Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 519.6, 532.5.032
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_21

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

Надежда Александровна Беляева[1], Илья Олегович Машин[2], Анастасия Васильевна Надуткина[3]
[1,3]Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина,
[2]Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Аннотация.
Построена математическая модель неизотермического напорного течения несжимаемой вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями. Базовые соотношения модели — уравнение движения Навье – Стокса, уравнение теплопроводности, соответствующие начальные и граничные условия. В процессе течения учитывается фазовый переход «жидкость – твердое тело». На границе раздела твердой и жидкой фаз задано условие сопряжения температур. Проведено обезразмеривание построенной математической модели течения. Выполнен численный анализ обезразмеренной модели при варьировании параметров задачи. Представлены и проанализированы графические результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: вязкая жидкость, неоднородное температурное поле, фазовое превращение, численный анализ

Для цитирования: Беляева Н. А., Машин И. О., Надуткина А. В. Фазовый переход вязкой жидкости при неизотермическом течении // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика.*

Механика. Информатика. 2022. Вып. 2 (43). С. 21–31.
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_21

Applied mathematics and mechanics

Original article

Phase transition of a viscous fluid in a nonisothermal flow

Nadezhda A. Belyaeva, Ilya O. Mashin, Anastasia V. Nadutkina
[1,3]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,
[2]Institute of Physics and Mathematics of the Federal Research Center Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Annotation.
A mathematical model is constructed for a nonisothermal pressure flow of an incompressible viscous fluid between two parallel planes. The basic relations of the model are the Navier-Stokes equation of motion, the heat conduction equation, the corresponding initial and boundary conditions. In the flow process the possible phase transition l̈iquid - solid̈is taken into account.The condition for matching the temperatures of the solid and liquid phases is specified at the interface.The corresponding dimensionless flow model is constructed. A numerical analysis of the flow is carried out with varying the dimensionless parameters of the problem.The graphical results of numerical experiments are presented and analyzed. Graphical results of numerical experiments are presented and analyzed.

Keywords: viscous fluid, non-uniform temperature field, phase transition, numerical analysis

For citation: Belyaeva N. A., Mashin I. O., Nadutkina A. V. Phase transition of a viscous fluid in a nonisothermal flow. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 21–31. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_21

Введение

Работа продолжает исследования авторов по вопросам течений вязких жидкостей. Так, в работе [1] изложены и обсуждены результаты численного анализа неизотермического течения жидкости в круглой трубе; математическое моделирование течений структурированных жидкостей показано в работах [2–4]; в работе [5] построена математическая модель течения сжимаемого вязкого материала в цилиндрическом канале.

Постановка задачи

В работе рассматривается неизотермическое напорное течение несжимаемой вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h, в условиях фазового перехода «жидкость – твердое тело». Математическая модель строится при следующих предположениях. Вектор скорости течения жидкости имеет одну ненулевую компоненту V_x, зависящую от пространственной координаты y и времени t:

$$\vec{V} = (V(y,t), 0, 0). \tag{1}$$

Условие неразрывности

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0 \tag{2}$$

в рассматриваемом случае выполняется. Пусть течение происходит под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси течения x, так что

$$p = p(x), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -b = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Зависимость вязкости μ от температуры $T = T(y,t)$ зададим, следуя [6], формулой Аррениуса:

$$\mu(T) = \mu_0 \mathrm{exp}\left(\frac{E}{RT}\right), \tag{4}$$

где μ_0 — начальная вязкость, E — энергия активации вязкого течения, R — универсальная газовая постоянная. Предполагаем, что начальная температура жидкости T^0, на верхней границе полосы задана температура T^{**}, которая ниже температуры фазового превращения T^*. Обозначим границу между твердым и жидким слоем среды $y^* = y^*(t)$. Тогда в момент времени t слой $0 \leq y < y^*$ — жидкий, $y^* \leq y \leq h$ — твердый.

Запишем уравнение теплового баланса [7]:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\operatorname{grad}T\right)=\operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad}T)+\sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k},\tag{5}$$

где

$$\sigma'_{ik}=\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)+\xi\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}$$

есть вязкий тензор напряжений; c — теплоемкость, ρ — плотность жидкости, λ — коэффициент теплопроводности считаем постоянными. Обозначим коэффициент теплопроводности жидкого слоя среды λ_1, твердого – λ_2. Преобразуем уравнение (5) с учетом составляющих слагаемых:

$$\operatorname{grad}T=\left(0,\frac{\partial T}{\partial y},0\right),\quad \vec{V}\operatorname{grad}T=0,$$

$$\operatorname{div}(\lambda_1\operatorname{grad}T)=\lambda_1\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},\quad \operatorname{div}(\lambda_2\operatorname{grad}T)=\lambda_2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

σ'_{ik} соответствует σ'_{xy}:

$$\sigma'_{xy}=\sigma'_{yx}=\mu(T)\frac{\partial V_x}{\partial y}=\mu(T)\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Тогда (5) запишется:

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu(T)}{\lambda_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,\tag{6}$$

где

$$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{c\rho}{\lambda_1},$$

α_1 —коэффициент температуропроводности жидкой фазы. Скорость течения в твердом слое равна 0, поэтому из уравнения (5) следует, что в произвольный момент времени t температура вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},\tag{7}$$

где
$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{c\rho}{\lambda_2},$$
α_2 — коэффициент температуропроводности.

На границе $y = y^*$ задаем условие сопряжения температур:
$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y^*-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y^*+0} - \rho Q^* \frac{\partial y^*}{\partial t}, \tag{8}$$
Q^* — теплота фазового перехода.

Уравнение движения Навье – Стокса [8] при условии неразрывности (2) и отсутствия массовых сил примет вид
$$\rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla)\vec{V}\right] = -\mathrm{grad} p + \mu\Delta\vec{V} + 2(\mathrm{grad}\mu, \nabla)\vec{V} + \mathrm{grad}\mu \times \mathrm{rot}\vec{V}. \tag{9}$$

Здесь с учетом условий (1)–(4) справедливы соотношения
$$(\vec{V}, \nabla)\vec{V} = (0,0,0), \quad \mathrm{grad}\, p = (-b, 0, 0)\,, \quad \Delta\vec{V} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, 0, 0\right),$$
$$\mathrm{grad}\,\mu = \left(0, \frac{\partial \mu}{\partial y}, 0\right), \quad (\mathrm{grad}\,\mu, \nabla)\vec{V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}, 0, 0\right),$$
$$\mathrm{grad}\,\mu \times \mathrm{rot}\,\vec{V} = \left(-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}, 0, 0\right).$$
Тогда уравнение (9) преобразуется к виду
$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\frac{\partial V}{\partial y}\right) + b. \tag{10}$$

Соответствующие начальные
$$0 \le y < h: \quad T(y,0) = T^0, \quad T(h,0) = T^{**}, \tag{11}$$

$$0 \le y \le h: \quad V(y,0) = 0, \tag{12}$$

и граничные условия:

$$V(h,t)=0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \left.\frac{\partial V(y,t)}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \tag{14}$$

Уравнения (6)–(7), (10) приведем к безразмерному виду. Для этого введем следующие параметры:

$$\eta=\frac{y}{h}, \quad 0\le\eta\le1, \quad \eta^*=\frac{y^*}{h}; \quad \Theta=\frac{E(T-T^*)}{RT^{*2}}, \quad T=T^*+\frac{\Theta RT^{*2}}{E};$$

$$U=\frac{\mu(T^*)V}{bh^2}, \quad V=\frac{Ubh^2}{\mu(T^*)}; \quad \tau=\frac{\lambda_1 R{T^*}^2 t}{EQ^*\rho h^2}, \quad t=\frac{\tau EQ^*\rho h^2}{\lambda_1 R{T^*}^2}; \tag{15}$$

$$\alpha=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad \varepsilon=\frac{\lambda_1 R{T^*}^2}{\alpha_1\rho EQ^*}, \quad \varepsilon_1=\frac{\lambda_1 R{T^*}^2}{\mu(T^*)EQ^*}, \quad \delta=\frac{Eh^4b^2}{R{T^*}^2\lambda_1\mu(T^*)}.$$

С учетом параметров (15) в жидком слое выполняются соотношения относительно безразмерной температуры Θ и скорости U:

$$\eta<\eta^*: \qquad \varepsilon\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2}+\delta\left(\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)^2\exp(-\Theta), \tag{16}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial U}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\exp(-\Theta)\,\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)+1, \tag{17}$$

в отвердевшей части

$$\eta>\eta^*: \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2}, \quad U=0. \tag{18}$$

На границе фазового перехода условие (8) принимает вид

$$\eta=\eta^*: \qquad \left.\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right|_{\eta^*-0}+\frac{\partial\eta^*}{\partial\tau}=\lambda\left.\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right|_{\eta^*+0}, \quad \Theta=0, \quad U=0. \tag{19}$$

Начальные условия (11)–(12), граничные условия (13)–(14) в безразмерных переменных запишутся:

$$0 \le \eta < 1: \quad \Theta(\eta, 0) = \Theta^0, \quad \Theta(1, 0) = \Theta^{**}, \tag{20}$$

$$0 \le \eta \le 1: \quad U(\eta, 0) = 0, \tag{21}$$

$$U(1, \tau) = 0, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0. \tag{23}$$

Полученная система (16)–(23) решается численно с использованием метода прогонки.

Некоторые результаты численных экспериментов

На рис. 1–3 приведены некоторые результаты широко проведенных численных экспериментов при варьировании безразмерных параметров модели.

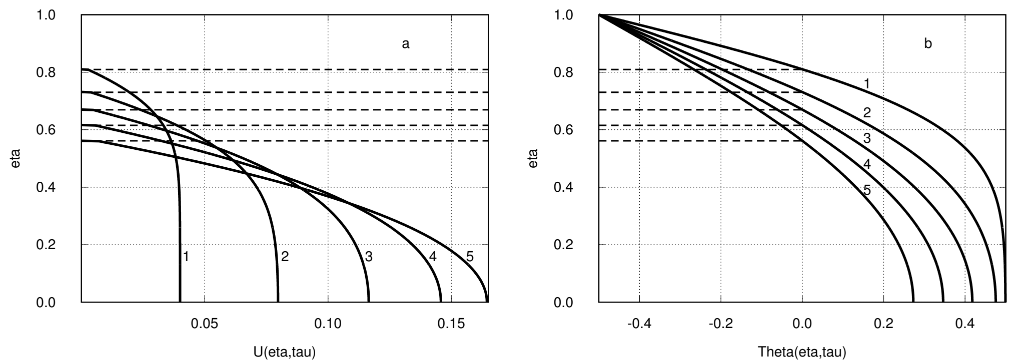

Рис. 1. Пространственно-временные распределения: (a) скорости $U(\eta, \tau)$, (b) температуры $\Theta(\eta, \tau)$; τ: 0.004(1), 0.008(2), 0.012(3), 0.016(4), 0.02(5), $n = 800$, $m = 2000$, $\Theta^0 = 0.5$, $\Theta^{**} = -0.5$, $\alpha = 1$, $\lambda = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\delta = 0.1$; η^*: 0.81(1), 0.73(2), 0.67(3), 0.62(4), 0.56(5)

Следует отметить значительное влияние на процесс течения и фазового превращения параметров ε, ε_1. При уменьшении ε границы раздела сред η^* в разные моменты времени сдвигаются к нижней плоскости – твердый слой увеличивается, уменьшается безразмерная скорость

U течения в жидком слое, температурный градиент становится больше (например, кривые 5 на рис. 1(b), 2(b)).

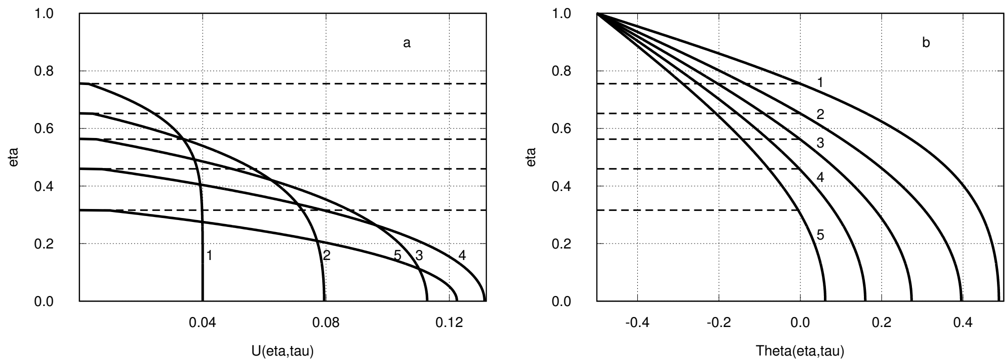

Рис. 2. Пространственно-временные распределения: (a) скорости $U(\eta,\tau)$, (b) температуры $\Theta(\eta,\tau)$; ε=0.06; η^*: 0.76(1), 0.65(2), 0.56(3), 0.46(4), 0.32(5); условия на рис. 1

С увеличением параметра ε_1 вязкость уменьшается, поэтому безразмерная скорость течения уменьшается.

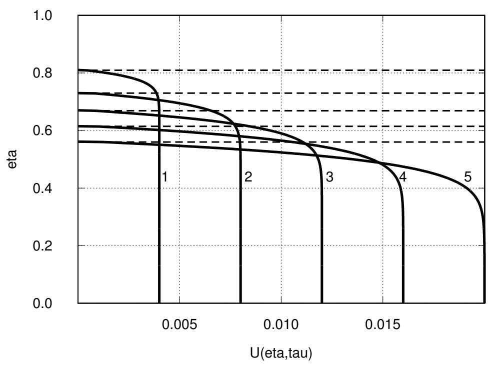

Рис. 3. Пространственно-временное распределение скорости $U(\eta,\tau)$; ε_1=1; η^*: 0.81(1), 0.73(2), 0.67(3), 0.61(4), 0.56(5); условия на рис. 1

Таким образом, построенная в работе математическая модель течения вязкой жидкости позволяет описывать и анализировать процессы течений, фазовых превращений при движении вязких жидкостей, в частности в ходе их транспортировки при наличии температурного градиента.

Список источников

1. **Беляева Н. А., Надуткина А. В.** Неизотермическое течение вязкой жидкости // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* № 3 (32). 2019. С. 20–30.

2. **Беляева Н. А.** Неоднородное течение структурированной жидкости // *Математическое моделирование.* 2006. Т. 18. С. 3–14.

3. **Беляева Н. А., Яковлева А. Ф.** Фронтальная волна напорного течения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2017. Вып. 2 (23). 2017. С. 3–12.

4. **Belyaeva N. A., Stolin A. M., Stelmakh L. S.** Dynamics of Solid-State Extrusion of Viscoelastic Cross-Linked polymeric Materials // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2008. V. 42. Pp. 549–556.

5. **Pryanishnikova E. A., Belyaeva N. A., Stolin A. M.** Compressible material flow in cylindrical channel with variable cross section // *MATEC Web of Conferences* 129, 06011 (2017), ICMTMTE 2017.

6. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

7. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2014. 116 с.

8. **Беляева Н. А.** Основы гидродинамики в моделях : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2011. 147 с.

References

1. **Belyaeva N. A., Nadutkina A. V.** Non-isothermal flow of a viscous fluid. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, V. 3 (32). Pp. 20–30. (In Russ.)

2. **Belyaeva N. A.** Heterogeneous flow of the structured liquid. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling], 2006, V. 18. Pp. 3–14. (In Russ.)

3. **Belyaeva N. A., Yakovleva A. F.** Frontal wave of pressure flow. [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2017, V. 2 (23). Pp. 3–12. (In Russ.)

4. **Belyaeva N. A., Stolin A. M., Stelmakh L. S.** Dynamics of Solid-State Extrusion of Viscoelastic Cross-Linked polymeric Materials. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2008, V. 42. Pp. 549–556.

5. **Pryanishnikova E. A., Belyaeva N. A., Stolin A. M.** Compressible material flow in cylindrical channel with variable cross section. *MATEC Web of Conferences* 129, 06011 (2017), ICMTMTE 2017.

6. **Khudyaev S. I.** *Porogovye yavleniya v nelinejnyh uravneniyah* [Threshold phenomena in nonlinear equations]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (In Russ.)

7. **Belyaeva N. A.** *Matematicheskoye modelirovaniye: uchebnoye posobiye* [Mathematical modeling: a training manual]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2014. 116 p. (In Russ.)

8. **Belyaeva N. A.** *Osnovy gidrodinamiki v modelyakh: uchebnoye posobiye* [Fundamentals of hydrodynamics in models: a training manual]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2011. 147 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors

Беляева Надежда Александровна / Nadezhda A. Belyaeva

д.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук / Doctor in Physics and Mathematics, Associate Professor at Department of Applied Mathematics and Computer Science

Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Машин Илья Олегович / Ilya O. Mashin
аспирант / postgraduate student
Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics of the Federal Research Center Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oplesnina str., 55

Надуткина Анастасия Васильевна / Anastasiya V. Nadutkina
студент-магистрант / graduate student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 02.06.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 11.06.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 11.06.2022