Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

НАСТАВНИК–УЧЕНИК

Научная статья

УДК 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_67

МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ РЕАКЦИИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Андрей Васильевич Ермоленко[1], **Виктория Романовна Макарова**[2]
[1,2]Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина

Аннотация

При математическом моделировании различных конструкций в строительстве возникает необходимость в решении контактных задач со свободной границей. Эффективным способом решения таких задач является метод обобщенной реакции, предложенный в Сыктывкарском университете. В представленной статье с применением метода обобщенной реакции решена контактная задача для пластины над наклонным основанием.

Ключевые слова: пластина, метод обобщенной реакции, уравнение Софи Жермен–Лагранжа, контактная реакция

Для цитирования: Ермоленко А. В., Макарова В. Р. Метод обобщенной реакции для пластины с наклонным основанием // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 2 (43). С. 67–74. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_67

© Ермоленко А. В., Макарова В. Р., 2022.

Mentor-student

Original article

Generalized reaction method for a plate with an inclined base

Andrey V. Yermolenko, Viktoria R. Makarova
[1,2]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Annotation
An effective way to solve problems on the interaction of plates and bases is the generalized reaction method. The presented article shows the application of the generalized reaction method to a cantilevered and rigidly fixed plate. The solution using the generalized reaction method is a system of iterated functions, the finding of which in a certain number of iterations will be reduced to solving the problem, which makes it possible to accurately and quickly determine the answer.
Keywords: plate, generalized reaction method, the Sophie Germain–Lagrange equation, contact reaction

For citation: Andrey V. Yermolenko., Makarova V. R. Generalized reaction method for a plate with an inclined base. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 67–74. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_67

Введение

В рамках научной школы Новожилова – Черныха – Михайловского [1; 2] в Сыктывкарском университете решен ряд контактных задач со свободной границей, см., например, [3]. Особенностью такого рода задач является существенная нелинейность, т. е. при попытке линеаризовать задачу она теряет смысл.

В данной работе рассмотрена одна из такого рода задач – о пластине над наклонным основанием. Постановка задачи следующая. Цилиндрически изгибаемая пластина [3] ширины l и толщины h расположена над абсолютно жестким, идеально гладким основанием, лежащим под наклоном на расстоянии $\Delta(x) = \dfrac{l}{200}(1 + \dfrac{x}{l})$. На пластину действует постоянная нормальная нагрузка $q_0 = const$. Под действием нагрузки пластина изгибается и прилегает к основанию, образуя область контакта $[x_0; x_1]$. Требуется определить прогибы пластин w, зону контакта и возникающие контактные реакции $r(x)$.

Рассматриваются два случая задачи:

- для шарнирно закрепленной пластины;
- для жестко закрепленной пластины.

Материалы и методы

Для решения задач используем уравнение Софи Жермен–Лагранжа [3] в виде

$$Dw_1^{IV} = q_0 - r(x). \tag{1}$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

При этом для шарнирной пластины граничные условия записываем в виде

$$\begin{aligned} w(0) = 0, w''(0) = 0, \\ w(l) = 0, w''(l) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

а для жестко закрепленной пластины – так:

$$\begin{aligned} w(0) = 0, w'(0) = 0, \\ w(l) = 0, w'(l) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

При этом прогиб w и контактные реакции $r(x)$ должны удовлетворять следующему соотношению [4]:

$$r = [r + \beta(w - \Delta(x))]_+, \beta > 0. \tag{4}$$

Здесь $\phi_+ = 1/2(\phi + |\phi|)$.

Используя выражение (4), решение контактной задачи находим по следующей итерационной схеме:

$$r^{k+1}(x) = [r^k + \beta(w^k - \Delta(x))]_+, \beta > 0, \tag{5}$$

где

$$w^k(x) = \frac{1}{D}\int_0^l G(x,\xi)(q_0 - r^k(\xi))d\xi,$$

при этом функция Грина для краевой задачи {(1), (2)} имеет следующий вид [5]:

$$G_1(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + \frac{\xi - l}{6l}x^3 + (\xi^3 - 3l\xi^2 + 2l^2\xi)\frac{x}{6l},$$

а для краевой задачи {(1), (3)} –

$$G_2(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + (l^2\xi - 2l\xi^2 + \xi^3)\frac{x^2}{2l^2} + (3\xi^2 l - 2\xi^3 - l^3)\frac{x^3}{6l^3}.$$

В качестве начальных условий полагаем

$$r^0(x) = 0, w^0(x) = \frac{q_0}{D}\int_0^l G(x,\xi)d\xi.$$

Результаты

Для реализации итерационной схемы (5) была написана программа на языке Python [6], с использованием которой проведен численный эксперимент.

На рис. 1 показан прогиб, на рис. 2 – контактная реакция основания шарнирно закрепленной пластины со следующими физическими и геометрическими параметрами:

$$l = 50 \text{ см}, \; h = 1 \text{ см}, \; E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \; \nu = 0,3, q_0 = 5 \text{ кГ/см}^2.$$

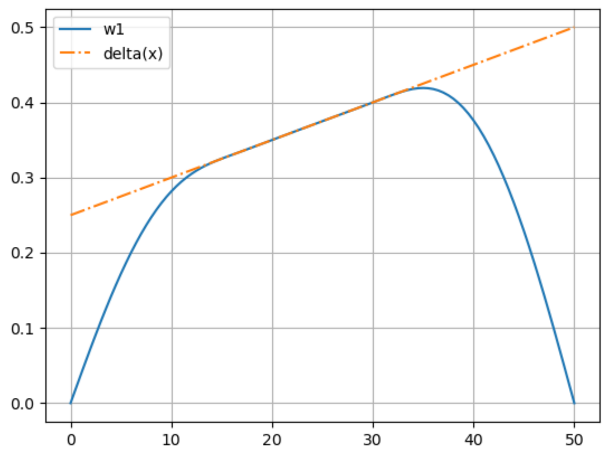

Рис. 1. Прогиб (сплошная линия) шарнирно закрепленной пластины

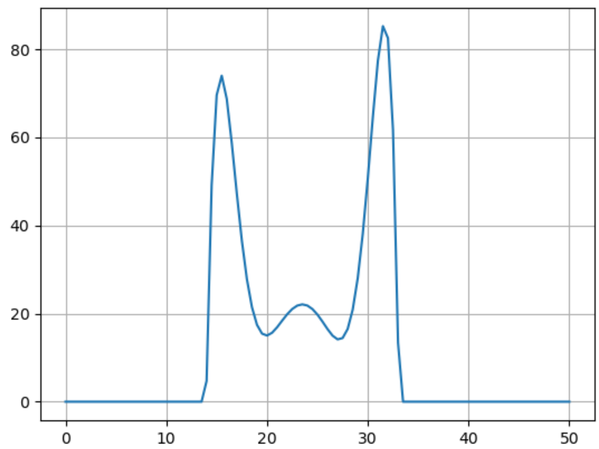

Рис. 2. Контактная реакция основания для шарнирно закрепленной пластины и основания

На рис. 3 и 4 приведен пример расчета при аналогичных параметрах для жестко закрепленной пластины.

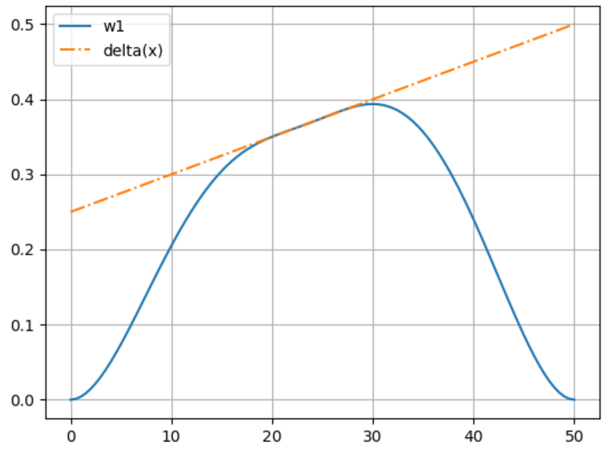

Рис. 3. Прогиб (сплошная линия) жестко закрепленной пластины

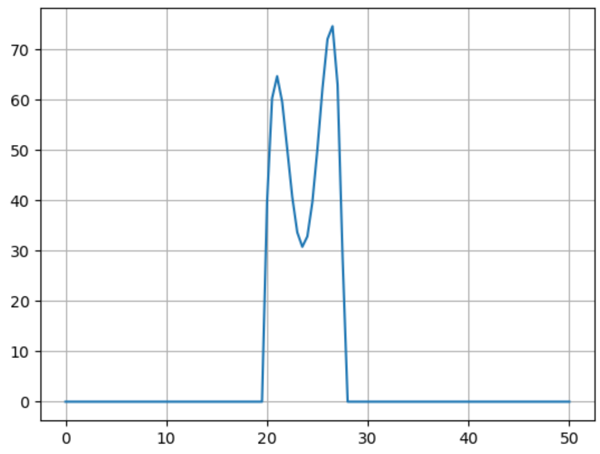

Рис. 4. Контактная реакция основания для жестко закрепленной пластины и основания

Обсуждение

Полученные результаты согласуются с результатами работы [3] и подтверждают предположение, что контактные реакции на границе зоны контакта имеют пиковое значение. При этом зона контакта для шарнирно закрепленной пластины намного больше зоны контакта для жестко закрепленной пластины при аналогичных параметрах.

Список источников

1. **Михайловский Е. И.** Школа механики академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2005. 172 с.

2. **Черных К. Ф., Михайловский Е. И., Никитенков В. Л.** Об одной ветви научной школы Новожилова (Новожилов – Черных – Михайловский – Никитенков). Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2002. 147 с.

3. **Ермоленко А. В.** Контактные задачи со свободной границей: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 105 с. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).

4. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. 128–136 с.*

5. **Ермоленко А. В., Ладанова С. В.** Контактная задача для двух пластин с разным закреплением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (36). 87–92 с.*

6. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

References

1. **Mikhailovskii E.I.** *Shkola mekhaniki akademika Novozhilova* [The Novozhilov School of Mechanics]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2005. 172 p.

2. **Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I., Nikitenkov V.L.** *Ob odnoy vetvi nauchnoy shkoly Novozhilova (Novozhilov – Chernykh – Mikhaylovskiy – Nikitenkov)* [About one branch of the scientific school of Novozhilov (Novozhilov - Chernykh - Mikhailovsky - Nikitenkov)]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2002.147 p.

3. **Yermolenko A.V.** *Fundamentalizaciya universitetskogo matematicheskogo obrazovaniya : monografiya* [Contact problems with free boundary: textbook]. Syktyvkar: Izd. Pitirim Sorokin, 2020. 1 opt. compact disc (CD-ROM). 105 p.

4. **Mikhailovsky E.I., Tarasov V.N.** *O sxodimosti metoda obobshhennoj reakcii v kontaktnyx zadachax so svobodnoj granicej* [Convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary]. RAS. PMM. 1993. V. 57. Issue. 1. Pp. 128–136.

5. **Yermolenko A. V., Ladanova S. V.** *Kontaktnaya zadacha dlya dvux plastin s raznym zakrepleniem* [Contact problem for two plates with different restraints]. Bulletin of the Syktyvkar University. Ser. 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2020. Issue. 3 (36). Pp. 87-92.

6. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2019, 4 (33), pp. 86–95. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Андрей Васильевич Ермоленко / Andrey V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Макарова Виктория Романовна / Viktoria R. Makarova
студент / student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 22.06.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.06.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.06.2022