирима Сорокина)
Питухин Е.А., д.т.н., профессор, профессор (ПетрГУ)
Попов Н.И., д.п.н., , к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой (СГУ им. Питирима Сорокина)
Рудикова-Фронхёфер Л.В., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь)
Тихомиров А.Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник (Коми НЦ УрО РАН)
Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник (СГУ им. Питирима Сорокина)

Техническая редакция:
Гудырева Л. В., к.филол.н., доцент, руководитель издательского центра (СГУ им. Питирима Сорокина),
Котелина Н. О., к.ф-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Мазур В.В., к.г.н., преподаватель (СГУ им. Питирима Сорокина)

Содержание

Математика

Вечтомов Е. М. *О коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольцах со свойством максимальности простых идеалов* 4

Информатика

Golchevskiy Yu. V., Shilova L. P. *Selecting a Solution Method for the Problem of Automating the Classification of Texts Related to Industrial Safety Audits* 21

Методические материалы

Бабикова Н. Н. *Обучение в цифровую эпоху: помнить или гуглить* 33

Асланов Р. М., Сушков В. В. *Исторические пути возникновения и развития теории функций комплексного переменного* 47

Наставник-ученик

Ермоленко А. В., Кожагельдиев Н. В. *К решению неоднородного бигармонического уравнения* 64

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 512.558
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_4

О КОММУТАТИВНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУКОЛЬЦАХ СО СВОЙСТВОМ МАКСИМАЛЬНОСТИ ПРОСТЫХ ИДЕАЛОВ

Евгений Михайлович Вечтомов
Вятский государственный университет

Аннотация. В статье продолжается изучение коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, обладающих свойством максимальности простых идеалов. Приведено подробное доказательство теоремы, утверждающей, что дистрибутивная решетка обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда она является решеткой с относительными дополнениями. Доказано, что свойство максимальности простых идеалов для произвольного коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с тождеством $x+2xy=x$ равносильно тому, что ассоциированная с ним дистрибутивная решетка является решеткой с относительными дополнениями.

Ключевые слова: полукольцо, коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо, свойство максимальности простых идеалов

Для цитирования: Вечтомов Е. М. О коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольцах со свойством максимальности

© Вечтомов Е. М., 2022.

простых идеалов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_4

Mathematics

Original article

About commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals

Ebgeniy M. Vechtomov
Vyatka State University, vecht@mail.ru

Annotation. The article continues investigation of commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals. The author gives a detailed proof of a theorem claiming that any distributive lattice has the property of maximality of prime ideals if and only if it is a lattice with relative complements. For an arbitrary of commutative multiplicatively idempotent semiring with the identity $x + 2xy = x$ the following is proved: the property of maximality for prime ideals there is equivalent the fact that the lattice associated with this semiring is a lattice with relative complements.

Keywords: semiring, commutative multiplicatively idempotent semiring, property of maximality of prime ideals

For citation: Vechtomov E. M. About commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_4

Введение

Статья посвящена теории мультипликативно идемпотентных полуколец (см. [1]). Мультипликативно идемпотентные полукольца с некоторыми

дополнительными условиями изучались нами в работах [2–5], толчком для которых послужила более ранняя статья [6]. Мы продолжаем исследование коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец, в которых все простые идеалы являются максимальными идеалами [2].

Подробно доказывается известный результат о том, что произвольная дистрибутивная решетка обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда она является решеткой с относительными дополнениями (теорема 1). Найден критерий выполнения свойства максимальности простых идеалов для коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x+2xy=x$ (теорема 2). Получены также другие результаты (предложения 4–6). Приведены примеры.

Предварительные сведения

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S,+,\cdot\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая, что: $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полукольцо S называется:

коммутативным, если на S выполняется тождество $xy=yx$;

мультипликативно идемпотентным (соответственно, *аддитивно идемпотентным*), если S удовлетворяет тождеству $xx=x$ ($x+x=x$);

идемпотентным, если оно одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентно;

моно-полукольцом, если на S тождественно $x+y=xy$;

полукольцом с константным сложением, если оно удовлетворяет тождеству $x+y=u+v$.

Класс всех мультипликативно идемпотентных полуколец является многообразием, включающим в себя все булевы кольца и все дистрибутивные решетки. Мультипликативно идемпотентные кольца называются булевыми; они коммутативны и удовлетворяют тождеству $x+x=0$. Отметим также, что класс дистрибутивных решеток совпадает с классом коммутативных идемпотентных полуколец, удовлетворяющих тождеству поглощения $x+xy=x$.

Элемент θ полукольца S называют *поглощающим по умножению* (*по сложению*), если $\theta \cdot x = x \cdot \theta = \theta$ $(x + \theta = \theta)$ для всех $x \in S$. Элемент полукольца, являющийся поглощающим по умножению и поглощающим по сложению, называется просто *поглощающим* и обозначается ∞.

Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулем* 0. Если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Непустое подмножество J полукольца S называется *идеалом* в S, если для любых $a, b \in J$, $s \in S$ элементы $a + b$, sa и as принадлежат J. Идеал полукольца S, отличный от S, называется *собственным*.

Собственный идеал P полукольца S называется:

простым (*первичным*), если для любых $a, b \in S$ из $ab \in P$ $(aSb \subseteq P)$ следует $a \in P$ или $b \in P$;

максимальным идеалом, если в S нет других собственных идеалов, содержащих P;

минимальным простым идеалом, если в S нет других простых идеалов, содержащихся в P.

Скажем, что полукольцо обладает *свойством максимальности простых идеалов*, если все его простые идеалы являются максимальными идеалами.

Мультипликативно идемпотентные полукольца S обладают следующими свойствами:

1) выполнение тождества $4x = 2x$ (очевидно);

2) в S первичные идеалы совпадают с простыми идеалами [2, предложение 4];

3) собственные идеалы полукольца S являются пересечениями простых идеалов [2, следствие 2];

4) максимальные идеалы полукольца S являются простыми идеалами [2, следствие 3];

5) коммутативность «по модулю» любого идеала J (даже мультипликативного идеала) в S : если произведение конечного множества эле-

ментов полукольца S, взятых в некотором порядке, принадлежит J, то принадлежит J и произведение этих элементов, взятых в любом другом порядке [2, предложение 1];
6) если полукольцо S коммутативно, то для любых двух его различных элементов существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов [2, предложение 7].

Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма существует ровно шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец: цепь $\mathbf{B} = \{0, 1\}$; поле $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$; идемпотентное монополукольцо $\mathbf{D} = \{1, \infty\}$; полукольцо $\mathbf{T} = \{1, \infty\}$ с константным сложением $(x+y = \infty)$; идемпотентное полукольцо $\mathbf{L} = \{a, b\}$ с тождеством $xy = x$; идемпотентное полукольцо $\mathbf{R} = \{a, b\}$ с тождеством $xy = y$.

Пусть S — произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо, P — простой идеал полукольца S и J — идеал в S, содержащийся в P. Множество $J_P = \{a \in S : \exists b \in S \setminus P \;\; ab \in J\}$ является идеалом в S, причем $J \subseteq J_P \subseteq P$. Если θ — поглощающий по умножению элемент из S, то $\{\theta\}$ будет идеалом в S. При этом обозначим $\theta_P = \{\theta\}_P$, в случае наличия в S нуля 0 получим идеал 0_P.

Предложение 1 [2, предложение 5]. *Пусть в мультипликативно идемпотентном полукольце S даны непересекающиеся идеал J и мультипликативная подполугруппа M $(J \cap M = \varnothing)$. Тогда в S существует простой идеал P, содержащий J и не пересекающийся с M.*

Предложение 2 [2, предложение 6]. *Для того, чтобы простой идеал P мультипликативно идемпотентного полукольца S с нулем 0 был минимальным простым идеалом, необходимо и достаточно, чтобы $P = 0_P$.*

Для мультипликативно идемпотентного полукольца S обозначим через $\mathrm{Spec}S$ множество всех простых идеалов в S, а через $\mathrm{Max}S$ ($\mathrm{Min}S$) — его подмножество всех максимальных идеалов (всех минимальных простых идеалов). См. [7, параграф 3]. Множество $\mathrm{Spec}S$, наделенное топологией Стоуна – Зариского, становится T_0-пространством, называемым *простым спектром* полукольца S, а его подпространство $\mathrm{Max}S$ будет T_1-пространством, называемым *максимальным спектром* полукольца

S. Очевидно, выполнение свойства максимальности простых идеалов в полукольце S эквивалентно каждому из равенств $\mathrm{Spec}S = \mathrm{Max}S$, $\mathrm{Spec}S = \mathrm{Min}S$, $\mathrm{Max}S = \mathrm{Min}S$, а также тому, что упорядоченное множество $\langle \mathrm{Spec}S, \subseteq \rangle$ будет антицепью.

Напомним некоторые понятия теории решеток. См. [8; 9].

Рассмотрим произвольную решетку L. В решетке L можно задать два порядка $\leq$ и $\preceq$:

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = a,\ a \preceq b \Leftrightarrow a + b = b\ (\forall a, b \in L).$$

Поскольку, по законам поглощения, равенства $ab = a$ и $a + b = b$ эквивалентны, то порядки $\leq$ и $\preceq$ на L совпадают. При этом $ab = \inf\{a, b\}$ и $a + b = \sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in L$. Хорошо известно, что для решеток имеет место принцип (порядковой) двойственности. Решетка $\langle L, \geq \rangle$ является двойственной исходной решетке $\langle L, \leq \rangle$. Поэтому решетка, двойственная дистрибутивной решетке, также будет дистрибутивной, т. е. удовлетворяет дуальному тождеству дистрибутивности $(x + y)(x + z) = x + yz$.

Непустое подмножество F решетки L называется ее *фильтром* (дуальным идеалом, коидеалом), если $a, b \in F$, $x \in L$ влекут $ab, a + x \in F$. Заметим, что $a + L = [a) = \{x \in L : x \geq a\}$ и $aL = (a] = \{x \in L : x \leq a\}$ для любого $a \in L$. В решетках понятия идеала (главного идеала $(a]$) и фильтра (главного фильтра $[a)$) двойственны друг другу. Собственный фильтр F решетки L ($F \neq L$) называется *простым* (*максимальным*), если $a + b \notin F$ для любых $a, b \in L \setminus F$ (соответственно: $F \subseteq N$ влечет $F = N$ для всякого собственного фильтра N решетки L). Легко видеть, что для любого идеала J решетки L верны следующие равносильности:

$$J \text{ — простой идеал} \Leftrightarrow L \setminus J \text{ — фильтр решетки } L \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L \setminus J \text{ — простой фильтр;}$$
$$J \text{ — максимальный идеал} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L \setminus J \text{ — минимальный простой фильтр решетки } L;$$
$$J \text{ — минимальный простой идеал} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow L \setminus J \text{ — максимальный фильтр решетки } L.$$

Решетка с нулем 0 и ненулевой единицей 1 называется *ограниченной*. Если в ограниченной решетке $a+b=1$ и $ab=0$, то элемент b называется *дополнением* элемента a (и наоборот). Ограниченная решетка называется *решеткой с дополнениями*, если любой ее элемент имеет дополнение. Напомним, что в дистрибутивной решетке каждый элемент имеет не более одного дополнения. Дистрибутивная решетка с дополнениями называется *булевой решеткой*. Решетка с нулем 0 называется *обобщенно булевой решеткой*, если для любого ее ненулевого элемента a интервал $[0,a]=(a]$ является булевой решеткой. Решетка L называется *решеткой с относительными дополнениями*, если для любых ее элементов a и b, таких, что $a<b$, интервал $[a,b]=\{x\in L : a\leq x\leq b\}$ будет булевой решеткой. Ясно, что булевы решетки являются обобщенно булевыми решетками, которые, в свою очередь, будут дистрибутивными решетками с относительными дополнениями.

Предложение 3 [4, теорема 22, с. 94]. *Всякая ограниченная дистрибутивная решетка L со свойством максимальности простых идеалов является булевой решеткой.*

Доказательство. В указанной монографии приведено прямое доказательство теоремы 22, использующее предложение 1 в случае дистрибутивных решеток. Мы дадим доказательство, основанное на топологическом представлении Стоуна ограниченных дистрибутивных решеток.

Пусть L — ограниченная дистрибутивная решетка со свойством максимальности простых идеалов. Множества $D(J)=\{P\in \mathrm{Spec}L : J$ не содержится в $P\}$, взятые по всем идеалам дистрибутивной решетки L, объявляются открытыми множествами простого спектра $\mathrm{Spec}L$ решетки L. Они определяют топологию на множестве $\mathrm{Spec}L$, называемую *топологией Стоуна – Зариского*. Действительно, для любых идеалов I, J решетки L верны равенства $D(I)\cap D(J)=D(I\cap J)$, $D(\{0\})=\varnothing$ и $D(L)=\mathrm{Spec}L$. Для любого непустого семейства $(J_k)_{k\in K}$ идеалов решетки L справедливо равенство

$$\bigcup_{k\in K} D(J_k)=D(\sum_{k\in K} J_k).$$

Отметим также, что $D(I) = D(J) \Rightarrow I = J$ в силу свойств 3) и 6).

Так как L с 1, то $\mathrm{Spec}L$ — компактное пространство.

Множества $D(a) = D(aL) = \{P \in \mathrm{Spec}L : a \notin P\}$, $a \in L$, образуют открытую базу топологического пространства $\mathrm{Spec}L$. Решетка L изоморфна решетке множеств $\{D(a) : a \in L\}$ при отображении $a \to D(a)$, поскольку для любых $x, y \in L$ имеем:

$$D(x+y) = D(x) \cup D(y),\ D(xy) = D(x) \cap D(y),\ D(x) = D(y) \Rightarrow x = y$$

по свойству 6). В частности, $D(0) = \varnothing$ и $D(1) = \mathrm{Spec}L$.

По условию $\mathrm{Spec}L = \mathrm{Min}L$. Поэтому, в силу предложения 2, $P = 0_P$ для всех $P \in \mathrm{Spec}L$.

Возьмем произвольный элемент $a \in L$. Имеем

$$D(a) = \{P \in \mathrm{Spec}L : a \notin 0_P\} = \{P \in \mathrm{Spec}L : \mathrm{Ann}a \subseteq P\} = \\ (\mathrm{Spec}L) \setminus D(\mathrm{Ann}a),$$

где $\mathrm{Ann}a = \{x \in L : ax = 0\}$ — идеал в L, называемый *аннулятором элемента* a. Мы видим, что в простом спектре множество $D(a)$ открыто-замкнуто и имеет открыто-замкнутое дополнение $D(\mathrm{Ann}a)$. Замкнутое множество $D(\mathrm{Ann}a)$ компактного пространства $\mathrm{Spec}L$ само компактно. Поскольку

$$D(\mathrm{Ann}a) = \bigcup\{D(x) : x \in \mathrm{Ann}a\} \text{ — открытое покрытие } D(\mathrm{Ann}a),$$

то $D(\mathrm{Ann}a) = D(b_1) \cup \ldots \cup D(b_n)$ для конечного числа подходящих элементов $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathrm{Ann}a$. При $b = b_1 + \ldots + b_n$ получаем $D(\mathrm{Ann}a) = D(b)$. Тогда

$$D(a+b) = D(a) \cup D(b) = \mathrm{Spec}L = D(1) \text{ и} \\ D(ab) = D(a) \cap D(b) = \varnothing = D(0),$$

откуда $a + b = 1$ и $ab = 0$. Получаем, что каждый элемент дистрибутивной решетки L имеет дополнение. Следовательно, L — булева решетка.

Результаты

Основная теорема работы [2] утверждает: *произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулем обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

Мы продолжаем исследовать коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца со свойством максимальности простых идеалов.

Следующее утверждение обобщает предложение 2.

Предложение 4. *Для того чтобы простой идеал P мультипликативно идемпотентного полукольца S был минимальным простым идеалом, необходимо и достаточно, чтобы $P = J_P$ для любого идеала J полукольца S, содержащегося в P.*

Доказательство. **Необходимость**. Пусть дан минимальный простой идеал P полукольца S и $J \subseteq P$ — идеал в S. Предположим от противного, что $J_P \subset P$. Возьмем элемент $a \in P \setminus J_P$. Рассмотрим подполугруппу M мультипликативной полугруппы полукольца S, порожденную множеством $(S \setminus P) \cup \{a\}$. Если $J \cap M \neq \varnothing$, то в идеале J найдется элемент, равный произведению конечного числа элементов из $(S \setminus P) \cup \{a\}$, и тогда, в силу коммутативности S по модулю J, идеал J содержит элемент вида ab при $b \in S \setminus P$, что влечет $a \in J_P$, противоречие. Значит, $J \cap M = \varnothing$. По предложению 1 в полукольце S существует простой идеал Q, не пересекающийся с M, стало быть, не пересекающийся с $(S \setminus P) \cup \{a\}$. Получаем $Q \subset P$. Полученное противоречие с минимальностью простого идеала P показывает, что $J_P = P$.

Достаточность. Пусть для простого идеала P полукольца S выполнено достаточное условие доказываемого предложения. И пусть $Q \subseteq P$ для некоторого простого идеала Q в S. Тогда $Q_P = P$. Поэтому для любого $p \in P$ найдется элемент $b \in S \setminus P$, для которого $pb \in Q$. Значит, $p \in Q$. Следовательно, $Q = P$.

Предложение доказано.

Следствие 1. *Простой идеал P мультипликативно идемпотентного полукольца S с поглощающим по умножению элементом θ будет минимальным простым идеалом тогда и только тогда, когда $P = \theta_P$.*

Доказательство вытекает из предложения 3 с учетом следующего: $\{\theta\}$ является наименьшим идеалом полукольца S, поэтому $\theta_P \subseteq J_P$ для любого идеала $J \subseteq P$.

Следующий результат известен (см. [5, упр. 27, с. 94]). Мы докажем этот результат непосредственно, опираясь на его частный случай – предложение 3.

Теорема 1. *Для того чтобы произвольная дистрибутивная решетка удовлетворяла условию максимальности простых идеалов, необходимо и достаточно, чтобы она была решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. **Необходимость**. Пусть L — дистрибутивная решетка, в которой все простые идеалы максимальны, $a < b$ при $a, b \in L$. Покажем, что интервал $[a, b]$ обладает свойством максимальности простых идеалов.

Рассмотрим сначала главный фильтр $[a) = \{x \in L : x \geq a\}$ решетки L. Возьмем в решетке $[a)$ простой идеал P. Положим $Q = \{x \in L : \exists p \in P \;\; x \leq p\}$. Легко видеть, что Q — идеал в L и $P = Q \cap [a)$. Возьмем $x, y \in L \setminus Q$. Имеем $x+a$, $y+a \in [a) \setminus P$. Поэтому $xy+a = (x+a)(y+a) \in [a) \setminus P$ и, стало быть, $xy \notin Q$. Значит, Q — простой идеал решетки L, являющийся по условию максимальным идеалом в L. Отсюда следует, что P будет максимальным идеалом решетки $[a)$. Тем самым главный фильтр $[a)$ решетки L удовлетворяет свойству максимальности простых идеалов и, что равносильно, свойству максимальности простых фильтров.

Теперь рассмотрим главный идеал $[a, b]$ решетки $[a)$. Возьмем в ограниченной дистрибутивной решетке $[a, b]$ простой фильтр F. По аналогии с предыдущим абзацем, по двойственности, в решетке $[a)$ зададим простой фильтр $E = \{x \in [a) : \exists p \in P \;\; x \geq p\}$. По доказанному выше, в силу принципа порядковой двойственности, фильтр E максимален и $F = E \cap [a, b]$ — максимальный фильтр в $[a, b]$. Значит, в интервале

$[a, b]$ все простые фильтры максимальны и, эквивалентно, все простые идеалы максимальны.

Таким образом, все интервалы $[a, b]$, $a < b$, исходной дистрибутивной решетки L удовлетворяют свойству максимальности простых идеалов. По предложению 3 каждый такой интервал $[a, b]$ является булевой решеткой, т. е. L — решетка с относительными дополнениями.

Достаточность. Пусть L — дистрибутивная решетка с относительными дополнениями и P — простой идеал в L. Предположим от противного, что P не является максимальным идеалом. Тогда в L существует собственный идеал J, строго содержащий P. Возьмем элементы $p \in P$, $a \in J \setminus P$ и $b \in L \setminus J$. Рассмотрим интервал $[pa, a + b]$. По условию элемент a имеет в этом интервале дополнение $c : ac = pa$ и $a + c = a + b$. Поскольку $a + b \notin J \supset P$, то $c \notin P$. Получаем $a, c \notin P$, но $ac = pa \in P$, что противоречит простоте идеала P.

Предложение 5. *Всякое неодноэлементное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с поглощающим по умножению элементом θ, обладающее свойством максимальности простых идеалов, является подпрямым произведением двухэлементных полуколец $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{Z}_2$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{T}$.*

Доказательство. Пусть полукольцо S удовлетворяет условию доказываемого предложения.

Зафиксируем простой идеал P в полукольце S и рассмотрим следующее бинарное отношение $\rho(P)$ на S : для любых $a, b \in S$

$$a\rho(P)b \Leftrightarrow \exists c \in S \setminus P \ (ac = bc).$$

Легко проверяется, что отношение $\rho(P)$ будет *конгруэнцией* на полукольце S, т. е. является отношением эквивалентности на множестве S и для любых $a, b, x \in S$, если $a\rho(P)b$, то $(a+x)\rho(P)(b+x)$ и $(ax)\rho(P)(bx)$.

Покажем, что конгруэнция $\rho(P)$ — двухклассовая, именно, $\rho(P) \equiv \{P, S \setminus P\}$. Если $a, b \in S \setminus P$, то $ab \in S \setminus P$, $a(ab) = ab = b(ab)$ и, значит, $a\rho(P)b$. Если $a, b \in P$, то, по предложению 2, $a, b \in 0_P$, т. е. $ac = 0 = bd$ для некоторых $c, d \in S \setminus P$, откуда $a(cd) = 0 = b(cd)$ при $cd \in S \setminus P$, стало быть, $a\rho(P)b$. Если же $a \in P$ и $b \in S \setminus P$, то при

любом $c \in S \setminus P$ имеем $ac \in P$, но $bc \notin P$, значит, элементы a и b не $\rho(P)$-конгруэнтны. И мы получаем двухэлементное коммутативное мультипликативно идемпотентное фактор-полукольцо $S/\rho(P)$, необходимо изоморфное одному из четырех полуколец $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$.

Возьмем теперь два различных элемента $a, b \in S$. По свойству 6) существует простой идеал P в полукольце S, содержащий ровно один из этих элементов. Значит, $a\rho(P)b$ неверно. Поэтому $\bigcap\{\rho(P) : P \in \mathrm{Spec}S\}$ — отношение равенства на S. Следовательно, полукольцо S является подпрямым произведением фактор-полуколец $S/\rho(P)$, которые, как сказано выше, изоморфны полукольцам $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ или $\mathbf{T}$.

Известно, что коммутативные мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ суть в точности подпрямые произведения полуколец $\mathbf{B}$ и $\mathbf{Z}_2$ [1, следствие 6.3.2]. Заметим также, что если в полукольце с тождеством $x + 2xy = x$ существует поглощающий по умножению элемент θ, то он будет нулем: $\theta = 0$.

Предложение 6. *Коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S удовлетворяет тождеству $x + 2xy = x$ тогда и только тогда, когда алгебраическая структура $\langle S, \vee, \cdot\rangle$, где $a \vee b = a + ab + b$ для любых $a, b \in S$, будет дистрибутивной решеткой.*

Доказательство. Пусть дано коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S.

Необходимость. Предположим, что в полукольце S выполняется тождество $x+2xy = x$. Рассмотрим на S новую «аддитивную» операцию $\vee : a \vee b = a + ab + b$ для всех элементов $a, b \in S$. Докажем, что $\langle S, \vee, \cdot\rangle$ — дистрибутивная решетка. По условию $\langle S, \cdot\rangle$ — коммутативная идемпотентная полугруппа, ассоциированная с полурешеткой $\langle S, \leq\rangle$: $a \leq b$ означает $ab = a$ для любых $a, b \in S$. Покажем, что $a \vee b = \sup\{a, b\}$ в полурешетке $\langle S, \leq\rangle$. Имеем $a(a \vee b) = a(a + ab + b) = a + 2ab = a$, т. е. $a \leq a \vee b$. Аналогично, $b \leq a \vee b$. Значит, $a \vee b$ есть верхняя грань множества $\{a, b\}$. Пусть $c \in S$ — произвольная верхняя грань $\{a, b\}$, т. е. $a \leq c$ и $b \leq c$. Тогда $ac = a$, $bc = b$, и

$$(a \vee b)c = (a + ab + b)c = ac + abc + bc = a + ab + b = a \vee b,$$

т. е. $a \vee b \leq c$. Следовательно, $a \vee b$ есть точная верхняя грань $\{a, b\}$. Тем самым получили решетку $\langle S, \leq \rangle$ с $\inf\{a, b\} = ab$ и $\sup\{a, b\} = a \vee b$ для всех $a, b \in S$. В алгебраических терминах имеем решетку $\langle S, \vee, \cdot \rangle$. Для любых $a, b, d \in S$

$$(a \vee b)d = (a + ab + b)d = ad + abd + bd = ad \vee bd.$$

Стало быть, решетка $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ дистрибутивна. Будем называть дистрибутивную решетку $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ *ассоциированной с полукольцом* S.

Достаточность. Если $\langle S, \vee, \cdot \rangle$ — дистрибутивная решетка, то $a + 2ab = a + ab + ab = a \vee ab = a$ при любых $a, b \in S$.

Пример 1. Дистрибутивная решетка, ассоциированная с булевым кольцом, будет обобщенно булевой решеткой.

Теорема 2. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда ассоциированная с ним дистрибутивная решетка является решеткой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть $S = \langle S, +, \cdot \rangle$ — коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$. По предложению 6 алгебраическая структура $T = \langle S, \vee, \cdot \rangle$ является дистрибутивной решеткой. Легко видеть, что полукольцо S и дистрибутивная решетка T имеют одни и те же идеалы, одни и те же простые идеалы и одни и те же максимальные идеалы. Поэтому свойство максимальности простых идеалов одновременно выполняется либо не выполняется на S и T. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой 1.

Пример 2. Полукольца $\mathbf{D}$ и $\mathbf{T}$ суть полукольца с единицей 1 и поглощающим элементом ∞, причем $1 + 1 = 1$ в $\mathbf{D}$ и $1 + 1 = \infty$ в $\mathbf{T}$. Полукольца $\mathbf{D}$ и $\mathbf{T}$ обладают свойством максимальности простых идеалов, но не удовлетворяют тождеству $x + 2xy = x$. Их прямое произведение $\Pi = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ не обладает свойством максимальности простых идеалов. Коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо

Π с поглощающим элементом (∞, ∞) имеет четыре собственных идеала: наименьший идеал $\{(\infty, \infty)\}$, простые идеалы $\{(\infty, \infty), (\infty, 1)\}$ и $\{(\infty, \infty), (1, \infty)\}$, максимальный идеал $\{(\infty, \infty), (\infty, 1), (1, \infty)\}$.

Пример 3. Возьмем произвольное непустое индексное множество I и рассмотрим прямое произведение $\Pi = \prod S_i$ семейства $(S_i)_{i \in I}$ полуколец S_i, совпадающих с $\mathbf{D}$ или $\mathbf{T}$. Для каждого индекса $i \in I$ положим $\alpha_i = (a_j)_{j \in I} \in \Pi$, где $a_j = 1$ при $j = i$ и $a_j = \infty$ при $j \neq i$. Через ∞ обозначим также элемент из Π, все координаты которого равны ∞. Множество $S = \{\alpha_i : i \in I\} \cup \{\infty\}$ является подполукольцом полукольца Π. Получаем коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S (без нуля) с поглощающим элементом ∞, все простые идеалы которого максимальны. Легко видеть, что простые идеалы полукольца S исчерпываются идеалами $P_i = S \setminus \{\alpha_i\}$ по всем индексам $i \in I$. Если индексное множество конечно и имеет n элементов, то полукольцо S имеет $n + 1$ элемент и n простых (максимальных) идеалов.

Пример 4. Прямое произведение $S = R \times L$ произвольных булева кольца R и дистрибутивной решетки L с относительными дополнениями является коммутативным мультипликативно идемпотентным полукольцом со свойством максимальности простых идеалов и тождеством $x + 2xy = x$. Очевидно, что простые идеалы полукольца S суть в точности идеалы вида $P \times L$ и $R \times Q$ по всевозможным простым идеалам P и Q в R и L соответственно.

Остается открытым следующий

Вопрос

Всякое ли коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо со свойством максимальности простых идеалов и тождеством $x + 2xy = x$ разлагается в прямое произведение булева кольца и дистрибутивной решетки с относительными дополнениями?

Список источников

1. **Вечтомов Е. М., Петров А. А** Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. СПб.: Лань, 2022. 180 с.

2. **Вечтомов Е. М., Петров А. А** Простые идеалы в мультипликативно идемпотентных полукольцах // *Математические заметки.* 2022. Т. 111. Вып. 4. С. 494–505.

3. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца, в которых все конгруэнции идеальные // *Математические заметки.* 2022. Т. 112. Вып. 3. С. 376–383.

4. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца с аннуляторным условием // *Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории : материалы XXI Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения А. А. Карацубы.* Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2022. С. 125–128.

5. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца с дополнительными условиями // *Материалы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Математика и проблемы образования».* Киров: ВятГУ, 2022. С. 4–8.

6. **Вечтомов Е. М.** Аннуляторные характеризации булевых колец и дистрибутивных решеток // *Математические заметки.* 1993. Т. 53. Вып. 2. С. 15–24.

7. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

8. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

9. **Скорняков Л. А.** Элементы теории структур. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1982. 160 с.

References

1. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Funkcionalnaya algebra i polukolca. Polukolca s idempotentnym umnozheniem* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication]. St. Petersburg: Lan, 2022. 180 p. (In Russ.)

2. **Vechtomov E. M., Petrov A. A** Prime ideals in multiplicatively idempotent semirings. textitMatematicheskie zametki [Mathematical notes]. 2022. Vol. 111. Issue 4. P. 494–505. (In Russ.)

3. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings in which all congruences are ideal. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2022. Vol. 112. Issue 3. Pp. 376–383. (In Russ.)

4. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings with the annihilator condition. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii : materialy XXI Mezhdunarodnoj konferencii, posvyashhennoj 85-letiyu so dnya rozhdeniya A. A. Karacuby* [Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Materials XXI International conference dedicated to the 85th anniversary of the birth of A. A. Karatsuba]. Tula: TSPU im. L.N. Tolstoy, 2022. Pp. 125–128. (In Russ.)

5. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings with additional conditions. *Materialy 41-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskix vuzov «Matematika i problemy obrazovaniya»* [Proceedings of the 41st International Scientific Seminar for Teachers of Mathematics and Informatics of Universities and Pedagogical Universities «Mathematics and Problems of Education»]. Kirov: VyatGU, 2022. Pp. 4–8.

6. **Vechtomov E. M.** Annihilator characterizations of Boolean rings and distributive lattices. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 1993. T. 53. Issue 2. Pp. 15–24. (In Russ.)

7. **Chermnykh V. V.** *Funkcionalnye predstavleniya polukolec* [Functional representations of semirings]. Kirov: Publishing house of VyatGGU, 2010. 224 p. (In Russ.)

8. **Gretzer G.** *Obshhaya teoriya reshetok* [General theory of lattices]. M.: Mir, 1982. 456 p. (In Russ.)

9. **Skornyakov L. A.** *Elementy teorii struktur. 2-e izd., dop.* [Elements of the theory of structures. 2nd ed., add.] Moscow: Nauka, 1982. 160 p. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Вечтомов Евгений Михайлович / Evgeniy M. Vechtomov
Д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики / Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics
Вятский государственный университет / Vyatka State University
610000, Кировская область, г. Киров, ул. Московская, д. 36 / 36 Moskovskaya St., Kirov, Russian Federation, 610000

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 15.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 25.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 25.09.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

Informatics

Original article

Selecting a Solution Method for the Problem of Automating the Classification of Texts Related to Industrial Safety Audits

Yuriy V. Golchevskiy[1], **Lidiya P. Shilova**[2]
[1]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: yurygol@mail.ru
[2]Semantic machines, e-mail: shilovalp@bk.ru

Abstract. The importance of solving problems arising from text classification in to-day's world is undeniable, due to the fact that a huge amount of textual in-formation of different kinds is generated, which needs some processing and analysis.

The purpose of the paper is to find the best way to automate the classi-fication of industrial safety audits on the example of a large industrial enter-prise. Existing solutions and tools in the field of text classification problems were investigated. This work was carried out using the Scikit-Learn library. Based on a sample of 28,000 industrial safety au-dits, which were evenly divided into 14 classes, several different methods provided by the library were tested. During the analysis of the results, the linear method was proposed as the most accurate and fastest method investi-gated. Although this method does not provide the full level of reliable classi-fication required from a practical point of view, the results can noticeably simplify and speed up staff work.

Keywords: Machine Learning, Text Classification, Industrial Safety Audits

For citation: Golchevskiy Yu. V., Shilova L. P. Selecting a Solution Method for the Problem of Automating the Classification of Texts Related

to Industrial Safety Audits. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 21–32. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_21

ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_21

Выбор метода решения задачи автоматизации классификации текстов, связанных с аудитами промышленной безопасности

Юрий Валентинович Гольчевский[1], **Лидия Павловна Шилова**[2]
[1]Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: yurygol@mail.ru
[2]ООО «Смысловые решения», e-mail: shilovalp@bk.ru

Аннотация. Важность решения проблем, возникающих при классификации текстов, неоспорима в связи с тем, что в современном мире генерируется огромное количество текстовой информации различного рода, которая нуждается в некоторой обработке и анализе. Целью данной работы является поиск наилучшего способа автоматизации классификации аудитов промышленной безопасности на примере крупного промышленного предприятия. В ходе исследования были изучены существующие решения и инструменты в области задач классификации текстов. Работа была выполнена с использованием библиотеки Scikit-Learn. На основе выборки из 28 тысяч аудитов промышленной безопасности, которые были равномерно разделены на 14 классов, было протестировано несколько различных методов, предоставляемых библиотекой. В ходе анализа результатов линейный метод был предложен как наиболее точный и быстрый из исследованных. Хотя этот метод не обеспечивает полного уровня надежной классификации,

требуемого с практической точки зрения, результаты могут заметно упростить и ускорить работу персонала, решающего представленные задачи.

Ключевые слова: машинное обучение, классификация текстов, аудит промышленной безопасности

Для цитирования: Гольчевский Ю. В., Шилова Л. П. Выбор метода решения задачи автоматизации классификации текстов, связанных с аудитами промышленной безопасности // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 21–32. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_21

Introduction

Machine learning is now widespread in many aspects of human activity. For example, a computer can recognize images in photos, make medical diagnoses, solve legal issues, make predictions about the situation in the stock markets, and this is only a small part of the tasks solved by modern intelligent systems [1–5]. Many people use such systems, sometimes without knowing it, for example, when receiving search engine results, encountering contextual advertising on the Internet, using spam filtering and in many other situations. Programs, like humans, learn by analyzing data in different areas. At the same time, each problem requires its own specific set of data to learn and its own model [6].

The importance of solving the problems of text classification has increased sharply due to the fact that in the modern world a huge amount of textual information of different plan (technical, scientific, creative and other directions) is generated. Classification as a problem is one of the rapidly developing fields and has wide application horizons in information processing and data mining. Various architectures, approaches and algorithms have been proposed in scientific publications, e.g. [7–9].

The task of classifying documents related to industrial safety is no exception. For example, in [10] a method based on automatic classification of construction accident messages, which can be useful in developing risk

management strategies is proposed, in [11] the authors apply classification of texts based on the use of ontologies and propose an ontology of construction safety domain and its corresponding knowledge base.

According to our calculations, at the researched enterprise, which is being automated, a user spends from 10 to 30 seconds to fill in one field of an industrial safety audit in an electronic document. More than 70 thousand industrial safety audits can be generated in a year. If the classification process were to be automated, about 200 to 600 hours of work time could be saved.

This is the purpose of this study, which is to find the best way to automate classification of industrial safety audits on the example of one enterprise for further routing of such documents. In solving this task the problems of text classification were studied, several different methods of classification of industrial safety audits were applied, the obtained results were compared and conclusions about the effectiveness of the considered methods were drawn.

Methods

Classification refers to machine learning "with a teacher", which requires partitioned training data. The classification algorithm has to assign a document to one of the classes, the list of which is known in advance. As a process, classification typically proceeds as follows: preprocessing, object design, dimension decomposition, model selection and model evaluation. In [12] an overview of each step and a review and comparison of classification algorithms are provided, while in [13–15] authors discusses methods and problems associated with different approaches to data mining, including machine learning-based text analysis.

An important part of text classification is text preprocessing. In [16] preprocessing of the native language text is defined as bringing the text into a form that is suitable for further work. That is, the first step is to obtain a set of texts that are used as the research base.

A total of 28 000 industrial safety audits were downloaded from the existing database and divided uniformly into 14 classes. By class, we mean

the “Theme” field of the document. All audit text fields (“Justification”, “Location”, “Observation”, etc.) were merged into one text field. Thus, the resulting file represented a table, where the first “theme” column is the security audit class (topic) and the second “description” column is the document text fields. The text in the “description” column was stripped of punctuation marks and numbers, reduced to lower case and each word written in its initial form. For clarity, Figure 1 shows a word cloud (in Russian) of the “description” field without preprocessing (left) and with processing (right), and Figure 2 shows an example of prepared data.

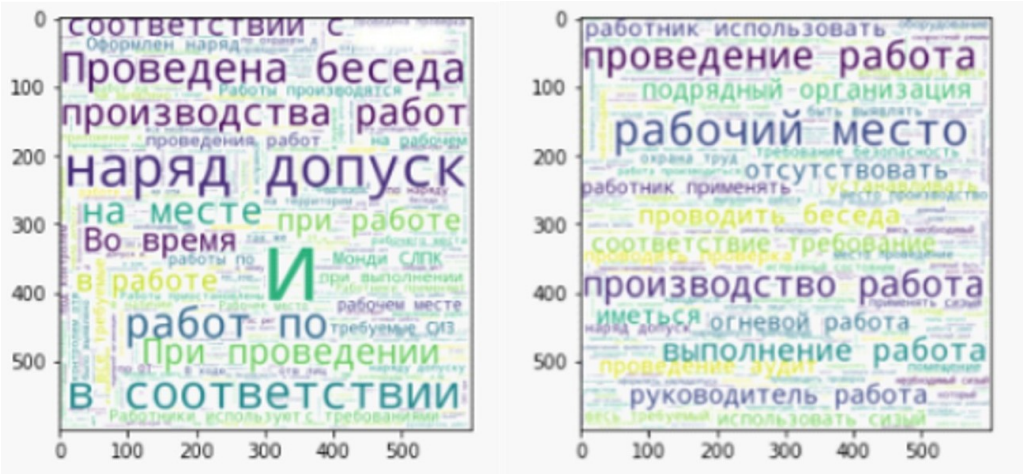

Fig. 1. Word cloud before preprocessing (left) and after processing (right)

The study then used 20% of the data for the test sample and 80% for the training sample.

Then it is required to represent the document in the form of some numerical model. Most often, a document is represented as a multidimensional vector [17]. One simple vectorization method is the “Bag of words” (BOW) [18].

The accuracy of classification depends on the choice of hyperparameters. Hyperparameters are often selected using a matching method, although there are also special functions that allow automating this. Once the hyperparameters have been selected, the classifier can be started.

After training the classifier on a training sample. The classifier “predicts” classes for the test sample. This builds an error matrix.

```
Ввод [2]: df = pd.read_csv('~/Рабочий стол/FT/full.csv', usecols=["theme","description_new"])
          df.head()
```

Out[2]:

	theme	description_new
0	__label__Организация_проведения_работ	проводить испытание лестница спуск отстойник
1	__label__Организация_проведения_работ	проводить испытание лестница спуск отстойник
2	__label__Организация_проведения_работ	баллон находиться открытый место попадать солн...
3	__label__Организация_проведения_работ	помещение кухня использоваться сумматор бытово...
4	__label__Организация_проведения_работ	работник подъем понтон использовать приставной...

Fig. 2. Example of prepared data

One of the main evaluations of the quality of the classifier is precision, which is calculated as the ratio of true positives to total positives. The second parameter is recall, which is the ratio of true positives to all possible positives. Another characteristic is the weighted average value of accuracy and completeness. This is called the F-value. F varies from 0 to 1, where 1 is the best (ideal) value for F.

The Scikit-Learn library for the Python programming language was used for the study, providing the necessary machine learning algorithms as well as supporting tools and utilities. It provides a standardised API, which makes it user-friendly and easy to use. More information about Scikit-Learn can be found in [19–21].

Vectorization of the texts was done using the CountVectorizer class, which is based on the BOW model. The result was a matrix that contained the number of occurrences of each word. The GridSearchCV class was used for parameter selection – a grid search. The input is a model and various values of hyperparameters (hyperparameter grid). Then, for each possible hyperparameter values combination, the method calculates the error and chooses the combination at which the error is minimal. More details can be obtained in [22].

Results and Conclusions

The following methods from Scikit-Learn library were chosen for comparison: MultinomialNB (probabilistic), KNeighborsClassifier (metric), Random-ForestClassifier (logical), LinearSVC (linear) and MLPClassifier.

MultinomialNB method represents an implementation of Naive Bayes. KNeighborsClassifier represents an implementation of the k-nearest neighbour method. The basic idea is that if some point A is very far from point B, and B is very close to point C, then A and C are also far away from each other and there is no need to calculate the distance between them. The data structure used is in the form of trees. In the current model the option auto is selected for the algorithm parameter, i.e. the method is selected automatically; the parameters are set so that the closer neighbours have more influence.

RandomForestClassifier is an implementation of decision tree method, while LinearSVC method is based on reference vector method.

In order not to complicate the conclusions presented, the chosen parameters for the above methods will not be given in detail in this paper. The MLPClassifier method was run with default parameters due to long running.

Summary tables were obtained for each of the methods. As an example, the results obtained for KNeighborsClassifier and LinearSVC methods are shown in Figures 3 and 4 respectively.

```
Program time: 6.085319995880127 seconds.
                                                                                    precision    recall  f1-score
support

                                                  __label__Ведение_документации       0.59      0.67      0.63
324
                                     __label__Использование_инструмента,_станков       0.62      0.53      0.57
438
                                                 __label__Культура_производства       0.35      0.34      0.35
398
                                          __label__Обозначения,_знаки,_таблички       0.68      0.52      0.59
558
                                          __label__Организация_проведения_работ       0.43      0.57      0.49
288
                                            __label__Оформление_наряда-допуска       0.76      0.57      0.65
565
                                                 __label__Поведение_работника       0.40      0.58      0.47
264
                                        __label__Погрузочно-разгрузочные_работы       0.46      0.57      0.51
325
                                                 __label__Пожарная_безопасность       0.63      0.57      0.60
463
                                                                    __label__СИЗ       0.65      0.56      0.60
438
__label__Складирование_продукции,_деталей,_запчастей,_наличие_технологических_карт       0.61      0.57      0.59
429
                                  __label__Состояние_зданий,_сооружений,_оборудования       0.47      0.58      0.52
358
                                                 __label__Транспортные_средства       0.63      0.70      0.66
349
                                                  __label__Электробезопасность       0.53      0.57      0.55
396

                                                                      accuracy                           0.56
5585
                                                                     macro avg       0.56      0.56      0.56
----
```

Fig. 3. Result of applying the KNeighborsClassifier method

Table

Table of results for the different methods

Method	Learning time, in secs	F
MultinomialNB	0.9	0.63
KNeighborsClassifier	6.9	0.56
RandomForestClassifier	36.6	0.65
LinearSVC	8.9	0.65
MLPClassifier	1573.5	0.58

A summary table with precision, recall and F-value (f1-score) estimates was also obtained. The data are presented in Table 1. The most important value for our study is the average F-value for all classes.

It was found that RandomForestClassifier and LinearSVC methods have the best F-value. Nevertheless, LinearSVC method is faster than RandomForestClassifier.

In the future, it is planned to conduct additional research related to the choice of other methods of text vectorization. For example, methods based on neural networks that convert words into “meaningful vectors” [23], as well as the use of ensembles of methods [24].

This study investigated the stages of classification and the possibilities of using automation to classify texts related to industrial safety audits. A comparison of industrial safety audit classification methods based on the application of methods and tools provided by the Scikit-Learn library was performed. During the analysis of the results, it was proposed to use LinearSVC method as the most accurate and fastest of the investigated ones.

The LinearSVC method was implemented in a corporate document analysis system for further testing on real data.

Although this method does not provide the full level of reliable classification required from a practical point of view, the results of its work can significantly simplify and speed up the work of company employees involved in processing of industrial safety audits, which was found as a result of testing the use of this approach.

```
Program time: 8.93991756439209 seconds.
                                                                    precision    recall  f1-score
support

                                __label__Ведение_документации           0.72      0.65      0.68
410
                    __label__Использование_инструмента,_станков         0.69      0.67      0.68
389
                                __label__Культура_производства          0.38      0.44      0.41
336
                        __label__Обозначения,_знаки,_таблички           0.71      0.65      0.68
465
                        __label__Организация_проведения_работ           0.51      0.65      0.57
301
                          __label__Оформление_наряда-допуска            0.78      0.77      0.77
432
                                __label__Поведение_работника            0.52      0.59      0.56
344
                      __label__Погрузочно-разгрузочные_работы           0.63      0.65      0.64
387
                                __label__Пожарная_безопасность          0.75      0.73      0.74
429
                                                  __label__СИЗ          0.69      0.68      0.68
378
__label__Складирование_продукции,_деталей,_запчастей,_наличие_технологических_карт   0.69      0.62      0.66
444
                  __label__Состояние_зданий,_сооружений,_оборудования   0.65      0.62      0.63
448
                                __label__Транспортные_средства          0.74      0.69      0.72
412
                                __label__Электробезопасность            0.68      0.71      0.70
410

                                                     accuracy                                0.66
5585
                                                    macro avg           0.65      0.65      0.65
----
```

Fig. 4. Result of applying the LinearSVC method

References

1. «Post Bank»: we saved hundreds millions rubles using biometrics. Available at: https://bloomchain.ru/newsfeed/k-kontsu-2019-goda-vseh-klientov-pochta-banka-budut-identifitsirovat-po-biometrii (accessed: 2021/10/05). (in Russ.)

2. Loan scoring and fight against swindlers: AI in Russian banking sector. Available at: https://aiconference.ru/en/article/kreditniy-skoring-i-borba-s-moshennikami-ob-ii-v-bankovskoy-sfere-rossii-96820 (accessed: 2021/10/05).

3. Neurohive – Neural Networks. Available at: https://neurohive.io/en/ (accessed: 2021/10/05).

4. **Hannun A. Y., Rajpurkar P., Haghpanahi M. et al.** Cardiologist-level arrhythmia de-tection and classification in ambulatory electrocardiograms using a deep neural net-work. *Nat Med 25*, 2019. Pp. 65–69. DOI: 10.1038/s41591-018-0268-3.

5. **Koshy R., Padalkar A., Nikam N., Jain V.** Easy verdict: Digital assistant to resolve criminal litigation *10th International Conference on Advances in Computing, Con-trol, and Telecommunication Technologies*, 2019. Pp. 17–23.

6. **Domingos P.** The Master Algorithm: How the Quest for the Ultimate Learning Machine Will Remake Our World. Basic Books, New York, 2015.

7. **Mou S., Du P., Cheng Z.** A brain-inspired information processing algorithm and its application in text classification. *Expert Systems with Applications*, Vol. 177, 2021. DOI: 10.1016/j.eswa.2021.114828.

8. **Asim M., Javed K., Rehman A., Babri H. A.** A new feature selection metric for text classification: eliminating the need for a separate pruning stage. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 12(9), 2021. Pp. 2461–2478. DOI: 10.1007/s13042-021-01324-6.

9. **Shimomoto E. K., Portet F., Fukui K.** Text classification based on the word subspace representation. *Pattern Analysis and Applications*, 24 (3), 2021. Pp. 1075-1093. DOI: 10.1007/s10044-021-00960-6.

10. **Zhang J., Zi L., Hou Y. et al.** A C-BiLSTM approach to classify construction accident reports. *Applied Sciences (Switzerland)*, 10(17), 2020. DOI: 10.3390/APP10175754.

11. **Chi N.-W., Lin K.-Y., Hsieh S.-H.** Using ontology-based text classification to assist Job Hazard Analysis. *Advanced Engineering Informatics*, 28(4), 2014. Pp. 381–394. DOI: 10.1016/j.aei.2014.05.001.

12. **Zhan, T.** Classification Models of Text: A Comparative Study. *IEEE 11th Annual Computing and Communication Workshop and Conference, CCWC 2021*, 2021. Pp. 1221-1225. DOI: 10.1109/CCWC51732.2021.9375918.

13. **Li Y., Dai G., Li G.** Feature selection method of text tendency classification. *Proceedings – 5th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, FSKD-2008*, 2008. Pp. 34–37. DOI: 10.1109/FSKD.2008.263.

14. **Flach P.** *Machine Learning: The Art and Science of Algorithms That Make Sense of Data.* Cambridge University Press, New York, 2012.

15. **Rani M.S., Sumathy S.** Analysis on various machine learning based approaches with a perspective on the performance. *Innovations in Power and Advanced Computing Technologies*, i-PACT 2017, 2017. Pp. 1–7. DOI: 10.1109/IPACT.2017.8244998.

16. **Bengfort B., Bilbro R., Ojeda T.** *Applied Text Analysis with Python: Enabling Lan-guage-Aware Data Products with Machine Learning.* 1st edn. O'Reilly Media, Inc., 2018.

17. **VanderPlas J.** *Python Data Science Handbook: Essential Tools for Working with Data. 1st edn.* O'Reilly Media, Inc., 2017.

18. **Chollet F.** *Deep Learning with Python.* Manning Publications Co, 2017.

19. **Géron A.** *Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow: Concepts, Tools, and Techniques to Build Intelligent Systems. 2nd edn.* O'Reilly Media, Inc., 2019.

20. **Buitinck L., Louppe G., Blondel M. et al.** API design for machine learning software: experiences from the scikit-learn project. *ECML PKDD Workshop: Languages for Data Mining and Machine Learning*, 2013. Pp. 108–122.

21. **Rashka S., Mirjalil V.** *Python Machine Learning: Machine Learning and Deep Learning with Python, scikit-learn, and TensorFlow. 2nd edn.* Packt Publishing, 2017.

22. **Brink H., Richards J. W., Fetherolf M.** *Real-World Machine Learning. 1st edn.* Manning Publications Co, 2016.

23. fastText. Library for efficient text classification and representation learning. Available at: https://fasttext.cc/ (accessed: 2021/10/05).

24. **Opitz D., Maclin R.** Popular ensemble methods: An empirical study. *Journal of Artifi-cial Intelligence Research*, 11, 1999. Pp. 169–198. DOI: 10.1613/jair.614.

Сведения об авторах / Information about authors
Юрий Валентинович Гольчевский / Yuriy V. Golchevskiy
к.ф.-м.н, доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Applied Informatics Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., д. 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Лидия Павловна Шилова / Lidiya P. Shilova
аналитик / analyst
ООО «Смысловые машины» / Semantic machines
167026, Россия, г. Сыктывкар, пр-кт Бумажников, д. 2 / 167026, Russia, Syktyvkar, Boumazhnikov Ave., 2

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 15.08.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 21.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.09.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_33

ОБУЧЕНИЕ В ЦИФРОВУЮ ЭПОХУ: ПОМНИТЬ ИЛИ ГУГЛИТЬ

Надежда Николаевна Бабикова
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: valmasha@mail.ru

Аннотация. Мы живем в эпоху быстрых изменений во всех областях человеческой практики, связанных с развитием цифровых технологий. Как эти изменения отражаются на показателях памяти современных студентов, что сами студенты думают об этих изменениях и какие когнитивные стратегии запоминания применяют в процессе обучения? Как можно помочь студентам сформировать необходимый уровень запоминания учебного материала? Эти вопросы легли в основу исследования, результаты которого представлены в статье.

Ключевые слова: память, показатели памяти, стратегии запоминания, Интернет, цифровые технологии

Для цитирования: Бабикова Н. Н. Обучение в цифровую эпоху: помнить или гуглить // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 33–46. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_33

© Бабикова Н. Н., 2022.

Methodical materials

Original article

Education in the digital age: remember or google

Nadezhda N. Babikova
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: valmasha@mail.ru

Abstract.
We live in an age of rapid changes in all areas of human practice, associated with the development of digital technologies. How do these changes affect the memory performance of modern students, what do students themselves think about these changes, and what cognitive memory strategies are used in the learning process? How can we help students form the necessary level of memorization of educational material? The article presents the results of a study based on these questions.

Keywords: memory, memory performance, memory strategies, Internet, digital technologies

For citation: Babikova N. N. Education in the digital age: remember or google. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 33–46. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_33

В 2018 г. группой преподавателей математики СыктГУ было проведено исследование метакогнитивной осознанности студентов при помощи опросника Metacognitive Awareness Inventory (MAI, авторы – американские психологи образования Г. Шроу, Р. С. Деннисон). Результаты опубликованы в [1; 2]. Исследование показало достаточно высокий уровень способности студентов регулировать собственное познание. Однако около половины студентов отметили, что не «умеют хорошо запоминать информацию».

Почему так происходит? Связано ли мнение студентов о качестве запоминания с влиянием Интернета? И как можно помочь студентам в

ходе обучения сформировать необходимый уровень запоминания? Эти вопросы легли в основу исследования, результаты которого представлены в статье.

Анализ научных работ показывает отсутствие единого мнения о качественных и количественных показателях памяти современных студентов. Некоторые авторы отмечают низкую способность запоминания информации: хорошей слуховой памятью обладают около 50 процентов, а зрительной – около 40 процентов студентов [3; 4]. В то же время результаты исследований других авторов свидетельствуют, что современные студенты обладают высоким качеством кратковременной памяти [5]. Интересным представляется сравнительный анализ показателей памяти студентов 70–80-х годов прошлого века и современных студентов А. Н. Бородиной [6]. Автор в 2013 году провела репликацию классических исследований памяти Я. И. Петрова (1972) и М. М. Гарифуллиной (1977). Показатели объема памяти на слоги современных студентов оказались значительно ниже показателей 1972 года – примерно в 2.5 раза. Современным студентам требуется большее количество повторений для заучивания материала: 8.95 против 6.7 повторений в 1977 году. Современные студенты уступают по коэффициенту логической памяти, но превосходят студентов 1977 года по показателям максимального и среднего объема кратковременной памяти, а также критерию заучивания.

Многие исследователи связывают изменение показателей памяти современных студентов с влиянием Интернета. В 2011 году профессор Колумбийского университета Б. Спарроу ввела в оборот термин «Google-эффект», исследуя когнитивные последствия наличия огромного и легкодоступного хранилища информации, каковым является Интернет [7]. Результаты проведенных Спарроу экспериментов показали, что человек лучше запоминает информацию, если знает, что впоследствии она будет ему недоступна. Люди с большой вероятностью забывают информацию, если знают, где она хранится.

Ряд авторов считает, что интенсивное использование Интернета в образовательных и развлекательных целях приводит к снижению ка-

чества запоминания и извлечения информации из памяти [8; 9]. В то же время результаты изучения А. В. Кузнецовой мнемических способностей интернет-активных школьников 14–16 лет свидетельствуют, что при расширении интернет-активности процесс запоминания становится более осознанным и включает основные действия регулирующих механизмов [10, с. 234]. Л. В. Черемошкиной показана специфика влияния систематического использования интернет-ресурсов на мнемические способности [11]. Автор считает: результаты исследования позволяют предположить, что сочетание познавательной, коммуникативной и игровой деятельности в Сети оказывает развивающее воздействие на функциональную основу памяти [11, с. 66]. В исследовании принимали участие экспериментальные группы с различным стажем интернет-активности и различных возрастных категорий: дети 11 лет, школьники 16 лет, студенты 18–20 лет, люди с высшим образованием 25–35 лет. При этом зафиксировано увеличение скорости запоминания простого невербального бессмысленного материала с увеличением стажа использования интернет-ресурсов для всех возрастных категорий.

Мы живем в эпоху пятой информационной революции, цифровые технологии стремительно развиваются и проникают во все сферы человеческой жизни – от совершения покупок до общения и обучения. Первая информационная революция – изобретение письменности около 6 тысячелетий назад – развивалась гораздо медленнее. Греческий алфавит появился в IX веке до н.э., но еще в V веке до н.э. Сократ осуждал неконтролируемое распространение письменности. И только в середине XV века нашей эры вторая информационная революция – изобретение книгопечатания – проложила дорогу к грамотности широким массам. А распространение Интернета в режиме 24/7 произошло гораздо быстрее. Высокоскоростной и мобильный Интернет стали доступны каждому буквально в течение последних полутора десятков лет.

Изменение способов обработки и хранения информации, переход на новые способы коммуникации, как и формирование любых новых навыков, приводят к изменению нейронной структуры мозга. Естественно это вызывает определенные опасения относительно последствий новых

технологий для человеческого познания. Нейропсихолог М. Вульф пишет: «В процессе исследования начала формирования умеющего читать мозга я с удивлением узнала, что вопросы грамотности, поднятые Сократом более двух тысячелетий назад, касаются множества проблем начала XXI века. Я поняла, что Сократ был обеспокоен переходом от устной культуры к культуре грамотности и рисками, на которые этот переход обрек людей, особенно молодых. Эти проблемы отражают и мое беспокойство по поводу того, что наши дети погружаются в цифровой мир. Как и древние греки, мы вступили в стадию очень важного перехода – в нашем случае от письменной культуры к цифровой и более визуальной» [12, с. 105]. Сократ опасался, что распространение письменности приведет к увеличению объема коллективной памяти, но сократит объем памяти индивидуальной. И мы сейчас опасаемся этого.

Каждый день осознанно или неосознанно, в быту, на работе или учебе, мы делаем выбор: где хранить получаемую информацию – в Сети, на локальном электронном носителе, бумажном носителе или собственной памяти. Как изменение наших отношений с внешней и нашей собственной памятью должно отражаться на методиках обучения в вузе? После выхода из режима длительного дистанционного обучения в период пандемии мы обсуждали преимущества и недостатки такого формата со студентами направления подготовки «Прикладная информатика». Большинство студентов высказывается за смешанное обучение: они хотели бы практические и лабораторные работы выполнять дистанционно, а лекционные занятия предпочли бы посещать очно. Лабораторные работы дистанционно можно выполнять в удобное время и в удобном темпе, обращаясь в случае необходимости за помощью к Интернету, к одногруппникам и преподавателю. А на лекциях студенты хотели бы общаться. Современная лекция не монолог, в большинстве случаев лекции интерактивны. Раньше использование информационных технологий в обучении обладало эффектом новизны, для современных студентов «эффектом новизны» становится живое человеческое общение.

Таблица 1

Ответы на вопросы анкеты о памяти

Текст вопроса	**Проценты ответов**	
По аналогии с компьютерами у человека различают кратковременную память (до 30 секунд) и долговременную память. Можете ли вы сказать:	Да	Нет
У меня хорошая кратковременная память	74	26
У меня хорошая долговременная память	74	26
Я умею хорошо запоминать информацию	63	37
Возможность круглосуточного быстрого поиска информации в Интернете способствует ухудшению моей памяти	26	74

В 2022 году было проведено анкетирование, групповые и индивидуальные беседы со студентами 3-го курса дневного отделения направления подготовки «Прикладная информатика» (19 человек) по вопросам памяти, стратегий запоминания. В табл. 1 приведены ответы на вопросы анкеты, отражающие мнение студентов о собственной памяти. Проценты ответов о кратковременной и долговременной памяти совпадают (по 74 процента), но были студенты, считающие, что один вид памяти у них хороший, а другой – нет. Умеют хорошо запоминать информацию, по их мнению, 63 процента студентов. Студенты различают само наличие хорошей памяти и умение ею пользоваться: 3 студента отметили, что у них хорошая и кратковременная и долговременная память, но не согласились с утверждением «Я умею хорошо запоминать информацию». С утверждением о том, что Интернет негативно влияет на память, согласились 5 студентов. Все они также не согласились с утверждением «Я умею хорошо запоминать информацию». Что первично – влияние Интернета или неумение пользоваться своей памятью? Стоит заметить, что один из этих студентов не смог указать ни одной стратегии запоминания, которую он использует...

Таблица 2

Ответы на вопросы анкеты об учебных стратегиях

Текст вопроса	Свободный ответ	Процент ответов
Какие методы, стратегии вы применяете для запоминания математических формул, обозначений, формулировок	Учу наизусть/зубрю/многократно повторяю	53
	Записываю/переписываю/проговариваю вслух	43
	Использую аналогии/ассоциации	27
	Решаю задачи	22
	Составляю диаграммы, графики, картинки	22
	Применяю карточки/интервальное повторение	11
	Подбираю примеры	11
	Стараюсь понять	11
	Структурирую информацию	11
	Нет ответа	5
Перечислите виды учебной деятельности во время аудиторных занятий, которые помогают вам лучше запоминать новую информацию	Анализ реального применения информации	43
	Демонстрация/визуализация/разбор примеров	32
	Работа в парах и группах	16
	Опрос/тест/викторина	16
	Даже не знаю	16
	Решение задач	11
	Сравнение материала разных источников	5
	Беседы/разбор сложных моментов	5

В табл. 2 приведены ответы студентов на вопросы с открытым ответом о применении когнитивных стратегий запоминания. Наиболее популярной стратегией, применяемой самостоятельно, является стратегия многократного повторения. Вторая по популярности стратегия – «Записываю, проговариваю». Среди видов учебной деятельности, которые, по мнению студентов, помогают им запоминать информацию во время аудиторных занятий, лидирует «Анализ применения в реальной деятельности». Весьма прагматично. На втором месте по популярности находится вид деятельности «Демонстрация / визуализация / разбор примеров», что не удивительно, так как подбор подходящих примеров – это один из когнитивных процессов понимания учебного материала, а то, что понятно, и запоминается лучше.

Все учебные стратегии можно разделить на репетиционные (намеренное повторение), элаборационные (уточняющие – применение мнемотехник для запоминания, перефразирование, изменение формы представления информации) и организационные (создание резюме, планов,

конспектов, схем, концептуальных карт) [13, с. 220]. Опрос показал, что студенты используют в самостоятельной работе преимущественно репетиционные стратегии. Чтобы побудить студентов расширить диапазон стратегий запоминания в самостоятельной работе, целесообразно рассмотреть примеры применения элаборационных и организационных стратегий на аудиторных занятиях. Для каждой дисциплины применение стратегий запоминания имеет свою специфику, и формирование умения применять стратегии на предметном содержании более эффективно, чем абстрактные курсы развития памяти. Например, в работе психологов Е. Ю. Савина и А. Е. Фомина показано, что несовпадение уровня развития общих метакогнитивных навыков и уровня формирования предметно-специфических знаний приводит либо к переоценке, либо к недооценке студентами собственной компетентности [14].

Среди трудностей, связанных с запоминанием в процессе подготовки к экзамену, студенты в первую очередь называют большой объем информации. Когда результаты обучения сформулированы в терминах знания, студенты трактуют «знать» как «помнить», а часто и «помнить наизусть». С информационной точки зрения «знания» – это информация, которую вы способны применить на практике (информация + правила ее использования). Но обязательно ли помнить наизусть эту информацию или мы можем извлечь ее из внешней памяти? Предположим, я не помню наизусть формулу суммы синусов, но я безусловно смогу ее применить. Надо ли помнить все, можно ли запомнить все, все ли надо помнить одинаково?

Есть предметы, в которых «запомнить все» нереально. Например, в дисциплине «Интеллектуальный анализ данных» мы используем язык Python. При этом нам понадобится около 10 специализированных библиотек, каждая из которых содержит в среднем 50 методов. У каждого метода до 10 параметров. Запомнить невозможно, но надо научиться применять.

Извлечение информации из памяти включает два когнитивных процесса: более простой – узнавание, более сложный – воспроизведение. Представляется целесообразным точно определить – какие термины и

факты, законы и принципы, методы и алгоритмы студенты должны быть способны воспроизводить, а какие им достаточно узнавать. Например, для будущего информатика умение вычислять несобственные интегралы не является профессионально значимым. Однако для понимания в дальнейшем теории вероятностей знакомство с этим понятием необходимо. Такое разделение позволит студентам сосредоточиться на точном запоминании наиболее важных понятий дисциплины. А обсуждение вопросов, связанных с разными уровнями запоминания, поможет формированию способности студентов регулировать собственное познание, больше узнать об особенностях своей памяти.

В заключение хочется отметить, что каждая информационная революция демократизировала доступ к информации и способствовала гуманизации образования, расширяя индивидуальные познавательные возможности человека. В настоящее время каждый из нас может выбрать способ получения и хранения информации в зависимости от наших природных возможностей, личных предпочтений и целей. А когда этот выбор происходит в процессе обучения, задача преподавателя – дать ориентиры в информационном поле предмета и помочь студентам правильно ответить на вопрос: «Что надо помнить, а что можно гуглить?»

Список источников

1. Исследование метакогнитивной осознанности студентов университета / Н. Н. Бабикова, О. А. Мальцева, Е. Н. Старцева, М. С. Туркина // *Вестник Марийского государственного университета.* 2018. Т. 12. № 3 (31). С. 9 - 16. DOI 10.30914/2072-6783-2018-12-3-9-16. EDN AGZIPU.

2. Метакогнитивная осознанность и учебные достижения студентов / Н. Н. Бабикова, О. А. Мальцева, Е. Н. Старцева, М. С. Туркина // *Двадцать пятая годичная сессия Ученого совета Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (Февральские чтения) : сборник материалов: текстовое научное элек-*

тронное издание на компакт-диске, Сыктывкар, 01 – 28 февраля 2018 года. – Сыктывкар: СГУ им. Питирима Сорокина, 2018. 856 с. ISBN 978-5-87661-569-5. EDN YOPLZR.

3. Ашымова Н. Ш., Казакова Н. О. Показатели памяти студентов 1-го курса факультета биологии и химии КГУ им. И. Арабаева // *Проблемы современной науки и образования.* 2017. № 7 (89). С. 16−19. EDN XXMKLZ.

4. Бывшева М. В., Кобалян А. А., Ханова Т. Г. Изучение мнемических способностей студентов в контексте учебно-профессиональной деятельности // *Вестник Мининского университета.* 2017. № 1 (18). С. 19. EDN YORFEZ.

5. Дубинина М. Н. Изучение кратковременной памяти у студентов и аспирантов высшей школы // *Вестник Донского государственного аграрного университета.* 2019. № 1 – 2 (31). С. 37−42. EDN ZASMWT.

6. Бородина А. Н. Сравнительный анализ показателей памяти современных студентов и студентов 70-80 гг. XX века // *Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология.* 2015. № 4 (24). С. 122−131. EDN VBGEEN.

7. Sparrow B., Liu J., Wegner D. M. Google effects on memory: cognitive consequences of having information at our fingertips // *Science.* 2011. Vol. 333. No. 6043. Pp. 776–778 [Электронный ресурс]. URL: https://psychology.ua.edu/wp-content/uploads/2016/03/Google-Is-Changing-the-Way-we-Think.pdf (дата обращения: 07.09.2022).

8. Давыдовский А., Пищова А. Влияние интернет-среды на процессы памяти // *Наука и инновации.* 2018. № 12(190). С. 28-33. EDN YTVESL.

9. Чижикова Е. С. Влияние Интернета на память // *Тенденции и перспективы развития социотехнической среды : материалы IV международной научно-практической конференции, Москва, 13 декабря*

2018 года / отв. ред. И. Л. Сурат. М.: Современный гуманитарный университет, 2018. С. 474–479. EDN YOXCIP.

10. Кузнецова А. В. Мнемические способности интернет-активного школьника 14-16 лет // *Ярославский педагогический вестник.* 2010. Т. 2. № 4. С. 231–235. EDN OGKQML.

11. Черемошкина Л. В. Влияние интернет-активности на мнемические способности субъекта // *Психология. Журнал Высшей школы экономики.* 2010. Т. 7. № 3. С. 57–71. EDN QOZCMF.

12. Вулф М. Пруст и кальмар: Нейробиология чтения / пер. с англ. Е. Ю. Мягковой. М.: КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2020. 384 с.

13. Pintrich P. R. The Role of Metacognitive Knowledge in Learning, Teaching, and Assessing. Revising Bloom's Taxonomy // *Theory Into Practice.* 2002. No. 41(4). Pp. 219–225 [Электронный ресурс]. URL: https://www.researchgate.net/publication/242670371_The_Role_of_Metacognitive_Knowledge_in_Learning_Teaching_and_Assessing (дата обращения: 07.09.2022).

14. Савин Е. Ю., Фомин А. Е. Обобщенные и предметно-специфичные метакогнитивные навыки в учебной деятельности студентов // *Психологические исследования.* 2014. Т. 7. № 37. С. 8. EDN TLPMJN.

References

1. Research of the metacognitive awareness of university students / N. N. Babikova, O. A. Maltseva, E. N. Starceva, M. S. Turkina. *Vestnik Marijskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik Marijskogo gosudarstvennogo universiteta]. 2018. T. 12. No 3(31). Pp. 9–16. DOI 10.30914/2072-6783-2018-12-3-9-16. (In Russ.)

2. Metacognitive awareness and student achievement / N. N. Babikova, O. A. Maltseva, E. N. Starceva, M. S. Turkina. *Dvadcat pyataya godichnaya sessiya Uchenogo soveta Syktyvkarskogo gosudarstvennogo*

universiteta imeni Pitirima Sorokina (Fevralskie chteniya) : sbornik materialov: tekstovoe nauchnoe elektronnoe izdanie na kompakt-diske, Syktyvkar, 01–28 fevralya 2018 goda [Twenty-fifth Annual Session of the Academic Council of Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin (February Readings) : collection of materials: text scientific electronic edition on CD-ROM]. Syktyvkar: Syktyvkarskij gosudarstvennyj universitet im. Pitirima Sorokina, 2018. 856 p. ISBN 978-5-87661-569-5. (In Russ.)

3. **Ashymova N. Sh., Kazakova N. O.** Memory performance of 1st year students of the Faculty of Biology and Chemistry of KSU. I. Arabaeva. *Problemy sovremennoj nauki i obrazovaniya* [The problems of modern science and education]. 2017. No 7 (89). Pp. 16−19. (In Russ.)

4. **Byvsheva M. V., Kobalyan A. A., Hanova T. G.** The study of mnemonic abilities of students in the context of educational and professional activities. *Vestnik Mininskogo universiteta* [Bulletin of Minin University]. 2017. No 1 (18). P. 19. (In Russ.)

5. **Dubinina M. N.** The study of short-term memory of the students and graduate students of higher education. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta* [Bulletin of the Don State Agrarian University]. 2019. No 1-2 (31). Pp. 37−42. (In Russ.)

6. **Borodina A. N.** Comparative analysis of memory indicators of modern students and students of the 70-80th. *Vestnik Permskogo universiteta. Filosofiya. Psihologiya. Sociologiya* [Bulletin of Perm University. Philosophy. Psychology. Sociology]. 2015. No 4 (24). Pp. 122−131. (In Russ.)

7. **Sparrow B., Liu J., Wegner D. M.** Google effects on memory: cognitive consequences of having information at our fingertips. *Science*. 2011. Vol. 333. No. 6043. Pp. 776–778. Available at: https://psychology.ua.edu/wp-content/uploads/2016/03/Google-Is-Changing-the-Way-we-Think.pdf (accessed: 07.09.2022).

8. **Davydovskij A., Pishchova A.** Influence of the Internet environment on memory processes. *Nauka i innovacii* [Science and Innovations]. 2018. No 12 (190). Pp. 28−33. (In Russ.)

9. **Chizhikova E. S.** The influence of the Internet on memory. *Tendencii i perspektivy razvitiya sociotekhnicheskoj sredy: Materialy IV mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, Moskva, 13 dekabrya 2018 goda / Otvetstvennyj redaktor I.L. Surat* [Trends and prospects of development of socio-technical environment : materials of the IV International Scientific-Practical Conference, Moscow, December 13, 2018 / ed. by I. L. Surat.]. M.: Sovremennyj gumanitarnyj universitet, 2018. Pp. 474−479. (In Russ.)

10. **Kuznecova A. V.** Mnemic Ability of the Internet Active Schoolboy of 14–16 years. *Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik* [Yaroslavl Pedagogical Bulletin]. 2010. Vol. 2. No 4. Pp. 231−235. (In Russ.)

11. **Cheremoshkina L. V.** The influence of Internet activity on the mnemonic abilities of the subject. *Psihologiya. Zhurnal Vysshej shkoly ekonomiki* [Psychology. Journal of the Higher School of Economics]. 2010. Vol. 7. No 3. Pp. 57–71. (In Russ.)

12. **Vulf M.** Proust and the Squid: The Neurobiology of Reading. M.: KoLibri, Azbuka-Attikus, 2020. P. 384. (In Russ.)

13. **Pintrich P. R.** The Role of Metacognitive Knowledge in Learning, Teaching, and Assessing. Revising Bloom's Taxonomy. *Theory Into Practice*. 2002. No. 41 (4). Pp. 219–225. Available at: https://www.researchgate.net/publication/242670371_The_Role_of_Metacognitive_Knowledge_in_Learning_Teaching_and_Assessing (accessed: 07.09.2022).

14. **Savin E. Yu., Fomin A. E.** Generalized and subject-specific metacognitive skills in students learning activities. *Psihologicheskie issledovaniya* [Psychological research]. 2014. Vol. 7. No 37. P. 8.

Сведения об авторе / Information about author
Надежда Николаевна Бабикова / Nadezhda Nikolaevna Babikova
к.п.н, доцент, доцент кафедры прикладной информатики / Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Applied Informatics Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 22.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 24.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.09.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Научная статья

УДК 004.42
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_47

ИСТОРИЧЕСКИЕ ПУТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Асланов Рамиз Муталлим оглы[1], **Сушков Владислав Викторович**[2]

[1]Институт математики и механики НАН Азербайджана, e-mail: r_aslanov@list.ru

[2]Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: vvsu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена история возникновения и развития теории функции комплексного переменного как отрасли науки и её влияния на развитие соответствующей учебной дисциплины. В обоих случаях выделены основные этапы исторического процесса, указаны ключевые фигуры, даты, факты, публикации и результаты. Утверждается, что традиционная логика изложения учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного» в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. Разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, должна учитывать историю развития дисциплины, но также

© Асланов Р. М., Сушков В. В., 2022.

должна опираться на современные образовательные технологии и возможности электронных обучающих средств и ресурсов.

Ключевые слова: теория функций комплексного переменного, комплексный анализ, история математики, учебная дисциплина, этапы развития, образовательные технологии, методическая составляющая

Для цитирования: Асланов Р. М., Сушков В. В. Исторические пути возникновения и развития теории функций комплексного переменного // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 47–63. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_47

Methodical materials

Original article

Historical ways of emergence and development of complex analysis

Ramiz M. Aslanov[1], Vladislav V. Sushkov[2]

[1]Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, e-mail: r_aslanov@list.ru

[2]Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: vvsu@mail.ru

Abstract. The work considers the history of the emergence and development of the theory of the function of a complex variable as a branch of science and its influence on the development of the corresponding educational discipline. In both cases, the main stages of the historical process are highlighted, key figures, dates, facts, publications and results are indicated. It is argued that the traditional logic of the presentation of the educational discipline "Theory of functions of the complex variable"to a greater or lesser extent repeats the historical logic of the development of the scientific industry. The development of either specialized or as universal as possible textbooks adapted to different levels of teaching should take into account the

history of the development of the discipline, but should be based on modern educational technologies and the possibilities of electronic teaching tools and resources.

Keywords: theory of functions of complex variable, complex analysis, history of mathematics, educational discipline, stages of development, educational technologies, methodological component

For citation: Aslanov R. M., Sushkov V. V. Historical ways of emergence and development of complex analysis. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 47–63. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_47

«Теория функций комплексного переменного» (ТФКП), или, иначе, «Комплексный анализ», – одна из дисциплин, считающихся сегодня классической и обязательной в рамках образовательных программ высшего образования для подготовки математиков, физиков, инженеров, педагогов и не только. В то же время её место и значение как в математической науке, так и в математическом образовании были сформированы исторической необходимостью. Более того, можно утверждать, что содержание и логика изложения ТФКП как дисциплины в значительной степени повторяют историю развития ТФКП как научной дисциплины. Эта логика развития понятийного аппарата, повторяемая в рамках учебного курса, позволяет в значительной степени обеспечить логику освоение студентами учебного материала, осознать целостный характер математики.

Начало развития комплексного анализа как науки принято отсчитывать с работ Джероламо Кардано, в частности с «Artis magnae sive de regulis algebraicis» (1545). Значение этой книги в истории математики позже, уже в XX веке, описано словами Феликса Клейна: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыш современной алгебры, выходящей за пределы античной математики» [1]. Важнейшее значение «Artis magnae…» заключалось не в прикладной значимости, а в его теоретической глубине, превосходящей все современные и предшествовавшие работы математиков Новой Европы. В работе Кардано

приведено описание и обоснование приемов решений уравнений третьей и четвертой степени, как известно, открытых и развитых С. дель Ферро, Н. Тарталья и Л. Феррари. Однако обвинять Кардано в плагиате было бы неправомерно, он прямо указывал не только на авторство формул, но и на порядок попадания этих формул в его поле зрения. Несмотря на то что опубликованные формулы подразумевали использование квадратных корней из отрицательных чисел, сам Дж. Кардано полагал такие величины «софистически отрицательными», бесполезными (по тексту: «фиктивными» (fictae), хотя учитывал их при анализе уравнений и иногда использовал их как промежуточное средство для получения «истинного» результата) и старался не обращаться к ним вне умозрительных построений в рамках развитой теории.

Например, в своей работе Дж. Кардано ставит задачу: найти два числа a, b, сумма которых равна 10, а произведение равно 40. Решение ($5+\sqrt{-15}, 5-\sqrt{-15}$ или, в обозначениях Кардано, 5p:Rm:15 и 5m:Rm:15) он считает «софистическим», однако формально соответствующим условию. Полученный ответ «столь же тонок, сколь и бесполезен», утверждает Кардано, аргументируя своё отношение невозможностью с помощью таких чисел ни измерения какой-нибудь величины, ни выражения изменения какой-либо реальной величины [2].

В то же время чисто мыслительный эксперимент итальянских математиков привлек внимание других ученых, в частности их земляка Р. Бомбелли, который в своей книге «Алгебра» (L'Algebra, 1572) не только осознал структуру комплексных корней из вещественного числа, фактически указав на понятие комплексно-сопряжённых чисел [3], но и описал первые правила арифметических операций над «невозможными» числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Впрочем, в своих работах Бомбелли вообще серьёзно продвинул формальную сторону алгебры – например, он впервые использовал знак скобок (они имели вид прямой и зеркально отражённой буквы L) и числовое обозначение возведения в натуральную степень.

Вскоре, в 1637 году, появился и термин «мнимые числа» («воображаемые», imaginariae), введённый в труде «Геометрия» французским

математиком и философом Р. Декартом. Само обозначение корня из (-1) первой буквой от этого слова было введено в обиход только спустя полтора столетия Л. Эйлером [4]. Мнимые корни появлялись у Декарта в решении задачи о пересечении окружности с параболой, описывая ситуацию не-пересечения и не-касания кривых. Впрочем, сам он полагал какую бы то ни было интерпретацию комплексных чисел бесполезной и писал в части, посвященной основной теореме алгебры: «Всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений» с оговоркой «...но иногда не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням» [5].

Осмысление новой отрасли знания продолжалось, отчасти не столько формализованное, сколько романтизированное (в 1702 году Г. В. Лейбниц писал: «То, что мы называем мнимым корнем – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием»). Впрочем, даже интуитивное использование комплексных чисел зачастую приводило к формулировке важных результатов, как, например, в 1707 году, когда Абрахам де Муавр опубликовал свою знаменитую формулу для вычисления степеней комплексных чисел для положительных целых n. А ещё до того, в 1685 году, Джон Валлис опубликовал «Трактат по алгебре», в котором, кроме всего прочего, привел геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Мнимую величину он понимает как «среднее пропорциональное между положительной и отрицательной величиной», действуя на классическом примере прямоугольного треугольника. Таким образом, Валлис первым пришел к изображению комплексных чисел не на прямой, а на плоскости, что, впрочем, осталось совершенно незамеченным современниками.

Фактаж в рамках новой отрасли математики нарастал, в 1702 году Иоганн Бернулли столкнулся с проблемой вычисления логарифма комплексного числа, к 1712 году Бернулли и Лейбниц спорили по поводу того, чем является логарифм отрицательного числа. В 1707 и 1722 годах Абрахам Муавр пришел к тригонометрической интерпретации ком-

плексного числа, рассматривая решение уравнений высших порядков тригонометрическим способом, с помощью синусов кратных дуг. Но всё же только с работ Леонарда Эйлера (в частности, с «Введения в анализ бесконечно малых», 1748 [6]) в научный обиход вошли и комплексная переменная, и величина i – и тогда же началось систематическое освоение математиками возможностей нового аналитического аппарата. Изначально Эйлер рассматривал комплексную переменную при решении задачи разложения на линейные сомножители, однако впоследствии дал подробное описание элементарных функций комплексного переменного, а ещё позже – условий дифференцируемости и основных положений интегрального исчисления комплексного анализа.

Первый этап развития комплексного анализа как отрасли математики предоставляет преподавателю неограниченный объем исторического материала, позволяющего на конкретных математических и биографических примерах продемонстрировать как необходимость рассмотрения нового математического объекта – комплексного числа, так и взаимосвязь внутриматематических разделов, целостность научного знания как такового. Мотивация к изучению дисциплины обучающимися формируется обоими этими факторами.

В середине XVIII века комплексные числа всё ещё в значительной мере оставались «вещью в себе», постигались математиками постепенно, используясь скорее «по необходимости». Тот же Л. Эйлер в этот период пишет об обнаруженном «парадоксальном факте»: число

$$\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

оказывается вещественным, «весьма близким к 10/13», пытаясь найти объяснение «парадоксу». Однако прикладной характер «воображаемых величин» становился всё очевиднее. Одной из областей их приложений оказалась гидродинамика – в 1752 году Жан Д'Аламбер впервые сумел применить комплексный анализ при решении дифференциальных уравнений с частными производными. В статье «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» он рассматривает скорость $u(x, y) + v(x, y)\sqrt{-1}$.

В работах Д'Аламбера выведены соотношения между частными производными от действительной и мнимой части аналитической функции, к чему три года спустя пришел и Эйлер. Впоследствии эти соотношения были названы условиями Коши–Римана, хотя из принципа первенства их стоило бы именовать условиями Д'Аламбера–Эйлера. Разработанные Д'Аламбером математический аппарат и методология впоследствии начали применяться в теории потенциала – и далее широко и плодотворно практически повсеместно в гидродинамике и вообще математической физике.

В докладе «О формах дифференциалов углов, особенно с иррациональностями, которые интегрируются с помощью логарифмов и круговых дуг, Магистр естественных наук Академии представил 5 мая 1777 года» Л. Эйлер впервые ввел символ мнимой единицы i. [5] Именно с этого момента комплексные числа меняют статус с «формализм для вычислительных задач» на «самостоятельный математический объект», получают современное определение, описание свойств. Тогда же Эйлер ввел в рассмотрение по сути конформные отображения, называя их «подобными в малом», откуда взяло своё начало новое направление приложений комплексного анализа. В продолжение идей Л. Эйлера термин «конформность» был впервые использован двенадцатью годами позже него академиком Российской академии наук Ф.И. Шубертом, рассматривавшим в связи с астрономией и картографией понятие «конформная проекция» (хотя некоторые историки математики полагают первооткрывателем практического применения конформного отображения стереографической проекции на плоскость Птолемея, описавшего его ещё около 150 г.). Дальнейшее развитие теории нашло своё место в работах Ж.Л. Лагранжа – а после того, как в 1797 году в работе Каспара Весселя «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» [7] была предложена непротиворечивая наглядная геометрическая интерпретация комплексных чисел, начинают появляться работы, в которых были даны более или менее удобные интерпретации комплексного числа и определены действия над ними.

Удивительно при этом, что Вессель, геодезист-картограф Датской академии наук, писал свой знаменитый труд для не для математиков, а для профессиональных картографов. Он ввел понятие направленного отрезка, определил сложение как параллельное смещение плоскости, а умножение – как вращение плоскости с растяжением, тем самым полностью сформулировав нынешнюю геометрическую интерпретацию комплексных чисел и операций над ними, принятые в объемах современного курса ТФКП. Достаточно же общая теоретическая трактовка и геометрическая интерпретация была опубликована К.-Ф. Гауссом лишь в 1831 году [4].

Параллельно в работах того же Гаусса получила своё развитие теория интеграла от функции комплексного переменного. Новая отрасль ТФКП началась с данного им определения интеграла в комплексной плоскости, с доказанной интегральной теоремы о разложимости аналитической функции в степенной ряд. Чуть позже П.-С. Лаплас использовал комплексные переменные для вычисления отдельных трудных интегралов и развил метод решения разностных и дифференциальных линейных уравнений, известный сейчас под названием метода преобразований Лапласа.

Таким образом, Л. Эйлер и его современники оставили потомкам богатое наследие в виде огромного массива частично систематизированных, но в целом разрозненных фактов из области комплексного анализа. Фактологический материал требовал систематизации в виде единой теории – и вскоре явились математики, сумевшие сформировать стройное здание комплексного анализа, математической отрасли, давшей последователям богатейший инструментарий для применений.

Основные заслуги в создании целостной теории функций комплексного переменного принадлежат О.-Л. Коши, Б. Риману и К. Вейерштрассу. Каждый из них сформировал и развил одно из направлений ТФКП, ныне образующие совместно основное тело комплексного анализа. Каждый из них заложил фундамент огромной области комплексного анализа. Первая такая область получила название «теория моногенных или дифференцируемых функций». Её отцом-основателем принято счи-

тать Огюстена-Луи Коши. Он не только объединил и систематизировал разрозненные факты, доказанные предшественниками в области дифференциального и интегрального исчисления в комплексном анализе, но и сумел разъяснить глубинный смысл и взаимосвязь основных понятий и операций с мнимыми величинами. В своих работах О.-Л. Коши изложил базу всего последующего анализа – систематическую теорию пределов и основанные на ней теории рядов и элементарных функций, именно Коши представил теорему, полностью проясняющую проблему области сходимости степенного ряда. Чуть позже, в 1826 году, он ввел в обиход термин «вычет», понимая его как разность между значениями интегралов от функции комплексного переменного по двум разным путям. В последующие 3 года он фактически создал стройную и логически безупречную теорию вычетов, ставшую в итоге мощнейшим инструментом в приложениях ТФКП.

Коши вывел интегральную формулу, связавшую значение контурного интеграла со значением подынтегральной функции внутри контура; получил теорему существования разложения функции комплексного переменного в степенные ряды, заложил основы теории аналитических функций многих переменных, определил главные ветви многозначных функций комплексного переменного, впервые использовал для вычислений разрезы плоскости. В 1850 году Коши ввел понятие монодромных функций и выделил класс моногенных функций. Материал, сформулированный и представленный Огюстеном-Луи Коши и его предшественниками, в первую очередь Леонардом Эйлером, составляет базу любого учебного курса ТФКП, в каком варианте бы он ни излагался.

Более того, с 1821 году сам Коши начал читать курс анализа в Политехнической школе, в рамках которого излагались основы комплексного анализа. Современники сообщали о бурном недовольстве его студентов [8] фактом изучения «воображаемых» комплексных чисел, полагая эти знания бесполезными. Впрочем, первое в истории обучение комплексным числам базировалось на достаточно формальном операционном изложении темы в Analyse algébrique, потому негодование обучающихся вполне объяснимо.

В отличном от идей О.-Л. Коши направлении начал развивать комплексный анализ Бернхард Риман – он оформил другое, «геометрическое», направление развития ТФКП. В 1851 году в докторской диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» он предложил связывать функции комплексного переменного с отображениями одной области комплексной плоскости на другую, что, во-первых, позволило воспользоваться сильными сторонами имеющейся геометрической интерпретации и сразу же дало простор для возможных приложений, а во-вторых – позволило наглядно продемонстрировать, что функции комплексного переменного являются расширением понятия функции вещественного переменного. Это стало существенно новым шагом в истории теории аналитических функций и позволило в дальнейшем эффективно выстраивать учебный курс ТФКП как учебную дисциплину, расширяющую стандартный курс вещественного математического анализа и дающую логическое объяснение многим фактам, необъяснимым в рамках этого вещественного анализа. Именно Риман описал различия между функциями комплексного и действительного переменного, а также положил начало геометрической теории функций, введя понятие точек ветвления [9], логичным продолжением чего стало рассмотрение так называемых римановых поверхностей. Доказательство теоремы о существовании конформного отображения односвязных областей позволило Б. Риману стать основателем полноценной теории конформных отображений. В своих работах он вскрыл внутреннюю взаимосвязь комплексного анализа с другими отраслями математики, что позволило создавать новые разделы теории на междисциплинарном пространстве. В частности, именно Риман установил взаимосвязь между аналитическими и гармоническими функциями, а также смог применить комплексный анализ в теории чисел, в частности, введя в рассмотрение дзета-функцию.

Ещё одно направление развития ТФКП сформировалось благодаря реализации возможности представления функций степенными рядами, что породило новое, «аналитическое» направление развития комплексного анализа [1]. В его основу легли результаты Карла Вейерштрас-

са, доказавшего, что множество всех комплекснозначных многочленов позволяет с любой требуемой точностью воспроизводить значения любой непрерывной функции. Он сумел описать сходимость последовательности аналитических функций, обобщить теорему Коши о разложении функции комплексного переменного в степенной ряд, описал процесс аналитического продолжения степенных рядов и его применение в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках развитой теории Вейерштрасс сформулировал и доказал теоремы об операциях над степенными рядами и поставил их, с учетом отношения аналитического продолжения, в центр теории аналитических функций. Также Вейерштрассом была доказана теорема о разложении целой функции в произведение, он заложил основы теории аналитических функций многих переменных, построил основы теории делимости степенных рядов. Идеи Вейерштрасса продолжили в своих работах его ученики М. Г. Миттаг-Лефлер и К. Г. Шварц.

Несмотря на то что ещё в 1850 году профессор И. И. Сомов, опираясь на работы Якоби, издал свой труд «Основания теории аналитических функций», а в 1856 году небольшой мемуар «Исследование функций мнимого переменного» Ш. Брио и Т. Буке стал первым известным учебным пособием по комплексному анализу, но именно Карла Вейерштрасса принято считать основателем ТФКП как учебной дисциплины. С 1856 года Вейерштрасс читал лекции о представлении функций в виде степенных рядов, а с 1861 года – лекции по ТФКП в целом [4]. В 1876 году появилось его сочинение «К теории однозначных аналитических функций», а в 1880 году «К учению о функциях». С изданием упомянутых трудов, максимально близко соответствующих понятию учебника в современном его понимании, развитая Вейерштрассом и его предшественниками теория аналитических функций приобрела завершенную форму.

В этот же период одним из первых российских математиков, обратившихся к теме комплексных переменных, стал М. В. Остроградский, который исследовал интегралы от функций комплексного переменного, обобщил некоторые ранее доказанные частные утверждения, в част-

ности, вывел формулу для вычета функции относительно полюса n-го порядка. О нём с уважением отзывался О.-Л. Коши («Этот русский молодой человек одарён большой проницательностью и весьма сведущ»). В обширном публичном курсе лекций, прочитанном в 1858−1859 годах, ставшем первым учебным курсом ТФКП в России, М. В. Остроградский делал упор на применения теории вычетов и формулы Коши к вычислению определенных интегралов.

Однако первым по-настоящему оригинальным русским исследователем в области ТФКП стал Ю. В. Сохоцкий, описавшим свои результаты в области приложений теории вычетов, аналитических функций, многочленов Лежандра в своей магистерской диссертации «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (1868). Там же был сформулирован и доказан общеизвестный фундаментальный результат о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки [10]. Впоследствии Ю. В. Сохоцкий начал читать лекционные курсы, а в его докторской диссертации (1873) впервые было введено в развернутом виде понятие интеграла типа Коши, понимаемого как интеграл «по траектории», соединяющей точки a и b, доказан ряд базовых теорем теории интегралов типа Коши.

С этого момента ТФКП как научная дисциплина вышла на этап экстенсивного расширения, началось создание функциональных отраслей приложений комплексного анализа, – а параллельно начала формироваться полноценная учебная дисциплина. К концу XIX века теория функций комплексного переменного включала в себя обширный комплекс разделов и дисциплин, а в начале XX века стало возможно констатировать факт появления учебной дисциплины «Теория функций комплексного переменного».

В отечественной высшей школе такая традиция длилась до середины XX века, например, в классическом учебнике В.И. Смирнова «Курс высшей математики» (1930) ТФКП всё ещё рассматривается как составная часть общих курсов [11], и только к 1950-м годам сформировались общие традиции преподавания дисциплины и были изданы классические учебники – А. И. Маркушевича («Теория аналитических функций» и

«Очерки по истории теории аналитических функций») и И. И. Привалова («Введение в теорию функций комплексного переменного»). После этого параллельно с развитием комплексного анализа как научной дисциплины был издан целый комплекс классических университетских учебников для студентов-математиков, физиков и обучающихся инженерных специальностей за авторством Б. А. Фукса, Б. В. Шабата, М. А. Лаврентьева, задачники и курсы лекций А. И. Маркушевича, М. И. Шабунина, М. А. Евграфова и других отечественных математиков. К тому времени базовый учебный курс «ТФКП» уже сформировался, что явственно следует из пояснения автора (Б. В. Шабат) к учебнику «Введение в комплексный анализ» 1969 года: «Первая часть, посвященная функциям одного переменного, содержит материал обязательного университетского курса. Вторая часть посвящена функциям нескольких переменных и содержит материалы основного спецкурса» [12].

С этого момента можно говорить о «канонизации» дисциплины ТФКП, ставшей полноценной частью учебного процесса. Необходимо отметить, что традиционно логика изложения учебной дисциплины в большей или меньшей степени повторяет историческую логику развития научной отрасли. В последние годы работа математиков в области комплексного анализа была посвящена в первую очередь разработке эффективных приложений теории и, соответственно, учебных пособий в сопровождение соответствующих спецкурсов. Это породило значительный массив учебных пособий, учебников, сборников задач, ориентированных не на целостное освещение теории, а на проработку более-менее специфического материала, ориентированного на конкретные приложения ТФКП. Отдельным направлением деятельности в развитии методической составляющей преподавания дисциплины является разработка либо специализированных, либо максимально универсальных учебных пособий, адаптированных к различным уровням преподавания, а также соответствующих электронных образовательных ресурсов и электронных пособий. Использование современных образовательных технологий открывает перед преподавателем новые перспективы в формировании

учебного курса по комплексному анализу в зависимости от поставленных задач.

Однако в силу вариативности содержания учебного курса необходимость акцентированного изучения того или иного раздела, той или иной содержательной траектории теории функции комплексного переменного определяется необходимостью использования его в качестве инструмента или целостной отрасли математики. Выбор соответствующей содержательно-методической линии преподавания дисциплины в значительной степени совпадает с историческими линиями развития комплексного анализа, изложенными в нашей статье.

Список источников

1. **Гиндикин С. Г.** Великое искусство // *Рассказы о физиках и математиках.* 3-е изд., расш. М.: МЦНМО, 2001. С. 8–42.

2. **Никифоровский В. А.** Из истории алгебры XVI—XVII веков. М.: Наука, 1979. С. 42–88.

3. **Стиллвелл Д.** Математика и ее история. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. С. 130.

4. **Анохина Е. Ю.** История развития и становление теории функции комплексного переменного (ТФКП) учебным предметом // *Вестник ТГПИ. Естественные науки.* 2008. №1. С. 83–87.

5. **Синкевич Г.И.** История геометрических представлений комплексных чисел // *История науки и техники.* 2017. №4. С. 15–30.

6. **Эйлер Л.** Введение в анализ бесконечно малых. М.; Л. 1936. Т. 1.

7. **Wessel C.** On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefl y to the Solution of Plane and Spherical Polygons. Smith D.E. // *A source book in Mathematics.* Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. 701 p. Pp. 55–66.

8. История математики. С древнейших времен до начала Нового времени // *История математики : в 3 т. / под ред. А. П. Юшкевича.* М.: Наука, 1970. Т. I. 352 с.

9. **Риман Б.** Сочинения. М.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1948.

10. **Маркушевич А. И.** Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций // *Историко-математические исследования, в 3 т.*, М.; Л., 1950.

11. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики для техников и физиков : в 5 т. М. ; Л., 1930. 467 с.

12. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ : в 2 т. Москва: Ленанд, 2020. 344 с.

References

1. Gindikin S. G. Great Art. *Rasskazy o fizikax i matematikax* [Stories about physicists and mathematicians. 3rd edition, expanded.] M.: ICNMO, 2001. Pp. 8–42. (In Russ.)

2. **Nikiforovsky V. A.** *Iz istorii algebry XVI—XVII vekov* [From the history of algebra of the XVI–XVII centuries]. M.: Science, 1979. Pp. 42–88. (In Russ.)

3. **Stillwell D.** *Matematika i ee istoriya* [Mathematics and its history]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2004. P. 130. (In Russ.)

4. **Anokhina E. Yu.** History of the development and formation of the theory of the function of the complex variable (TFKP) as a educational subject. *Vestnik TGPI. Estestvennye nauki* [Bulletin of TSPI. Natural sciences]. 2008. No 1. Pp. 83–87. (In Russ.)

5. **Sinkevich G. I.** History of geometric representations of complex numbers. *Istoriya nauki i tekhniki* [History of science and technology]. 2017. No 4. Pp. 15–30. (In Russ.)

6. **Euler L.** *Vvedenie v analiz beskonechno malyh* [Introduction to infinitesimal analysis]. Moscow-Leningrad, 1936. Vol. 1. (In Russ.)

7. **Wessel C.** On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefl y to the Solution of Plane and Spherical Polygons. Smith D.E. *A source book in Mathematics.* Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. Pp. 55–66.

8. History of mathematics. From ancient times to the beginning of the New Age. *Istoriya matematiki* [History of Mathematics] / edited by A.P. Yushkevich, in three volumes. M.: Science, 1970. Vol. I. 352 p. (In Russ.)

9. **Riemann B.** *Sochineniya* [Works]. M.: OGIZ; Gostekhizdat, 1948. (In Russ.)

10. **Markushevich A. I.** Contribution of Yu.V. Sokhotsky to the general theory of analytical functions. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya : v. 3 t.* [Historical and mathematical research].Vol. 3. M.; L., 1950. (In Russ.)

11. **Smirnov V. I.** *Kurs vysshej matematiki dlya tekhnikov i fizikov : v 5 t.* [Course of higher mathematics for technicians andphysicists : in 5 vols.]. M.; L., 1930. 467 p. (In Russ.)

12. **Shabat B. V.** *Vvedenie v kompleksnyj analiz : v 2 t.* [Introduction to complex analysis : in 2 vol.]. Moscow: Lenand, 2020. 344 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Асланов Рамиз Муталлим оглы / Aslanov Ramiz Mutallim ogly
д.пед.н., к.ф.-м.н., профессор, старший научный сотрудник отдела «Алгебра и математическая логика» / Doctor of Education, Ph.D., Professor, Senior Researcher, Algebra and Mathematical Logic Department

Институт математики и механики НАН Азербайджана / Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan
AZ1141, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. Вагабзаде, 9 / AZ1141, Azerbaijan Republic, Baku, 9 Vagabzade St.

Сушков Владислав Викторович / Vladislav V. Sushkov
к.ф.-м.н, доцент, начальник учебного управления / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Educational Department
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 12.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.09.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 3 (44)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 3 (44)

НАСТАВНИК – УЧЕНИК

Научная статья

УДК 517.9, 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_64

К решению неоднородного бигармонического уравнения

Андрей Васильевич Ермоленко, Никита Вадимович Кожагельдиев
Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина

Аннотация. При расчете напряженно–деформированного состояния пластин возникает необходимость в решении неоднородного бигармонического уравнения, сложность которого обусловлена наличием четвертых производных. В статье рассматривается обзор методов решения таких уравнений, при этом приводится реализация трех методов решения – метода Галеркина и двух итерационных методов. Приводится алгоритм построения тестовых примеров.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод Галеркина, итерационные методы

Для цитирования: Ермоленко А. В., Кожагельдиев Н. В. Численное решение неоднородного бигармонического уравнения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 3 (44). С. 64–78. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_64

© Ермоленко А. В., Кожагельдиев Н. В., 2022.

MENTOR – STUDENT

Original article

On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation

Andrey V. Yermolenko, Nikita V. Kozhageldiev
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, ea74@list.ru

Annotation. When calculating the stress-strain state of plates, it becomes necessary to solve an inhomogeneous biharmonic equation, the complexity of which is due to the presence of fourth derivatives. The article considers a review of methods for solving such equations, while the implementation of three solution methods is given - the Galerkin method and two iterative methods. An algorithm for constructing test cases is given.

Keywords: biharmonic equation, Galerkin method, iterative methods

For citation: Yermolenko A. V., Kozhageldiev N. V. On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022, No 3 (44), pp. 64−78. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_3_64

1. Введение

Решение бигармонического уравнения остается актуальной задачей, так как является базовой частью более сложных задач механики жидкости и газа, например, расчет течения вязкой жидкости [1] или определение напряженно–деформированного состояния пластин и оболочек [2].

Нелинейное бигармоническое уравнение является типичным эллиптическим уравнением четвертого порядка и в декартовых координатах имеет вид[1]

$$\Delta^2 w = f, \tag{1}$$

[1]Для простоты изложения рассматриваем решения на единичном квадрате.

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}$$

Рис. 1. 13-точечный трафарет

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, w = w(x, y), f = f(x, y), x, y \in (0, 1)$.

Наиболее простой в построении сетки численный метод решения бигармонического уравнения для прямоугольной пластины – это метод конечных разностей. При этом возможны два подхода, первый заключается в введении новой функции $u(x, y)$ [3–5], такой, что

$$\Delta w = u,$$

$$\Delta u = f.$$

Недостатком данного подхода является то, что граничные условия на функцию w избыточны, а для функции u их необходимо определять из некоторых дополнительных условий. Второй подход связан с аппроксимацией бигармонического оператора по 13-точечному трафарету, см. рис. 1, с последующим переходом от двумерной задачи к одномерной, см., например, [2], и решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

СЛАУ можно решать как с использованием прямых (точных), так и с помощью итерационных методов приближенно с заданной точностью. Несмотря на точное решение, существенным недостатком прямых подходов является большая размерность и разряженность матриц. Поэтому востребованы итерационные методы, которые, как правило, требуют меньшее количество арифметических операций.

При этом итерационными могут быть не только методы решения СЛАУ, но и самого бигармонического уравнения, см., например, [6–8].

Альтернативой конечным разностям являются конечные элементы [7; 9]. Метод конечных элементов позволяет строить более гибкую сетку, однако создание сетки конечных элементов с большим числом узлов и элементами различных размеров, форм и ориентаций также является нетривиальной задачей.

Одним из направлений развития итерационных методов решения систем алгебраических уравнений, возникающих из конечно-элементной и конечно-разностной дискретизации эллиптических краевых задач, являются многосеточные методы [10; 11].

Существуют и другие подходы к бигармоническому уравнению. К ним, например, относятся использование граничных интегральных уравнений с аппроксимацией быстрыми преобразованиями Фурье [12], быстрый метод мультиполей [13], метод сплайн-коллокации [14].

Целью представленной статьи является описание решения нелинейного бигармонического уравнения тремя алгоритмами.

Для проверки решения подобраны несколько модельных задач.

2. Материалы и методы

Данное исследование построено на базе использования теоретического и численного методов исследования. Применение теоретического метода позволило провести анализ способов решения бигармонического уравнения, выбрать наиболее эффективные способы решения уравнения. На основе выбранных методов проводится численный эксперимент по определению наиболее эффективного способа решения бигармонического уравнения.

3. Результаты

3.1. Метод Галеркина

Применен метода Галеркина [7] к решению следующей краевой задачи[2]:

$$\Delta^2 w = f, \tag{2}$$

[2]В терминах механики пластин данная краевая задача соответствует задаче определения прогиба жестко закрепленной прямоугольной пластины единичной ширины и длины под действием нормальной нагрузки с использованием уравнения Софи Жермен – Лагранжа [15].

$$w(0,y)=0, w(1,y)=0, \frac{\partial w}{\partial x}(0,y)=0, \frac{\partial w}{\partial x}(1,y)=0, y\in[0,1],$$
$$w(x,0)=0, w(x,1)=0, \frac{\partial w}{\partial y}(x,0)=0, \frac{\partial w}{\partial y}(x,1)=0, x\in[0,1]. \quad (3)$$

Рассмотрим функции

$$\Phi_{kl}(x,y)=x^k(x-1)^2y^l(y-1)^2, k,l=2,3,...,$$

удовлетворяющие граничным условиям (3).

Решение краевой задачи $\{(2),(3)\}$ ищем в виде

$$w(x,y)=\sum_{k=2}^{p+1}\sum_{l=2}^{p+1}c_{kl}\Phi_{kl}(x,y), p>1,$$

перепишем последнюю двойную сумму в следующем виде:

$$w(x,y)=\sum_{j=1}^{n}C_j\varphi_j(x,y), \quad (4)$$

где c_j – неизвестные коэффициенты, $n=p^2$, $\varphi_1=\Phi_{22}, \varphi_2=\Phi_{23}, ...$

На основании (2), (4) определим невязку R так:

$$R=\sum_{j=1}^{n}C_j\Delta^2(\varphi_j)-f,$$

используя которую, коэффициенты C_j найдем из системы уравнений

$$(R,\varphi_i)=0, i=1,..,n,$$

где

$$(R,\varphi_i)=\int_0^1\int_0^1 R(x,y)\varphi_i dxdy.$$

3.2. Итерационные методы

3.2.1. Сеточный метод с использованием фиктивной переменной

В качестве первого итерационного метода решения бигармонического уравнения рассмотрим подход, предложенный в статье [8]. Для этого наряду с краевой задачей {(2),(3)} рассмотрим следующую задачу при $t \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \Delta^2 Z = f, \tag{5}$$

$$Z(x, y, 0) = 0,$$

$$Z(0, y, t) = 0, Z(1, y, t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial x}(0, y, t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial x}(1, y, t) = 0, y \in [0, 1],$$

$$Z(x, 0, t) = 0, Z(x, 1, t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \frac{\partial Z}{\partial y}(x, 1, t) = 0, x \in [0, 1]. \tag{6}$$

Для построения конечно–разностной аппроксимации, задав количество разбиений n по осям Ox, Oy, введем сетку

$$x_i = ih, y_j = jh, h = 1/n, i, j = 1, .., n, t_k = k\tau,$$

где τ – шаг по переменной t.

Условие $Z(0, y, t) = 0$ дает, что $Z^k_{0j} = 0$ при всех j и k. Далее, записывая условие $\dfrac{\partial Z}{\partial x}(0, y, t) = 0$ в виде

$$\frac{Z^k_{1j} - Z^k_{0j}}{h} = 0,$$

получаем $Z^k_{1j} = 0$. Таким образом получены первые два соотношения из следующих:

$$Z^k_{0j} = 0, Z^k_{1j} = 0, Z^k_{n-1j} = 0, Z^k_{nj} = 0,$$

$$Z^k_{i0} = 0, Z^k_{i1} = 0, Z^k_{in-1} = 0, Z^k_{in} = 0.$$

На рис. 2 закрашенными точками отмечены узлы, в которых $Z^k_{ij} = 0$. Это означает, что в дальнейшем при выполнении итерационной схемы эти точки не рассматриваем, а индексы i, j изменяются от 2 до $n - 2$.

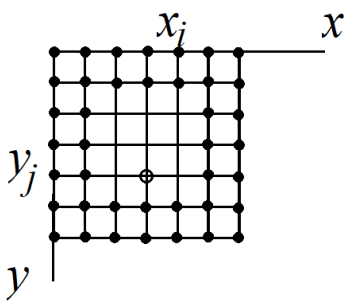

Рис. 2. Сетка

Бигармонический оператор с учетом рис. 1 запишем в виде

$$(\Delta^2 Z)^k_{ij} = \frac{1}{h^4}\big(Z^k_{i+2j} + Z^k_{i-2j} + Z^k_{ij+2} + Z^k_{ij-2} -$$

$$-8Z^k_{i+1j} - 8Z^k_{i-1j} - 8Z^k_{ij+1} - 8Z^k_{ij-1} +$$

$$+2Z^k_{i+1j+1} + 2Z^k_{i+1j-1} + 2Z^k_{i-1j+1} + 2Z^k_{i-1j-1} + 20Z^k_{ij}\big), \tag{7}$$

а частную производную по t – так:

$$\Big(\frac{\partial Z}{\partial t}\Big)^k_{ij} = \frac{Z^{k+1}_{ij} - Z^k_{ij}}{\tau}. \tag{8}$$

Рассматривая вместо функции $f(x, y)$ дискретные значения $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, подставляя (7), (8) в уравнение (5) и выражая Z^{k+1}_{ij}, получим следующую итерационную схему:

$$Z^{k+1}_{ij} = Z^k_{ij} + \tau(f_{ij} - (\Delta^2 Z)^k_{ij}). \tag{9}$$

В качестве начальных значений берем $Z^0_{ij} = 0$.

Вопросы сходимости схемы (9) описаны в работе [8].

Решение задачи (1) на основе схемы (9) имеет вид

$$w_{ij} = \lim_{k\to+\infty} Z^k_{ij},$$

где $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ – значения неизвестной функции на сетке.

3.2.2. Сеточный метод типа Либмана

В работе [6] для решения уравнения Лапласа используется метод Либмана. Применим данный метод для решения бигармонического уравнения. Для этого, выражая из конечно–разностной аппроксимации бигармонического уравнения (см. (1), (7)) слагаемое w_{ij}, будем иметь

$$w_{ij} = \frac{h^4 f_{ij}}{20} - \frac{1}{20}\big(w_{i+2j} + w_{i-2j} + w_{ij+2} + w_{ij-2} -$$
$$-8w_{i+1j} - 8w_{i-1j} - 8w_{ij+1} - 8w_{ij-1} +$$
$$+2w_{i+1j+1} + 2w_{i+1j-1} + 2w_{i-1j+1} + 2w_{i-1j-1}\big), \tag{10}$$

таким образом получили, что для определения значения в узле (i, j) необходимо знать значения в 12 соседних узлах (см. рис. 1).

С учетом сказанного определяем итерационную схему так. На двух крайних рядах узлов, помеченных закрашенными кружочками на рис. 2, полагаем $w_{ij} = 0$. Во внутренних точках в качестве начального приближения также полагаем $w^0_{ij} = 0$. Далее на основании (10) определяем следующую итерационную схему:

$$w^{k+1}_{ij} = \frac{h^4 f_{ij}}{20} - \frac{1}{20}\big(w^k_{i+2j} + w^k_{i-2j} + w^k_{ij+2} + w^k_{ij-2} -$$
$$-8w^k_{i+1j} - 8w^k_{i-1j} - 8w^k_{ij+1} - 8w^k_{ij-1} +$$
$$+2w^k_{i+1j+1} + 2w^k_{i+1j-1} + 2w^k_{i-1j+1} + 2w^k_{i-1j-1}\big). \tag{11}$$

3.3. Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента были написаны программы на языке Python [15]. В качестве модельных точных решений были взяты функции

$$w_1(x, y) = x^2(x-1)^2 y^2 (y-1)^2, \tag{12}$$

$$w_2(x, y) = \begin{cases} (x-0,5)^2(x-1)^2(y-0,5)^2(y-1)^2, & x, y \in (0,5; 1), \\ 0, & x, y \notin (0,5; 1). \end{cases} \tag{13}$$

Данные функции удовлетворяют краевой задаче {(2),(3)} при следующих правых частях:

$$f_1(x,y) = 24x^2(x-1)^2+24y^2(y-1)^2+2(12x^2-12x+2)(12y^2-12y+2), \quad (14)$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 6(2y-1)^2(y-1)^2+ \\ +(24x^2-18x+13)(24y^2- \\ -18y+13)/4+6(2x-1)^2(x-1)^2, & x,y \in (0,5;1), \\ 0, & x,y \notin (0,5;1). \end{cases} \quad (15)$$

Можно легко убедиться, что при подстановке пар (12), (14) и (13), (15) в уравнение (2) получается тождество.

При этом в каждом эксперименте рассчитывалась погрешность вычислений по формуле

$$\delta = \frac{||w - w_{true}||}{||w_{true}||} * 100\%,$$

где

$$||u||^2 = \int_0^1 \int_0^1 u(x,y)dxdy,$$

w – решение задачи (2)–(3), вычисленное одним из методов, w_{true} – точное решение.

Результат метода Галеркина существенно зависит от выбора базовых функций, при выбранной правой части в виде (14) погрешность равна 5 % при $p = 2$ и числе узлов разбиения 80 при вычислении интегралов. При этом погрешность решения для правой части в виде (15) при выбранных функциях Φ_{kl} является значительной.

На рис. 3, 4 показано решение задачи (1) по схеме (9). При этом результаты экспериментов, соответствующих работе [8], совпадают по форме и максимальным значением.

Что касается схемы (11), то для предложенных примеров удалось достичь погрешность только в 31 %.

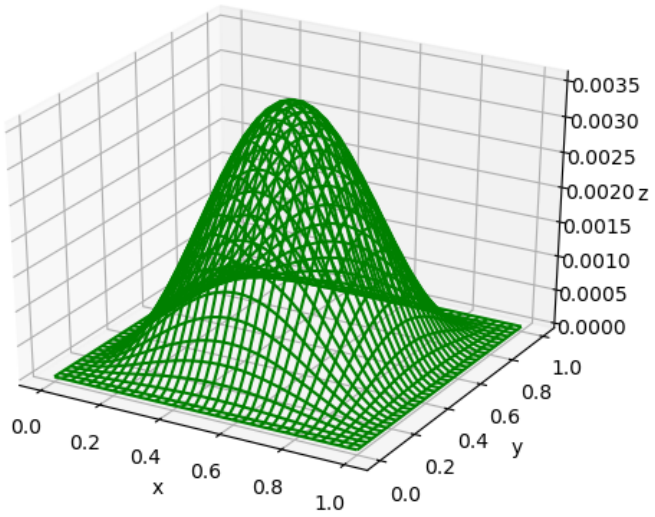

Рис. 3. Схема (9), количество итераций 15000, $\tau = 6 \cdot 10^{-8}$, погрешность 11 %

4. Обсуждение

Представленная работа поможет молодым ученым, использующим математическое моделирование, обоснованно выбирать методы численного решения.

Список источников

1. **Казакова А. О., Петров А. Г.** Расчет течения вязкой жидкости между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2019. Т. 59. № 6. С. 1063–1082.

2. **Ермоленко А. В., Мельников В. А.** Расчет контактного взаимодействия прямоугольной пластины и основания по теории Кармана // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2018. Вып. 2 (27). С. 86–92.

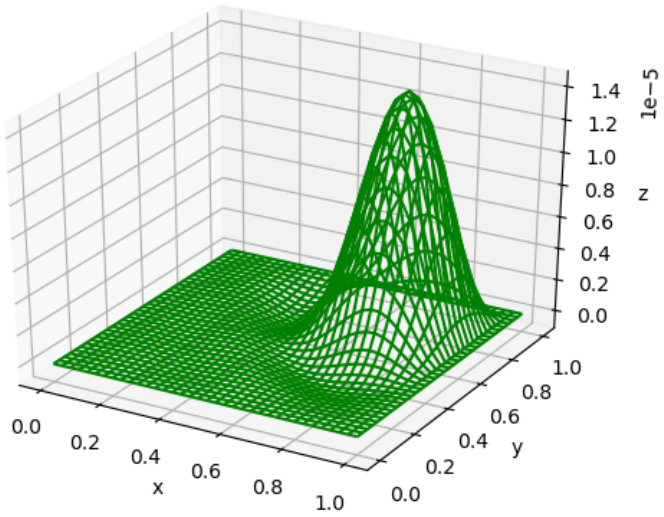

Рис. 4. Схема (11), количество итераций 200, $\tau = 6 \cdot 10^{-8}$, погрешность 23 %

3. **Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D.** A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains // *SIAM J.* 2009. No 47. Pp. 3087—3108.

4. **Linden J.** A Multigrid Method for Solving the Biharmonic Equation on Rectangular Domains // *Advances in Multi-Grid Methods : proceedings of the conference held in Oberwolfach, December 8 to 13, 1984.* Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1985. (Notes on numerical fluid mechanics; Vol. 11). Pp. 64–66.

5. **Кобельков Г. М.** О сведении краевой задачи для бигармонического уравнения к задаче типа Стокса // *Докл. АН СССР.* 1985. Т. 283. № 3. С. 539–541.

6. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З .** Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математичекой литературы, 1963. 400 с.

7. **Михайловский Е. И.** Лекции по вариационным методам механики упругих тел. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2002. 256 с.

8. **Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И.** Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10.* 2013. Вып. 1. С. 52–62.

9. **Еременко С. Ю.** Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Харьков: Изд-во «Основа» при Харьк. ун-те, 1991. 272 с.

10. **Федоренко Р. П.** О скорости сходимости одного итерационного процесса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1964. Т. 4. № 3. С. 559–564.

11. **Brenner S. C.** An optimal-order nonconforming multigrid method for the biharmonic equation // *SIAMJ. Numer. Anal.* 26 (1989). Pp. 1124-1138.

12. **Jiang Y., Wang B., Xu Y.** A fast Fourier–Galerkin method solving a boundary integral equation for the biharmonic equation // *SIAM J. Numer. Anal.* 2014. V. 52. № 5. Pp. 2530–2554.

13. **Greenbaum A., Greengard L. , Mayo A.** On the numerical solution of the biharmonic equation in the plane // *Phys. D.* 60 (1992). Pp. 216–225.

14. **Ромакина О. М., Шевцова Ю. В.** Метод сплайн-коллокации и его модификация в задачах статического изгиба тонкой ортотропной прямоугольной пластинки // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.* 2010. Т. 10. № 1. С. 78–82.

15. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета.*

Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

References

1. **Kazakova A. O., Petrov A. G.** Calculation of the flow of a viscous fluid between two arbitrarily moving cylinders of arbitrary section. *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2019. Vol. 59. No 6. Pp. 1063–1082. (In Russ.)

2. **Yermolenko A. V., Melnikov V. A.** Calculation of the contact interaction of a rectangular plate and a base by the Karman theory. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2018, 2 (27). Pp. 86–92. (In Russ.)

3. **Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D.** A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains. *SIAM J.*, 2009, No 47, pp. 3087—3108.

4. **Linden J.** A Multigrid Method for Solving the Biharmonic Equation on Rectangular Domains. *Advances in Multi-Grid Methods : proceedings of the conference held in Oberwolfach, December 8 to 13, 1984.* Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1985. (Notes on numerical fluid mechanics; Vol. 11), pp. 64–66.

5. **Kobel'kov G. M.** On the reduction of a boundary value problem for a biharmonic equation to a Stokes-type problem. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1985, Vol. 283, No 3, pp. 539–541. (In Russ.)

6. **Demidovich B. P., Maron I. A., SHuvalova E. Z.** *Chislennye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moskva: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematichekoj literatury, 1963. 400 p. (In Russ.)

7. **Mihajlovskii E. I.** *Lekcii po variacionnym metodam mekhaniki uprugih tel* [Lectures on variational methods of mechanics of elastic bodies]. Syktyvkar: Izd-vo Syktyvkarskogo universiteta, 2002. 256 p. (In Russ.)

8. **Ryazhskih V. I., Slyusarev M. I., Popov M. I.** Numerical integration of the biharmonic equation in the square domain. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Ser. 10* [Herald of St. Petersburg University. Series 10]. 2013, No. 1, pp. 52–62. (In Russ.)

9. **Eremenko S. YU.** *Metody konechnyh elementov v mekhanike deformiruemyh tel* [Finite element methods in mechanics of deformable bodies]. Kharkov: Izd-vo "Osnova" pri Har'k. un-t, 1991. 272 p. (In Russ.)

10. **Fedorenko R. P.** On the rate of convergence of one iterative process. *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.* [Journal of Computational and Mathematical Physics], 1964, Vol. 4, No 3, pp. 559—564. (In Russ.)

11. **Brenner S. C.** An optimal-order nonconforming multigrid method for the biharmonic equation. *SIAMJ. Numer. Anal.* 26 (1989), pp. 1124-1138.

12. **Jiang Y., Wang B., Xu Y.** A fast Fourier–Galerkin method solving a boundary integral equation for the biharmonic equation. *SIAM J. NUMER. ANAL.* 2014, Vol. 52, No 5, pp. 2530–2554.

13. **Greenbaum A., Greengard L. , Mayo A.** On the numerical solution of the biharmonic equation in the plane. *Phys. D*, 60 (1992), pp. 216–225.

14. **Romakina O. M., Shevcova YU. V.** Spline-collocation method and its modification in problems of static bending of a thin orthotropic rectangular plate. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestia of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2010, Vol. 10. No 1, pp. 78–82. (In Russ.)

15. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33), pp. 86–95. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Андрей Васильевич Ермоленко / Andrey V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Никита Вадимович Кожагельдиев / Nikita V. Kozhageldiev
студент / student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 10.09.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.09.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.09.2022

Contents

Mathematics

Vechtomov E. M. *About commutative multiplicatively idempotent semirings with the property of maximality of prime ideals* 4

Computer sciences

Golchevskiy Yu. V., Shilova L. P. *Selecting a Solution Method for the Problem of Automating the Classification of Texts Related to Industrial Safety Audits* 21

Methodical materials

Babikova N. N. *Education in the digital age: remember or google* . . . 33

Aslanov R. M., Sushkov V. V. *Historical ways of emergence and development of complex analysis* 47

Tutor-follower

Yermolenko A. V., Kozhageldiev N. V. *On the solution of the inhomogeneous biharmonic equation* 64

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 3 (44) 2022

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет В. А. Устюгов
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 04.10.2022. Дата выхода в свет 25.10.2022.
Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern.
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 10,4.
Тираж 32 экз. Заказ № 78.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru