ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

2(43) выпуск 22

Вестник Сыктывкарского университета	Серия 1: *Математика* *Механика* *Информатика*	12+ ISSN 1992-2752
Основан в 1995 году		Выпуск 2 (43)
Выходит 4 раза в год		2022

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2022. — 2 (43). 2022. — 76 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук». Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям: 1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки), 1.1.8 — Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки), 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки), 5.8.2 — Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) (педагогические науки)

(См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into «the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree» on the following scientific specialities: 01.00.00 — Physical and mathematical Sciences; 05.13.00 — computer Science, computer engineering and management; 13.00.02 — Theory and methods of teaching and education (by areas and levels of education) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

Подписной индекс журнала в интернет-каталоге «Пресса России» — 43653.

Адрес редакции
Вестника Сыктывкарского университета
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Свободная цена

© ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2022.

Главный редактор:
д.п.н., ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина» Сотникова О. А.

Ответственный редактор:
Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

Редакционная коллегия:
Аббасов М.Э., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Асланов Р.М., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан)
Беляева Н.А., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой (ВятГУ)
Головач П.А., к.ф.-м.н., доцент (Университет Бергена, Норвегия)
Григорьев С.Г., член-корреспондент РАО, д.т.н., профессор (МГПУ)
Дорофеев С.Н., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ТолГУ)
Калинин С.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ВятГУ)
Колесников Г.Н., д.т.н., профессор (ПетрГУ)
Колпак Е.П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ)
Крылатов А.Ю., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Махнев А.А., член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник (ИММ УрО РАН)
Одинец В.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Орлов В.В., д.п.н., профессор (Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена)
Парилина Е.М., д.ф.-м.н., доцент, профессор (СПбГУ)
Певный А.Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина)
Петров Н.Н., д.ф.-м.н., профессор, директор института математики, информационныгх технологий и физики (УдмГУ)
Петраков А.П., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой (СГУ им. Питирима Сорокина)
Питухин Е.А., д.т.н., профессор (ПетрГУ)
Попов Н.И., д.п.н., , к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой (СГУ им. Питирима Сорокина)
Рудикова-Фронхёфер Л.В., к.ф.-м.н., доцент (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь)
Тихомиров А.Н., д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник (Коми НЦ УрО РАН)
Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник (СГУ им. Питирима Сорокина)

Техническая редакция:
Гудырева Л. В., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Котелина Н. О., к.ф-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Мазур В.В. (СГУ им. Питирима Сорокина)

Содержание

Математика

Банникова Т. М., Немцова О. М. *Геометрические и аналитические характеристики построения многочлена деления круга* 4

Прикладная математика и механика

Беляева Н. А., Машин И. О., Надуткина А. В. *Фазовый переход вязкой жидкости при неизотермическом течении* 21

Информатика

Пенин А. С., Турсуков Н. О. *Разработка компонентов модели оценки состояния оператора киберфизической системы* 32

Методические материалы

Попов Н. И., Канева Е. А. *Формирование познавательного интереса школьников к математике с использованием компьютерных обучающих игр* 55

Наставник-ученик

Ермоленко А. В., Макарова В. Р. *Метод обобщенной реакции для пластины с наклонным основанием* 67

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 512.622
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_4

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА ДЕЛЕНИЯ КРУГА

Татьяна Михайловна Банникова, Ольга Михайловна Немцова
Удмуртский государственный университет

Аннотация. Обсуждается проблема нахождения многочленов деления круга с условием задания некоторых их коэффициентов. Задача существования многочленов такого вида является решенной, но проблема неоднозначности нахождения многочленов деления круга с заданным простым или составным коэффициентом, а также особенности его номера (такие, как разложение на простые множители и значительный порядок по отношению к заданному коэффициенту), может быть использована в задании открытого ключа в криптографических системах. Так, известно использование корней многочленов деления круга в качестве генератора циклической группы в алгоритме Берлекэмпа – Месси. Теоретические основы имеющихся исследований и вычислительные инструменты предлагают различные способы нахождения многочленов деления круга, но не гарантируют практического пути реализации проблемы нахождения многочленов с заведомо заданным коэффициентом. Нахождение таких многочленов на практике является задачей, требующей больших временных и ресурсных затрат. Как и в задаче факторизации, задача нахождения кругового многочлена по заданным коэффициентам представляется задачей понятной, но вычислительно сложной, что дает несомненное преимущество при использовании ее в крипто-

© Банникова Т. М., Немцова О. М., 2022.

графических системах. Свойства многочлена деления круга, такие как неприводимость, симметричность, изменение свойств при рассмотрении в полях различных характеристик, также интересны для использования в шифровании.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ 121030100003-7.

Ключевые слова: многочлены деления круга, криптографическая система, генерация ключей, шифротекст

Для цитирования: Банникова Т. М., Немцова О. М. Геометрические и аналитические характеристики построения многочлена деления круга // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 2 (43). С. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_4

Applied mathematics and mechanics

Original article

Geometrical and analytical characteristics of the constructing the polynomial of a circle division

Tatyana M. Bannikova, Olga M. Nemtsova
Udmurt State University

Abstract. The problem of finding circle division polynomials with the condition of specifying some of their coefficients is discussed. The problem of the existence of polynomials of this type is solved, but the problem of the ambiguity of finding circle division polynomials with a given simple or composite coefficient, as well as features of its number (such as decomposition into prime factors and a significant order with respect to a given coefficient) can be used in setting an open key in cryptographic systems. So it is known to use the roots of circle division polynomials as a cyclic group generator in the Berlekamp-Massey algorithm. The theoretical foundations of the available research and computational tools offer various ways to find circle division polynomials, but do not guarantee a practical way to implement the problem of finding polynomials with a known coefficient. Finding such polynomials in practice is a task that requires a lot of time and resources. As in the factorization problem, the problem of finding a circular polynomial for given coefficients seems

to be an understandable task, but computationally difficult, which gives an undoubted advantage when used in cryptographic systems. The properties of the circle division polynomial, such as irreducibility, symmetry, change in properties when considered in fields of various characteristics, are also interesting for use in encryption.

The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation 121030100003-7.

Keywords: circle division polynomials, cryptosystem, key's generation, ciphertext.

For citation: Bannikova T. M., Nemtsova O. M. Geometrical and analytical characteristics of the constructing the polynomial of a circle division. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 4–20. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_4

Введение

Известные методы, алгоритмы и протоколы защиты информации охватывают ряд функций, обладающих свойствами, позволяющими использовать их для формирования ключей в криптографических системах. Главной особенностью использования таких функций является возможность «простого» шифрования и «сложности» обратной задачи, такой, например, как дискретное логарифмирование [1]. Многочлены деления круга имеют геометрические и аналитические характеристики, которыми обладают некоторые многочлены, уже широко используемые в шифровании данных и генерации ключей, такие как неприводимость, нахождение корней вблизи нуля и др. Классы таких функций увеличиваются, появляются видоизменения их приложений. Продолжается расширение классов функций для генерации шифротекста, преобразуется метод нескольких многочленов. Строятся схемы шифрования на основе многочленов Чебышева [2]. На основе неприводимых многочленов в полях простой характеристики строятся матрицы для применения их при построении обобщенных генераторов псевдослучайных последовательностей p-ичных чисел [3]. Продолжаются исследования в области применения примитивных многочленов в кодовом уплотнении данных [4]. Используются коэффициенты многочленов третьего и пятого порядков

для кодирования информации кодами Рида – Соломона [5; 6]. Рассматриваются циклотомические многочлены в гиперэллиптическом поле [7]. Строится криптосистема, основанная на кубическом поле, связанном с кубическим уравнением Пелла и рациональными функциями Редея [8]. С помощью эллиптических кривых происходит обучение нейронных сетей [9].

В настоящее время известны свойства круговых многочленов, позволяющие говорить об их структуре, геометрических и аналитических характеристиках [10; 11]. Одним из наиболее интересных приложений круговых многочленов до сих пор было доказательство теоремы Веддерберна о коммутативности конечного тела [10]. В последних исследованиях многочлены деления круга использовались для определения сложности различения двоичных слов [12], исследовались группы Галуа для классов многочленов с использованием корней многочлена деления круга [13]. Было доказано свойство характеристического многочлена для изучения строения комплексной гиперповерхности [14]. Применяются многочлены деления круга при определении элементов обобщенных двумерных и трехмерных регулярных решеток [15], как корни многочленов деления круга в качестве генератора циклической группы в алгоритме Берлекэмпа – Месси. Из-за множества приложений, таких как быстрое преобразование Фурье, теория кодирования и криптография для эффективного выполнения вычислений в конечных полях и т. д., широко обсуждаются примитивные нормальные элементы и примитивные нормальные многочлены над конечными полями [16–18].

Рассматривается неприводимость многочленов в факторизации многочленов над конечными полями, которая играет важную роль в самых разных технологических ситуациях, включая криптографию, цифровую систему отслеживания, в кодах с исправлением ошибок. При этом используются и многочлены деления круга [19–25].

Математическое обоснование

У многочлена $z^n - 1$ есть n различных комплексных корней, числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, которые называются *корнями из единицы n-й степени.* Соответствующие точки на комплексной плоскости располагаются на единичной окружности с центром в нуле и образуют правильный n-угольник. ζ — корень из единицы n-й степени

называется *примитивным*, если $\zeta^m \neq 1$ для все натуральных m меньше n.

Многочлен деления круга — это

$$\Phi_n(x) = (x - \zeta_1)(x - \zeta_2)(x - \zeta_3)\dots(x - \zeta_{\phi(n)}),$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\phi(n)}$ — все примитивные корни n-й степени из 1.

Пусть $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, т. е. простое поле характеристики нуль. Рассмотрим уравнение деления круга

$$\Phi_n(x) = 0.$$

Корни n-й степени из единицы в поле комплексных чисел делят единичную окружность на n равных дуг. Пусть p — простое число, на которое не делится число n. Тогда вместе с примитивным ζ также и ζ^p является примитивным корнем n-й степени из единицы, и этот элемент удовлетворяет некоторому целочисленному неразложимому уравнению $g(\zeta^p) = 0$, левая часть которого имеет содержание 1. Полагая $f(x) = x^{n-1}$, получаем, что многчлен $f(x)$ раскладывается на n различных линейных множителей. Далее, многочлен $g(x^p)$ имеет ζ своим корнем, а потому должен делить $f(x)$. Тогда

$$g(x^p) \equiv g(x)^p \mod p.$$

Все корни многочлена $\Phi_n(x)$ удовлетворяют уравнению $f(x) = 0$, и $\Phi_n(x)$ не имеет кратных корней. Более того, в простом поле характеристики ноль многочлен $\Phi_n(x)$ неразложим, а значит, все его корни сопряженные.

Если теперь K — поле характеристики p, то положим $n = p^m h$, где h не делится на p. Для каждого корня n-й степени из единицы имеет место равенство

$$(\zeta^h - 1)^{p^m} = \zeta^{hp^m} - 1 = \zeta^n - 1 = 0.$$

Следовательно, $\zeta^h - 1 = 0$.

Таким образом, корни n-й степени из единицы являются одновременно корнями h-й степени из единицы, где h не делится на характеристику поля. В случае характеристики ноль можно положить $h = n$. В обоих случаях $\zeta^h = 1$, где h не делится на характеристику поля.

Соотношение

$$\prod\nolimits_{d|n} \Phi_{d(x)} = x^n - 1 \tag{1}$$

в кольце целочисленных многочленов позволяет заключить, что каждый многочлен деления круга является целочисленным многочленом и не зависит от характеристики поля.

С помощью функции Мёбиуса и (1) получается выражение для $\Phi_n(x)$ через $x^d - 1$, где d пробегает делители n:

$$\Phi_n(x) = \prod\nolimits_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}. \tag{2}$$

Выражение (2) также позволяет утверждать, что коэффициенты многочлена Φ_n являются целыми числами. Следующее свойство используется для нахождения многочленов с целыми коэффициентами, отличными от ± 1. Пусть $n > 1$ – нечетное число. Тогда

$$\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x). \tag{3}$$

Действительно, если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\phi(n)}$ — первообразные корни степени n, то $-\zeta_1, \ldots, -\zeta_{\phi(n)}$ — первообразные корни степени $2n$. Таким образом, из (3) вытекает

$$\Phi_n(-x) = (-x - \zeta_1)(-x - \zeta_2) \ldots (-x - \zeta_{\phi(n)}), \tag{4}$$

$$\Phi_{2n}(x) = (x + \zeta_1)(x + \zeta_2) \ldots (x + \zeta_{\phi(n)}). \tag{5}$$

Из того, что степень многочлена Φ_n четна, получается, что выражения (4) и (5) равны между собой, т. е. верно необходимое равенство.

В зависимости от номера n вид и коэффициенты многочлена меняются. Так для простого $n = p$ и натурального k получается:

$$\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1, \tag{6}$$

$$\Phi_{p^{k+1}} = x^{(p-1)p^k} + x^{(p-2)p^k} + \cdots + x^{p^k} + 1. \tag{7}$$

Для различных нечетных простых p и q имеет место выражение

$$\Phi_{pq} = \frac{x^{p(q-1)} + x^{p(q-2)} + \cdots + x + 1}{x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1}. \tag{8}$$

Таким образом, из (6), (7), (8) все многочлены деления круга с номерами вида p, p^{k+1}, pq имеют коэффициенты 0 или ± 1.

Далее рассмотрим положительное нечетное число t, т. е. $t \geq 3$, найдем t простых чисел $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$, для которых выполняется неравенство $p_1 + p_2 > p_t$ (такие p_t всегда найдутся).

Пусть $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_t$ и рассмотрим многочлен $\Phi_n(x)$ по модулю x^{p_t+1}. Так как t — нечетное, то

$$\Phi_{p_1 \ldots p_t} = \frac{(x^{p_1} - 1) \ldots (x^{p_t} - 1)}{x - 1} \cdot \frac{\prod (x^{p_i p_j p_k} - 1)}{\prod (x^{p_i p_j} - 1)} \cdot \ldots . \tag{9}$$

Из неравенства $1 + p_t \leq p_1 + p_2 \leq p_i + p_j \leq p_i p_j$ и (9) следует, что

$$x^{p_i p_j} \equiv 0 \mod x^{p_t+1}, \quad x^{p_i p_j p_k} \equiv 0 \mod x^{p_t+1}, \quad \ldots .$$

Поэтому для нечетного t

$$\Phi_{p_1 \ldots p_t} = \frac{(1 - x^{p_1}) \ldots (1 - x^{p_t})}{(1 - x)} \mod x^{p_t+1}. \tag{10}$$

Из неравенства $p_i + p_j \geq p_1 + p_2 > p_i = p_t$ следует, что

$$(1 - x^{p_1}) \ldots (1 - x^{p_t}) \equiv (1 - x^{p_1} - \cdots - x^{p_t}) \mod x^{p_t+1}. \tag{11}$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{1 - x} \equiv (1 + x + \cdots + x^{p_t}) \mod x^{p_t+1}.$$

Поэтому из (10) и (11) получаем:

$$\Phi_{p_1 \ldots p_t} \equiv (1 + x + \cdots + x_t^p)(1 - x^{p_1} - \cdots - x^{p_t}) \mod x^{p_t+1}. \tag{12}$$

Раскроем в (12) скобки и выразим коэффициенты при x^{p_t} и x^{p_t-2} в выражении $(1 + x + \cdots + x^{p_t})(1 - x^{p_1} - \cdots - x^{p_t})$. Используя неравенство $0 < p_i \leq p_t$ и то, что в первый множителей входят все степени x, которые меньше чем p, можно вывести формулу для нахождения коэффициента при x^{p_t}:

$$-x^p - x^{p_{t-1}} x^{p_t - p_{t-1}} - x^{p_{t-2}} x^{p_t - p_{t-2}} - \cdots - x^{p_1} x^{p_t - p_1} + 1 \cdot x^{p_t} =$$

$$= x^{p_t} - \prod_{i=1}^{t} x^{p_i} x^{p_t - p_i} = x^{p_t} - t x^{p_t} = (1 - t) x^{p_t}. \tag{13}$$

Коэффициент при x^{p_t-2} получается соответственно:

$$-x^{p_t-2} - x^{p_{t-1}}x^{(p_t-2)-p_{t-1}} - x^{p_{t-2}}x^{(p_t-2)-p_{t-2}} \dots - x^{p_1}x^{(p_t-2)-p_1} + 1 \cdot x^{p_t-2}.$$

$$= x^{p_t-2} - \prod_{i=1}^{t-1} x^{p_i}x^{(p_t-2)-p_i} = x^{p_t-2} - (t-1)x^{p_t-2} = (2-t)x^{p_t}. \qquad (14)$$

Когда t пробегает все нечетные числа, начиная с 3, числа $1-t$ и $2-t$ в (13) и (14) пробегают все отрицательные числа.

Чтобы получить в качестве коэффициентов круговых многочленов все положительные числа, рассмотрим $\Phi_{2p_1\dots p_t}$, где $p_1 \geq 3$ и $p_1 + p_2 > p_t$. Число $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_t$ нечетно, поэтому $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, как было уже показано в (3). Это означает, что у многочленов Φ_{2n} и Φ_n коэффициенты при нечетных степенях x отличаются знаком, т. е. у многочлена $\Phi_{2p_1\dots p_t}$ коэффициенты при x^{p_t} и x^{p_t-2} равны $t-1$ и $t-2$ соответственно. Это позволяет утверждать, что любое целое число может быть использовано в качестве коэффициента многочлена деления круга, способ нахождения такого многочлена и степени x, коэффициентом которого является выбранное число.

1. Нахождение многочлена деления круга с заданным коэффициентом

Опишем алгоритм нахождения многочлена деления круга при заданном коэффициенте, не равном ± 1. Этот коэффициент, как было показано ранее, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом.

Алгоритм

Вход: целое число $k \neq \pm 1$.

Выход: многочлен Φ_n, содержащий число k в качестве одного из коэффициентов.

Если $k < 0$, то выполнить проверку:

Если k-четное, то задать $t = 1 - k$.

Иначе, задать $t = 2 - k$.

Иначе.

Если k-четное, то задать $t = 1 + k$.

Иначе, задать $t = 2 + k$.

Найти минимальные простые $p_1 < p_2 < \dots < p_t$, для которых выполняется $p_1 + p_2 > p_t$.

Если $k < 0$, то найти $n = p_1 \cdot p_2 \dots p_t$.

Иначе $n = 2p_1 \cdot p_2 \dots p_t$.
Вычислить Φ_n (или его коэффициенты при соответствующих степенях, так, коэффициент k будет при x^{p_t} для четного k и при x^{p_t-2} для нечетного k).

Для решения данной задачи можно воспользоваться системой компьютерной алгебры WolframMathematica [26]. В этой системе можно получить все коэффициенты кругового многочлена заданного номера, исключая дубли. Так, например, код

$$\text{Select[Table[}\{c[n], n\}\text{,}\{n, 1, 200\}\text{],MemberQ[\#,-3,3]\&]}$$

ищет среди коэффициентов круговых многочленов с номерами от 1 до 200 коэффициент, равный «-3». Результатом является список из перечня коэффициентов и номеров кругового многочлена, у которого хотя бы один коэффициент равен «-3».

Рассмотрим несколько примеров при малых k:

1. Для $k = -2$ круговой многочлен Φ_n с наименьшим номером, где хотя бы один коэффициент равен «-2», находится при

$$t = 1 - k = 3, \qquad n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105, \qquad 3 + 5 > 7,$$

количество множителей равно трем. $\Phi_{105} = \dots - 2x^7 - x^8 - \dots$ (это первый из известных многочленов такого вида [14]).

2. Для $k = -3$, действуя по алгоритму, находим:

$$t = 2 - k = 5, \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 1062347,$$

$$\Phi_{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} = \Phi_{1062347} = \dots - 3x^{21} + \dots.$$

При этом для $k = -3$ существует многочлен деления круга Φ_n с меньшим номером. Он находится при $n = 5 \cdot 7 \cdot 11$, $5 + 7 > 11$, количество множителей 3, что не соответствует алгоритму

$$\Phi_{385} = \Phi_{5 \cdot 7 \cdot 11} = \dots - 3x^{119} - 3x^{120} - 3x^{121} - \dots.$$

3. Для $k = 2$, действуя по алгоритму, находим:

$$t = 1 + k = 3, \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105, \qquad 3 + 5 > 7,$$

количество множителей 3.

$$\Phi_{2p_1p_2p_3} = \Phi_{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = \Phi_{210} = \cdots + 2x^7 + \ldots.$$

И опять, есть многочлен Φ_n с меньшим номером, он находится при $n = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$, количество множителей 3, но $3 + 5 < 11$, что не соответствует алгоритму.

$$\Phi_{165} = \Phi_{3\cdot 5\cdot 11} = \cdots + 2x^{16} + 2x^{17} + \cdots + 2x^{31} + 2x^{32} + 2x^{33} + \ldots$$

$$\cdots + 2x^{47} + 2x^{48} + 2x^{49} + 2x^{63} + \ldots,$$

и при этом номер нечетный.

4. Для $k = 3$, действуя по алгоритму, находим

$$t = 2 + k = 5, \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 1062347,$$

$$11 + 13 > 23,$$

количество множителей 5.

$$\Phi_{2p_1p_2p_3p_4p_5} = \Phi_{2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \Phi_{2124694} = \cdots + 3x^{21} + \ldots.$$

Многочлен с меньшим номером $\Phi_{595} = \Phi_{5\cdot 7\cdot 17} = \cdots + 3x^{240} + \ldots$ с нечетным номером.

5. Для $k = -4$, действуя по алгоритму, находим

$$t = 1 - k = 5, \qquad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 1062347,$$

$$11 + 13 > 23,$$

количество множителей 5. $\Phi_{p_1p_2p_3p_4p_5} = \Phi_{11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23} = \Phi_{1062347} = \cdots - 4x^{23} + \ldots$ Многочлен с меньшим номером

$$\Phi_{1365} = \Phi_{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13} = \cdots - 4x^{196} + \cdots - 4x^{206} + \cdots - 4x^{265} + \cdots - 4x^{275} + \ldots$$

$$\cdots - 4x^{301} + \cdots - 4x^{311} + \cdots - 4x^{370} + \cdots - 4x^{380}.$$

Заключение

В результате проделанной работы удалось собрать в единую схему геометрические и аналитические характеристики многочлена деления круга, позволяющие явно выписать алгоритм нахождения многочленов деления круга, содержащие в качестве коэффициентов целые числа, не равные нулю, одному и минус одному.

Найдена группа многочленов необходимой характеристики и проанализирован результат, позволяющий выявить направления исследований. Вопрос о неоднозначности нахождения многочленов деления круга с заданным простым или составным коэффициентом позволяет продолжить исследования в разработке алгоритма нахождения многочлена с наименьшим номером, а также нахождения многочлена наименьшей степени с такими же характеристиками. Для этого требуются дальнейшие теоретические исследования свойств многочленов деления круга.

Неоднозначность нахождения многочленов деления круга с заданным простым или составным коэффициентом, а так же особенности его номера, такие как, разложение на простые множители и значительный порядок по отношению к заданному числу, способствует использованию многочленов деления круга в задании открытого ключа в криптографических системах.

Список источников

1. **Tripathi S. K., Gupta B., Soundra Pandian K. K.**. An alternative practical publickey cryptosystems based on the Dependent RSA Discrete Logarithm Problems // *Expert Systems With Applications*, 164 (2021), 114047.

2. **Sreedharan S., Eswaran C.**. A lightweight encryption scheme using Chebyshev polynomial maps // *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 240 (2021), 166786.

3. **Билецкий А. А.**. Криптографические приложения обобщенных матриц Галуа и Фибоначчи // *Защита информации.* 15:2 (2013). С. 128–132.

4. **Зеленевский В. В., Зеленевский В. Ю., Зеленевский А. В. и др**. Статистический и корреляционный анализ адресных последовательностей в каналах передачи с кодовым уплотнением данных // *Известия Института инженерной физики.* 4:58 (2020). С. 31–34.

5. **Dai Z., Huang M.**. A criterion for primitivity of integral polynomial Mod 2d // *Chinese Science Bulletin*, 15 (1990), pp. 1128–1130.

6. **Zhu Y., Wang X.**. A criterion for primitive polynomials over Galois rings // *Discrete Mathematics*, 303 (2005), pp. 244–256.

7. **Федоров Г. В.**. О длине периода функциональной непрерывной дроби над числовым полем // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления.* 495:1 (2020). С. 78-83.

8. **Susilo W., Tonien J.** A Wiener-type attack on an RSA-like cryptosystem constructed from cubic Pell equation // *Theoretical Computer Science*, 885 (2021), pp. 125–130.

9. **Pousin J.** Least squares formulations for some elliptic second order problems, feedforward neural network solutions and convergence results // *Journal of Computational Mathematics and Data Science*, 2 (2022), 100023.

10. **Прасолов В. В.** Многочлены / МЦНМО. М., 2003.

11. **Ван дер Варден Б. Л.** Алгебра. М.: Наука, 1979.

12. **Вялый М. Н., Гимадеев Р. А.** О различении слов вхождениями подслов // *Дискретный анализ и исследование операций.* 21:1(115) (2014). С. 3–14.

13. **Галиева Л. И., Галяутдинов И. Г.** Об одном классе уравнений, разрешимых в радикалах // *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2011. № 2. С. 22–30.

14. **Савельев И. В.** Круговые многочлены и особенности комплексных гиперповерхностей // *УМН.* 48:2 (290) (1993). С. 197–198.

15. **Лиопо В. А., Сабуть А. В.** Точечные группы и сингонии некристаллографической симметрии // *Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление.* 1:148 (2013). С. 115–126.

16. **Fan S., Wang X.** Primitive normal polynomials with the specified last two coefficientss // *Discrete Mathematics*, 309 (2009), pp. 4502-4513.

17. **Fan S. Q., Han W. B., Feng K. Q.** Primitive normal polynomials with multiple coefficients prescribed: An asymptotic result // *Finite Fields and Their Applications*, 13:4 (2007), pp. 1029–1044.

18. **Fan S. Q., Han W. B., Feng K. Q., Zhang X. Y.** Primitive normal polynomials with the first two coefficients prescribed: A revised p-adic method // *Finite Fields and Their Applications*, 13 (2007), pp. 577–604.

19. **Brochero Martinez F. E., Reis L., Silva–Jesus L.** Factorization of composed polynomials and applications // *Discrete Mathematics*, 342 (2019), 111603.

20. **Bakshi G. K., Raka M.** A class of constacyclic codes over a finite field // *Finite Fields Appl.*, 18:6 (2012), 362–377.

21. **Brochero Martinez F. E., Giraldo Vergara C. R., de Oliveira L.** Explicit factorization of xn - 1 ∈ Fq[x] // *Des. Codes Cryptogr.*, 77 (2015), pp. 277–286.

22. **Brochero Martinez F. E., Reis L.** Factoring polynomials of the form f(xn) ∈ Fq[x] // *Finite Fields Appl.*, 49 (2018), pp. 166–179.

23. **Li F., Yue Q.** The primitive idempotents and weight distributions of irreducible constacyclic codes // *Des. Codes Cryptogr.*, 86 (2018), pp. 771–784.

24. **Liu L., Li L., Wang L., Zhu S.** Repeated-root constacyclic codes of length nlps // *Discrete Math.*, 340:9 (2017), 2250–2261.

25. **Wu Y., Yue Q., Fan S.** Further factorization of xn - 1 over a finite fiel // *Finite Fields Appl.*, 54 (2018), pp. 197–215.

26. WOLFRAM MATHEMATICA ONLINE [Электронный ресурс], WolframAlpha.com (2022). URL: https://www.wolfram.com/mathematica/online/ (дата обращения: 05.06.2022).

References

1. **Tripathi S. K., Gupta B., Soundra Pandian K. K.** An alternative practical publickey cryptosystems based on the Dependent RSA Discrete Logarithm Problems. *Expert Systems With Applications*, 164 (2021), 114047.

2. **Sreedharan S., Eswaran C.** A lightweight encryption scheme using Chebyshev polynomial maps. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 240 (2021), 166786.

3. **Biletsky A. A.** Cryptografy applications of primitive matrices Galois and Fibonacci. *Zashhita informacii* [Information Security Research Journal], 15:32 (2013), pp. 128–132. (In Russ.)

4. **Zelenevsky V. V., Zelenevsky V. Yu., Zelenevsky A. V. et al**. Statisticheskiy i korrelyatsionnyy analiz adresnykh posledovatel'nostey v kanalakh peredachi s kodovym mul'tipleksirovaniyem dannykh. *Izvestiya Instituta inzhenernoy fiziki* [Proceedings of the Institute of Engineering Physics]. 4:58 (2020), pp. 31–34. (In Russ.)

5. **Dai Z., Huang M.** A criterion for primitivity of integral polynomial Mod 2d. *Chinese Science Bulletin*, 15 (1990), pp. 1128–1130.

6. **Zhu Y., Wang X.** A criterion for primitive polynomials over Galois rings. *Discrete Mathematics*, 303 (2005), pp. 244–256.

7. **Fedorov G. V.** On the Period Length of a Functional Continued Fraction over a Number Field. *Doklady Rossijskoj akademii nauk. Matematika, informatika, processy upravleniya* [Papers of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, control processes], 102 (2020), pp. 513–517. (In Russ.)

8. **Susilo W., Tonien J.** A Wiener-type attack on an RSA-like cryptosystem constructed from cubic Pell equation. *Theoretical Computer Science*, 885 (2021), pp. 125–130.

9. **Pousin J.** Least squares formulations for some elliptic second order problems, feedforward neural network solutions and convergence results. *Journal of Computational Mathematics and Data Science*, 2 (2022), 100023.

10. **Prasolov V. V.** *Mnogochleny* [Polynomials], Moscow Center For Continuous Mathematical Education, M., 2003 (In Russ.)

11. **Van der Waerden B. L.** Algebra. M.: Nauka, 1979. (In Russ.)

12. **Vyalyi M. N., Gimadeev R. A.** Separation of words by positions of subwords. Discretnyy analiz i issledovaniye operatsiy [Discrete Analysis and Operations Research], 21:1(115) (2014), pp. 3–14. (In Russ.)

13. **Galieva L. I., Galyautdinov I. G.** On a class of equations solvable in radicals. Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika [Russian Math. (Iz. VUZ)], 55:2 (2011), pp. 18–25. (In Russ.)

14. **Savel'ev I. V.** Circular polynomials and singularities of complex hypersurfaces. Uspekhi Mat. Nauk [Advances in Mathematical Sciences], 48:2 (290) (1993), pp. 197–198. (In Russ.)

15. **Liopo V. A., Sabut A. V.** Point groups and syngonies of noncrystallographic symmetry. *Vestnik Grodnenskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Yanki Kupaly'. Seriya 2. Matematika. Fizika. Informatika, vy'chislitel'naya texnika i upravlenie* [Bulletin of Grodno State University named after Yanka Kupala. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, computer technology and management], 1:148 (2013), pp. 115–126. (In Russ.)

16. **Fan S., Wang X.** Primitive normal polynomials with the specified last two coefficientss. *Discrete Mathematics*, 309 (2009), pp. 4502–4513.

17. **Fan S. Q., Han W. B., Feng K. Q.** Primitive normal polynomials with multiple coefficients prescribed: An asymptotic result. *Finite Fields and Their Applications*, 13:4 (2007), pp. 1029–1044.

18. **Fan S. Q., Han W. B., Feng K. Q., Zhang X. Y.** Primitive normal polynomials with the first two coefficients prescribed: A revised p-adic method. *Finite Fields and Their Applications*, 13 (2007), pp. 577–604.

19. **Brochero Martнnez F. E., Reis L., Silva–Jesus L.** Factorization of composed polynomials and applications. *Discrete Mathematics*, 342 (2019), 111603.

20. **Bakshi G. K., Raka M.** A class of constacyclic codes over a finite field. *Finite Fields Appl.*, 18:6 (2012), pp. 362–377.

21. **Brochero Martнnez F. E., Giraldo Vergara C. R., de Oliveira L.** Explicit factorization of xn - 1 ∈ Fq[x] . D*es. Codes Cryptogr.*, 77 (2015), pp. 277–286.

22. **Brochero Martнnez F. E., Reis L.** Factoring polynomials of the form f(xn) ∈ Fq[x] . *Finite Fields Appl.*, 49 (2018), pp. 166–179.

23. **Li F., Yue Q.** The primitive idempotents and weight distributions of irreducible constacyclic codes. *Des. Codes Cryptogr.*, 86 (2018), pp. 771–784.

24. **Liu L., Li L., Wang L., Zhu S.** Repeated-root constacyclic codes of length nlps. *Discrete Math.*, 340:9 (2017), pp. 2250–2261.

25. **Wu Y., Yue Q., Fan S.** Further factorization of xn - 1 over a finite fiel. *Finite Fields Appl.*, 54 (2018), pp. 197–215.

26. WOLFRAM MATHEMATICA ONLINE [Электронный ресурс], WolframAlpha.com (2022), Available at: https://www.wolfram.com/mathematica/online/ (accessed 05.06.2022).

Сведения об авторах / Information about authors
Татьяна Михайловна Банникова / Tatyana M. Bannikova
к.п.н., доцент кафедры алгебры и топологии / Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Algebra and Topology Department
Удмуртский государственный университет / Udmurt State University
426034, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 / 426034, Udmurt Republic, Izhevsk, Universitetskaya St., 1

Ольга Михайловна Немцова / Olga M. Nemtsova
к.ф.-м.н., доцент кафедры информатики и математики / Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Informatics and Mathematics Department
Удмуртский государственный университет / Udmurt State University
426034, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 / 426034, Udmurt Republic, Izhevsk, Universitetskaya St., 1

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 06.06.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 25.06.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 25.06.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 519.6, 532.5.032
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_21

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

Надежда Александровна Беляева[1], **Илья Олегович Машин**[2], **Анастасия Васильевна Надуткина**[3]
[1,3]Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина,
[2]Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН

Аннотация.
Построена математическая модель неизотермического напорного течения несжимаемой вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями. Базовые соотношения модели — уравнение движения Навье – Стокса, уравнение теплопроводности, соответствующие начальные и граничные условия. В процессе течения учитывается фазовый переход «жидкость – твердое тело». На границе раздела твердой и жидкой фаз задано условие сопряжения температур. Проведено обезразмеривание построенной математической модели течения. Выполнен численный анализ обезразмеренной модели при варьировании параметров задачи. Представлены и проанализированы графические результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: вязкая жидкость, неоднородное температурное поле, фазовое превращение, численный анализ

Для цитирования: Беляева Н. А., Машин И. О., Надуткина А. В. Фазовый переход вязкой жидкости при неизотермическом течении // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика.*

© Беляева Н. А., Машин И. О., Надуткина А. В., 2022.

Механика. Информатика. 2022. Вып. 2 (43). С. 21−31.
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_21

Applied mathematics and mechanics

Original article

Phase transition of a viscous fluid in a nonisothermal flow

Nadezhda A. Belyaeva, Ilya O. Mashin, Anastasia V. Nadutkina
[1,3]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,
[2]Institute of Physics and Mathematics of the Federal Research Center Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

Annotation.
A mathematical model is constructed for a nonisothermal pressure flow of an incompressible viscous fluid between two parallel planes. The basic relations of the model are the Navier-Stokes equation of motion, the heat conduction equation, the corresponding initial and boundary conditions. In the flow process the possible phase transition ̈liquid - solid ̈is taken into account.The condition for matching the temperatures of the solid and liquid phases is specified at the interface.The corresponding dimensionless flow model is constructed. A numerical analysis of the flow is carried out with varying the dimensionless parameters of the problem.The graphical results of numerical experiments are presented and analyzed. Graphical results of numerical experiments are presented and analyzed.

Keywords: viscous fluid, non-uniform temperature field, phase transition, numerical analysis

For citation: Belyaeva N. A., Mashin I. O., Nadutkina A. V. Phase transition of a viscous fluid in a nonisothermal flow. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 21−31. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_21

Введение

Работа продолжает исследования авторов по вопросам течений вязких жидкостей. Так, в работе [1] изложены и обсуждены результаты численного анализа неизотермического течения жидкости в круглой трубе; математическое моделирование течений структурированных

жидкостей показано в работах [2–4]; в работе [5] построена математическая модель течения сжимаемого вязкого материала в цилиндрическом канале.

Постановка задачи

В работе рассматривается неизотермическое напорное течение несжимаемой вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h, в условиях фазового перехода «жидкость – твердое тело». Математическая модель строится при следующих предположениях. Вектор скорости течения жидкости имеет одну ненулевую компоненту V_x, зависящую от пространственной координаты y и времени t:

$$\vec{V} = (V(y,t), 0, 0). \tag{1}$$

Условие неразрывности

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0 \tag{2}$$

в рассматриваемом случае выполняется. Пусть течение происходит под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси течения x, так что

$$p = p(x), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -b = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Зависимость вязкости μ от температуры $T = T(y,t)$ зададим, следуя [6], формулой Аррениуса:

$$\mu(T) = \mu_0 \exp\left(\frac{E}{RT}\right), \tag{4}$$

где μ_0 — начальная вязкость, E — энергия активации вязкого течения, R — универсальная газовая постоянная. Предполагаем, что начальная температура жидкости T^0, на верхней границе полосы задана температура T^{**}, которая ниже температуры фазового превращения T^*. Обозначим границу между твердым и жидким слоем среды $y^* = y^*(t)$. Тогда в момент времени t слой $0 \le y < y^*$ — жидкий, $y^* \le y \le h$ — твердый.

Запишем уравнение теплового баланса [7]:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\mathrm{grad}\,T\right)=\mathrm{div}(\lambda\mathrm{grad}\,T)+\sigma_{ik}^{'}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}, \tag{5}$$

где

$$\sigma_{ik}^{'}=\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)+\xi\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}$$

есть вязкий тензор напряжений; c — теплоемкость, ρ — плотность жидкости, λ — коэффициент теплопроводности считаем постоянными. Обозначим коэффициент теплопроводности жидкого слоя среды λ_1, твердого – λ_2. Преобразуем уравнение (5) с учетом составляющих слагаемых:

$$\mathrm{grad}\,T=\left(0,\frac{\partial T}{\partial y},0\right),\quad \vec{V}\mathrm{grad}\,T=0,$$

$$\mathrm{div}(\lambda_1\mathrm{grad}\,T)=\lambda_1\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},\quad \mathrm{div}(\lambda_2\mathrm{grad}\,T)=\lambda_2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$\sigma_{ik}^{'}$ соответствует $\sigma_{xy}^{'}$:

$$\sigma_{xy}^{'}=\sigma_{yx}^{'}=\mu(T)\frac{\partial V_x}{\partial y}=\mu(T)\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Тогда (5) запишется:

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu(T)}{\lambda_1}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2, \tag{6}$$

где

$$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{c\rho}{\lambda_1},$$

α_1 —коэффициент температуропроводности жидкой фазы. Скорость течения в твердом слое равна 0, поэтому из уравнения (5) следует, что в произвольный момент времени t температура вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{7}$$

где

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{c\rho}{\lambda_2},$$

α_2 — коэффициент температуропроводности.

На границе $y = y^*$ задаем условие сопряжения температур:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y^*-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y^*+0} - \rho Q^* \frac{\partial y^*}{\partial t}, \tag{8}$$

Q^* — теплота фазового перехода.

Уравнение движения Навье – Стокса [8] при условии неразрывности (2) и отсутствия массовых сил примет вид

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla)\vec{V} \right] = -\mathrm{grad} p + \mu \Delta \vec{V} + 2(\mathrm{grad}\mu, \nabla)\vec{V} + \mathrm{grad}\mu \times \mathrm{rot}\vec{V}. \tag{9}$$

Здесь с учетом условий (1)–(4) справедливы соотношения

$$(\vec{V}, \nabla)\vec{V} = (0,0,0), \quad \mathrm{grad}\, p = (-b, 0, 0)\,, \quad \Delta \vec{V} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, 0, 0 \right),$$

$$\mathrm{grad}\, \mu = \left(0, \frac{\partial \mu}{\partial y}, 0 \right), \quad (\mathrm{grad}\, \mu, \nabla)\vec{V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}, 0, 0 \right),$$

$$\mathrm{grad}\, \mu \times \mathrm{rot}\, \vec{V} = \left(-\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}, 0, 0 \right).$$

Тогда уравнение (9) преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T) \frac{\partial V}{\partial y} \right) + b. \tag{10}$$

Соответствующие начальные

$$0 \le y < h: \quad T(y,0) = T^0, \quad T(h,0) = T^{**}, \tag{11}$$

$$0 \le y \le h: \quad V(y,0) = 0, \tag{12}$$

и граничные условия:

$$V(h,t) = 0, \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial V(y,t)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{14}$$

Уравнения (6)–(7), (10) приведем к безразмерному виду. Для этого введем следующие параметры:

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta^* = \frac{y^*}{h}; \quad \Theta = \frac{E(T-T^*)}{RT^{*2}}, \quad T = T^* + \frac{\Theta R T^{*2}}{E};$$

$$U = \frac{\mu(T^*)V}{bh^2}, \quad V = \frac{Ubh^2}{\mu(T^*)}; \quad \tau = \frac{\lambda_1 R {T^*}^2 t}{EQ^*\rho h^2}, \quad t = \frac{\tau E Q^* \rho h^2}{\lambda_1 R {T^*}^2}; \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad \varepsilon = \frac{\lambda_1 R {T^*}^2}{\alpha_1 \rho E Q^*}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1 R {T^*}^2}{\mu(T^*) E Q^*}, \quad \delta = \frac{E h^4 b^2}{R T^{*2} \lambda_1 \mu(T^*)}.$$

С учетом параметров (15) в жидком слое выполняются соотношения относительно безразмерной температуры Θ и скорости U:

$$\eta < \eta^* : \qquad \varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \delta \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 \exp(-\Theta), \tag{16}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\exp(-\Theta)\,\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) + 1, \tag{17}$$

в отвердевшей части

$$\eta > \eta^* : \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}, \quad U = 0. \tag{18}$$

На границе фазового перехода условие (8) принимает вид

$$\eta = \eta^* : \qquad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right|_{\eta^*-0} + \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau} = \lambda \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right|_{\eta^*+0}, \quad \Theta = 0, \quad U = 0. \tag{19}$$

Начальные условия (11)–(12), граничные условия (13)–(14) в безразмерных переменных запишутся:

$$0 \le \eta < 1: \quad \Theta(\eta, 0) = \Theta^0, \quad \Theta(1, 0) = \Theta^{**}, \tag{20}$$

$$0 \le \eta \le 1: \quad U(\eta, 0) = 0, \tag{21}$$

$$U(1, \tau) = 0, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0. \tag{23}$$

Полученная система (16)–(23) решается численно с использованием метода прогонки.

Некоторые результаты численных экспериментов

На рис. 1–3 приведены некоторые результаты широко проведенных численных экспериментов при варьировании безразмерных параметров модели.

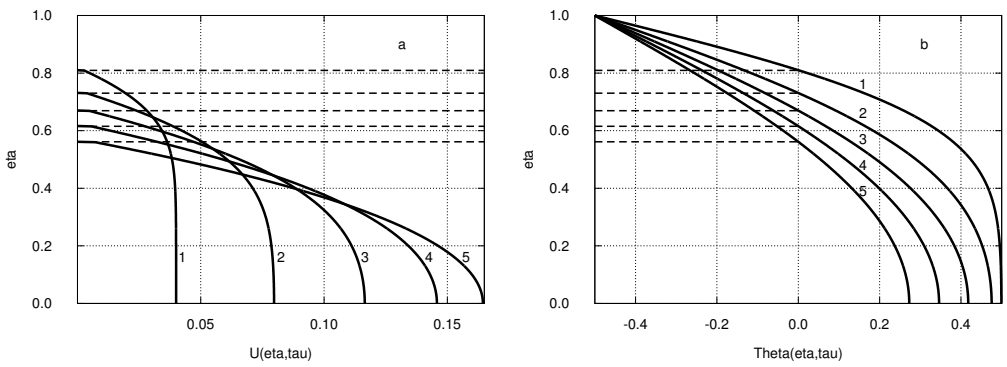

Рис. 1. Пространственно-временные распределения: (a) скорости $U(\eta, \tau)$, (b) температуры $\Theta(\eta, \tau)$; τ: 0.004(1), 0.008(2), 0.012(3), 0.016(4), 0.02(5), $n = 800$, $m = 2000$, $\Theta^0 = 0.5$, $\Theta^{**} = -0.5$, $\alpha = 1$, $\lambda = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\delta = 0.1$; η^*: 0.81(1), 0.73(2), 0.67(3), 0.62(4), 0.56(5)

Следует отметить значительное влияние на процесс течения и фазового превращения параметров ε, ε_1. При уменьшении ε границы раздела сред η^* в разные моменты времени сдвигаются к нижней плоскости – твердый слой увеличивается, уменьшается безразмерная скорость

U течения в жидком слое, температурный градиент становится больше (например, кривые 5 на рис. 1(b), 2(b)).

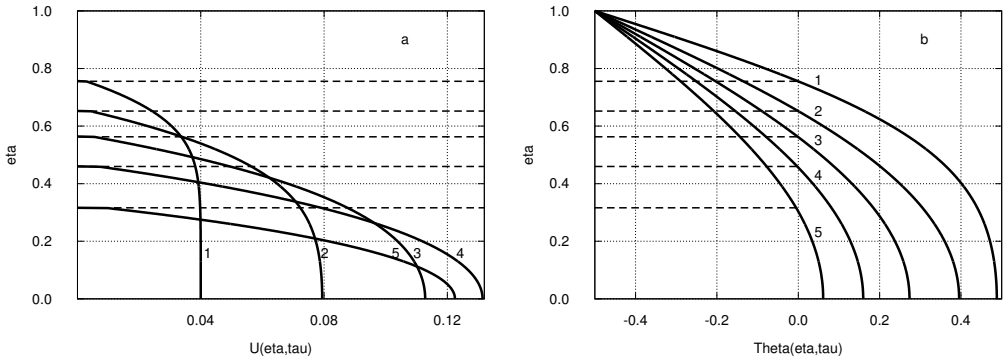

Рис. 2. Пространственно-временные распределения: (a) скорости $U(\eta, \tau)$, (b) температуры $\Theta(\eta, \tau)$; ε=0.06; η^*: 0.76(1), 0.65(2), 0.56(3), 0.46(4), 0.32(5); условия на рис. 1

С увеличением параметра ε_1 вязкость уменьшается, поэтому безразмерная скорость течения уменьшается.

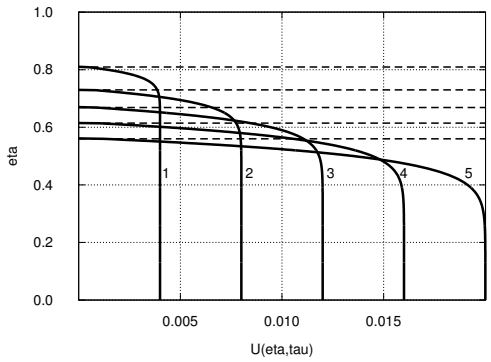

Рис. 3. Пространственно-временное распределение скорости $U(\eta, \tau)$; ε_1=1; η^*: 0.81(1), 0.73(2), 0.67(3), 0.61(4), 0.56(5); условия на рис. 1

Таким образом, построенная в работе математическая модель течения вязкой жидкости позволяет описывать и анализировать процессы течений, фазовых превращений при движении вязких жидкостей, в частности в ходе их транспортировки при наличии температурного градиента.

Список источников

1. **Беляева Н. А., Надуткина А. В.** Неизотермическое течение вязкой жидкости // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика.* № 3 (32). 2019. С. 20–30.

2. **Беляева Н. А.** Неоднородное течение структурированной жидкости // *Математическое моделирование.* 2006. Т. 18. С. 3–14.

3. **Беляева Н. А., Яковлева А. Ф.** Фронтальная волна напорного течения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2017. Вып. 2 (23). 2017. С. 3–12.

4. **Belyaeva N. A., Stolin A. M., Stelmakh L. S.** Dynamics of Solid-State Extrusion of Viscoelastic Cross-Linked polymeric Materials // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2008. V. 42. Pp. 549–556.

5. **Pryanishnikova E. A., Belyaeva N. A., Stolin A. M.** Compressible material flow in cylindrical channel with variable cross section // *MATEC Web of Conferences* 129, 06011 (2017), ICMTMTE 2017.

6. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

7. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2014. 116 с.

8. **Беляева Н. А.** Основы гидродинамики в моделях : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2011. 147 с.

References

1. **Belyaeva N. A., Nadutkina A. V.** Non-isothermal flow of a viscous fluid. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, V. 3 (32). Pp. 20–30. (In Russ.)

2. **Belyaeva N. A.** Heterogeneous flow of the structured liquid. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling], 2006, V. 18. Pp. 3–14. (In Russ.)

3. **Belyaeva N. A., Yakovleva A. F.** Frontal wave of pressure flow. [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2017, V. 2 (23). Pp. 3–12. (In Russ.)

4. **Belyaeva N. A., Stolin A. M., Stelmakh L. S.** Dynamics of Solid-State Extrusion of Viscoelastic Cross-Linked polymeric Materials. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2008, V. 42. Pp. 549–556.

5. **Pryanishnikova E. A., Belyaeva N. A., Stolin A. M.** Compressible material flow in cylindrical channel with variable cross section. *MATEC Web of Conferences* 129, 06011 (2017), ICMTMTE 2017.

6. **Khudyaev S. I.** *Porogovye yavleniya v nelinejnyh uravneniyah* [Threshold phenomena in nonlinear equations]. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (In Russ.)

7. **Belyaeva N. A.** *Matematicheskoye modelirovaniye: uchebnoye posobiye* [Mathematical modeling: a training manual]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2014. 116 p. (In Russ.)

8. **Belyaeva N. A.** *Osnovy gidrodinamiki v modelyakh: uchebnoye posobiye* [Fundamentals of hydrodynamics in models: a training manual]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2011. 147 p. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Беляева Надежда Александровна / Nadezhda A. Belyaeva
д.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерных наук / Doctor in Physics and Mathematics, Associate Professor at Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Машин Илья Олегович / Ilya O. Mashin
аспирант / postgraduate student
Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН / Institute of Physics and Mathematics of the Federal Research Center Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
167001, Россия, г. Сыктывкар, ул. Оплеснина, 4 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oplesnina str., 55

Надуткина Анастасия Васильевна / Anastasiya V. Nadutkina
студент-магистрант / graduate student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 02.06.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 11.06.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 11.06.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 519.8
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_15

РАЗРАБОТКА КОМПОНЕНТОВ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРА КИБЕРФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Андрей Семенович Пенин[1], **Никита Олегович Турсуков**[2]
[1]Национальный исследовательский университет ИТМО, [2] СПбГЭТУ «ЛЭТИ», e-mail: [1]gorogtheghost@gmail.com, [2]stepingnik@gmail.com

Аннотация. В ходе исследовательской работы были изучены основные биологические маркеры человеческого организма и отобраны для дальнейших исследований те из них, которые удовлетворяли поставленным требованиям. Была разработана система оценки деятельности сотрудника на основе двунаправленной LSTM-сети, точность распознавания деятельности составила 88 %, значение функции потерь составило 0,504. В дальнейшем система оценки деятельности сотрудника и биологические маркеры будут объединены в модель оценки состояния оператора киберфизической системы.

Ключевые слова: нейросети, LSTM-сети, биомаркеры, модели, системы, состояние

Для цитирования: Пенин А. С., Турсуков Н. О. Разработка компонентов модели оценки состояния оператора киберфизической системы // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 2 (43). С. 32–54. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_32

© Пенин А. С., Турсуков Н. О., 2022.

Informatics

Original article

Development of components of a model for assessing the state of a cyberphysical system operator

Andrey S. Penin, Nikita O. Tursukov
[1]ITMO University, [2] ETU, e-mail: [1]gorogtheghost@gmail.com, [2]stepingnik@gmail.com

Abstract. During the research work, the main biological markers of the human body were studied and those of them that met the requirements were selected for further research. A system for evaluating employee performance based on a bidirectional LSTM network was developed, the accuracy of activity recognition was 88%, the value of the loss function was 0.504. In the future, the employee activity assessment system and biological markers will be combined into a model for assessing the state of the cyberphysical system operator.

Keywords: neural networks, LSTM-networks, biomarkers, models, systems, state

For citation: Penin A. S., Tursukov N. O. Development of components of a model for assessing the state of a cyberphysical system operator. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 32–54. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_32

Введение

Человек был и остается крайне уязвимым элементом любой системы, частью которой он является, будь то с физической или информационной точки зрения. И если раньше информационные технологии позволяли повысить безопасность лишь в цифровом пространстве, современное их развитие дает возможность выйти за его пределы, особенно в ситуациях, когда люди особенно уязвимы, например при работе в условиях Крайнего Севера. Работники удаленных предприятий, работающие вахтовым методом, подвергаются постоянной опасности природного и техногенного характера. С целью обеспечения их личной безопасности и безопасности условий труда, а также для контроля за их деятельностью

возможно использовать носимые устройства (такие, как «умные часы» и пр.), которые способны собирать и анализировать общую информацию о состоянии организма по так называемым «биомаркерам»[1].

Под биомаркерами при этом следует понимать набор биологических признаков, которые в совокупности могут быть использованы для идентификации текущего состояния организма: температуру тела; сатурацию; кровяное давление; пульс и др. Используя собранные с помощью носимых устройств статистические данные, а также современные технологии анализа данных с помощью нейросетей, становится возможным оценить текущие физиологические процессы в организме, спрогнозировать риск появления новых и развития старых заболеваний, а также оценить эффективность лечения текущих заболеваний, определить негативные факторы окружающей среды, сформировать градацию сложности выполняемых на предприятии физических работ. Формирование и поддержание в постоянно актуальном состоянии базы данных о медицинском состоянии работников, работающих в неблагоприятных условиях может помочь в проведении аналитической работы по оценке эффективности решения различных категорий задач различными сотрудниками, влиянии различных категорий задач на медицинское состояние работников и др. Немаловажным будет и возможность раннего выявления различных профессиональных заболеваний.

Таким образом, актуальность данного исследования обусловлена необходимостью поддерживать высокий уровень безопасности работников предприятий, располагающихся в неблагоприятных условиях, и сложностью обеспечения заданного уровня безопасности. Целью настоящего исследования является разработка компонентов модели оценки состояния оператора киберфизической системы. К таким компонентам относится система определения деятельности оператора и набор биомаркеров, удовлетворяющих требованиям по включению в разрабатываемую модель.

Научная новизна проводимого исследования определяется оригинальностью разрабатываемой системы оценки оператора киберфизической системы. Для этой цели была использована специализированная двунаправленная LSTM-сеть. Такая система использует для оценки деятельности данные с гироскопа и акселерометра носимого оператором устройства, что является оригинальным решением. Кроме того, научная новизна состоит в одновременном использовании биомаркеров и системы определения состояния оператора, что позволит значи-

тельно упростить последующую интерпретацию собираемых статистических данных. Теоретическая значимость исследования заключается в том, что собираемые данные могут быть использованы для изучения влияния факторов окружающей среды и медицинских факторов на работников предприятий, расположенных в условиях Крайнего Севера с возможностью последующего тестирования. Практическая значимость исследования состоит в возможности повышения безопасности предприятий путем внедрения разработанной модели.

Теория исследования

В данном разделе будут подробно рассмотрены использованные в ходе разработки биомаркеры состояния оператора, используемые методы их получения, преимущества и недостатки данных методов. Кроме того, в данном разделе будет приведена информация по исходным данным, используемым при построении будущей модели.

Все отобранные маркеры отвечали следующим требованиям:

- показательность изменений значений биомаркера. Под показательностью в данном случае подразумевается прямая зависимость между изменением биомаркера и изменением состояния работника;
- возможность простого считывания биомаркеров средствами носимого устройства;
- экономическая эффективность такого считывания. В данном случае экономически эффективным считается отсутствие необходимости разработки специализированного носимого устройства и использование базового доступного функционала.

В качестве первого маркера в модели используется температура тела оператора. Данный параметр может изменяться под воздействием внешней среды, физических нагрузок, пищи, стресса, умственной работы и т. п. Однако одним из важнейших факторов изменения температуры тела является ответ иммунитета на заболевание. Рассмотрим вопрос изменения температуры подробнее.

Описанные выше причины можно поделить на внешние (возникшие в результате воздействия на человека извне или его деятельности) и внутренние (возникшие в результате процессов внутри человеческого тела). При этом внутренние изменения температуры тела являются бо-

лее четким маркером медицинского состояния оператора, однако однозначная классификация источника изменения температуры тела с помощью носимого устройства является отдельной задачей, не решаемой в рамках текущего исследования. Вместе с тем постоянный контроль температуры операторов позволит заранее определить изменения состояния их здоровья, условий труда или вида деятельности.

Для получения информации о температуре тела с помощью носимого устройства предполагается использование метода с регистрацией инфракрасного (ИК) излучения, на основании интенсивности которого и вычисляется температура тела. Преимуществом данного метода является возможность измерения температуры даже на расстоянии, при этом тепловая инерция ИК-датчиков не превышает аналогичных показателей электронных термометров [2]. Однако у данной технологии существует ряд недостатков, среди которых присутствуют:

- разность излучения у разных материалов;
- высокая (до 0.5 градусов) погрешность при неправильной эксплуатации;
- высокая стоимость в сравнении с традиционными приборами;
- необходимость в частом техосмотре.

На рис. 1 представлен график температуры объекта в зависимости от интенсивности исходящего излучения.

Следующим рассматриваемым маркером является сатурация. Сатурацией называют показатель уровня насыщения крови кислородом, при этом чем выше уровень насыщения, тем выше сатурация. Нормальным считается уровень сатурации от 94 % [3], при этом к причинам, по которым уровень сатурации может измениться, относятся:

- избыточный вес;
- анемическое состояние;
- повышенное артериальное давление;
- дисфункция щитовидной железы;
- болезни сердца;
- нарушение работы системы кровообращения;
- травмы.

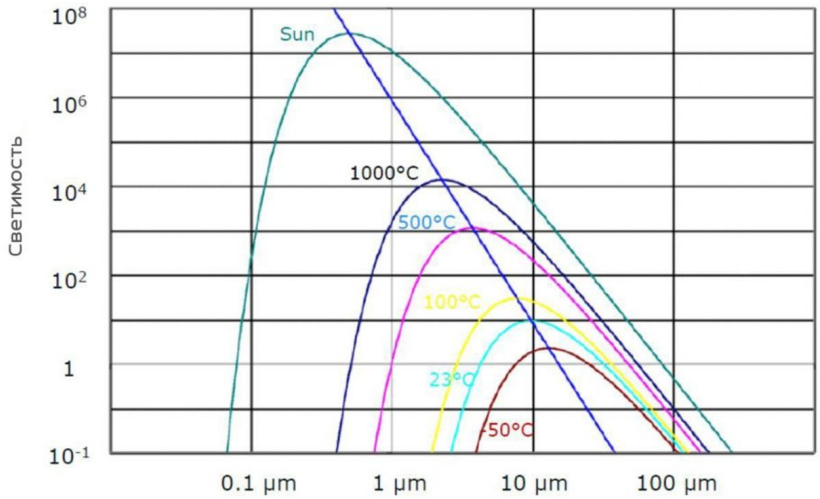

Рис. 1. График температуры объекта в зависимости от исходящего от него ИК излучения

Как видно из перечисленного списка, все рассматриваемые причины так или иначе связаны с ухудшением медицинского состояния работника. Таким образом, изменения сатурации является одним из важнейших маркеров для модели, позволяющим с большей точностью определить разницу между изменениями, возникающими в результате физической нагрузки, и изменениями, являющимися следствиями травм.

Для оценки сатурации используется модифицированная схема стандартного пульсоксиметра, реализованная таким образом, чтобы быть помещенной в носимое устройство. Для этого в корпусе устройства с боков от каждого фотодиода устанавливаются красный и инфракрасный светодиоды, которые испускают свет, отражающийся от кости и улавливаемый фотодиодом. Проходя через сосуды такой свет поглощается гемоглобином, причем молекулы с кислородом и молекулы без кислорода по-разному поглощают волны разной длины. Первые лучше поглощают красный свет, вторые – инфракрасный. Таким образом, для определения уровня насыщения крови кислородом достаточно узнать, сколько инфракрасного и красного света было поглощено гемоглобином. Схема работы такого устройства приведена на рис. 2.

Недостатком такого устройства является его неточность в условиях, когда исследование проводится при ярком свете, если объект, на который установлен датчик, находится в движении, если свет датчиков проходит через отражающие поверхности, если сам пульсоксиметр установ-

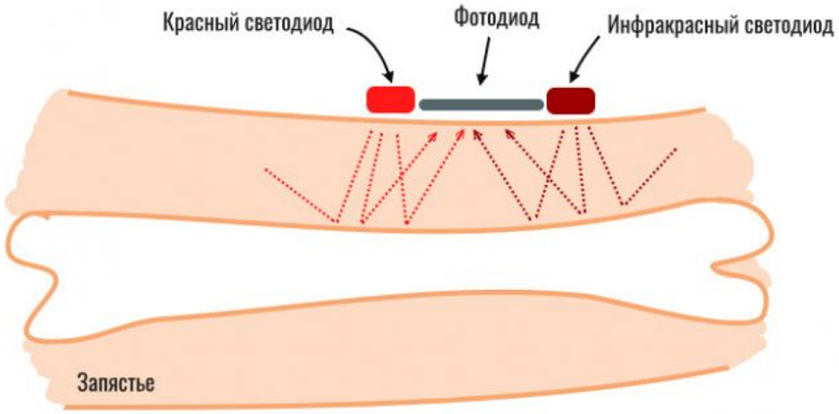

Рис. 2. Схема работы пульсоксиметров, основанных на отраженном свете

лен неправильно. Все эти условия могут встречаться на реальном производстве, что необходимо учесть при обработке данных с устройства. Кроме того, в некоторых чрезвычайных ситуациях показания пульсоксиметра могут быть ложными, например при отравлении угарным газом. Однако, несмотря на это, использование сатурации как одного из определяющих маркеров в совокупности является оправданным.

Ещё одним биомаркером, используемым в разработанной модели, является пульс. Пульс — это толчкообразные колебания стенок артерий, связанные с сердечными циклами. В более широком смысле под пульсом понимается любое изменение в сосудистой системе, связанное с деятельностью сердца. При этом средними нормальными показателями считается частота пульса от 60 до 100 ударов в минуту [4]. Следует отметить, что характеристика артериального пульса (т. е. полученного путем оценки количества сокращений стенок кровеносных сосудов) и характеристика «сердечного» пульса (измеряемого по электрической активности сердца) не совпадают между собой. Они имеют разную физиологическую природу, разную форму временной кривой, разный фазовый сдвиг и, как следствие, требуют разных методов регистрации и обработки. В данном исследовании использовалась характеристика артериального пульса.

При этом следует понимать, что изменения пульса сами по себе не могут быть средствами идентификации состояния носителя. Повышение пульса может быть связано с употреблением кофеин-содержащих продуктов, физической нагрузкой, применением некоторых препаратов, заболеваниями сердечно сосудистой системы, болезнями эндокринной

системы. К понижению пульса, в свою очередь, может привести прием медицинских препаратов, ряд инфекционных заболеваний, вегетативная патология нервной системы и др. Таким образом, данные по пульсу несут в себе в первую очередь уточняющий характер по отношению к остальным, а сам пульс является вспомогательной характеристикой.

Для измерения пульса в носимых устройствах используется оптический метод (фотоплетизмография). В нем сужение и расширение сосудов под действием артериальной пульсации вызывает соответствующие изменения амплитуды сигнала, получаемого фотоприемником. При этом важную роль играет длина волны сигнала. На сигналы с разной длиной по-разному влияют различные артефакты, такие как: движение, индивидуальные свойства кожи, толщина подкожного слоя жира и прочее. На рис. 3 представлена кривая поглощения света гемоглобином и основные спектры излучения фотоплетизмографических датчиков.

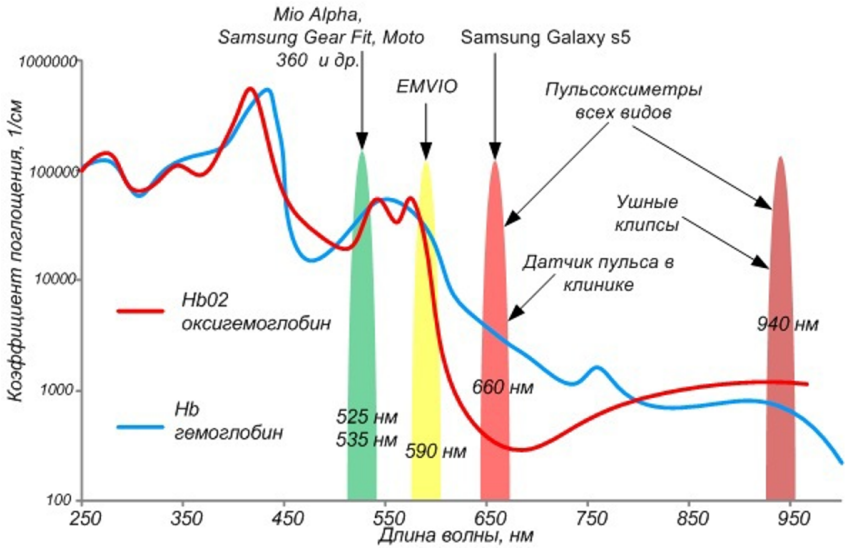

Рис. 3. Кривая поглощения света гемоглобином с указанием основных используемых спектров излучения фотоплетизмографических датчиков и устройств, в которых они применяются

Как видно из рисунка, оптимальными для решения задачи определения пульса являются значения длины волны в промежутке 500–600 нм. При этом чаще всего в современных носимых устройствах используются длины волны 525–535 нм (зеленый свет).

Последним из использованных в разработке биомаркеров стало давление. Кровяное давление – это то давление, которое кровь оказывает

на стенки сосудов. Данный маркер является параметром, характеризующим работу кровеносной системы, и определяется объемом крови, перекачиваемым за единицу времени сердцем, и сопротивлением сосудистого русла. В данной исследовательской работе под давлением подразумевается артериальное давление, формирующееся из пары значений: систолического давления (давления в момент сжатия сердца) и диастолического давления (давления в момент расслабления сердца). Давление может меняться вследствие смены времени суток, погоды, психологического состояния человека, приема препаратов или медикаментов, питания, физических нагрузок [5]. С его помощью удобно определять общую нагрузку на организм во время проведения работ и ответ организма на эту нагрузку. Таким образом, открывается возможность для формирования оптимальных условий труда.

Существует несколько методик по оценке давления с помощью носимых устройств, ниже приведем три наиболее распространённые:

- комбинирование с ЭКГ датчиком. Данная методика позволяет получить достаточно точный результат. Однако она сложна в реализации из-за необходимости наличия ЭКГ устройства;
- осциллометрический метод, применяемый также в медицинских тонометрах. Является наиболее точным из отобранных, однако в то же время наиболее трудных в реализации;
- расчет на основании данных с пульсометра и внесенных пользователем данных о росте, весе, возрасте, поле и т. д. Результаты, полученные таким образом, наименее точны и эффективны, но при этом такой вариант является самым простым в реализации и доступным. Используемые при разработке модели данные были получены именно таким образом.

Кроме непосредственно биологических маркеров были также задействованы маркеры деятельности человека. Для того чтобы определить, выполняет ли работник какую-то работу, были использованы показания встроенных в системы гироскопа и акселератора. Носимые устройства при этом размещались в браслетах на правой и левой руках испытуемого, что позволило получить данные о перемещении и повороте в пространстве обеих рук. Задачей такой классификации является определение действий, выполняемых человеком, таких как бег, ходьба, ручной

труд и т. д. В рамках исследовательской работы классификатор должен был определять в данных временные участки, на которых велись сварочные работы. Таким образом, категориями классификации были: «покой» и «сварка». При этом сварочные работы были выбраны потому, что имеют характерный паттерн движений, что упрощает работу по их распознаванию.

Полученные данные нуждались в очистке от шумов и выбросов. Для определения лучшей методики фильтрации была проведена проверка трех различных методик, включающих:

- фильтр нижних частот [6];
- медианный фильтр [7];
- фильтр Калмана [8].

В качестве отрезка данных, на котором будет проводиться визуализация результатов фильтрации, был выбран временной промежуток, в котором, согласно предоставленной разметке, проводилась сварка. На рис. 4 представлены в виде графика начальные данные. На графике прямая линия представляет собой периоды бездействия, выбросы на графике – периоды сварки.

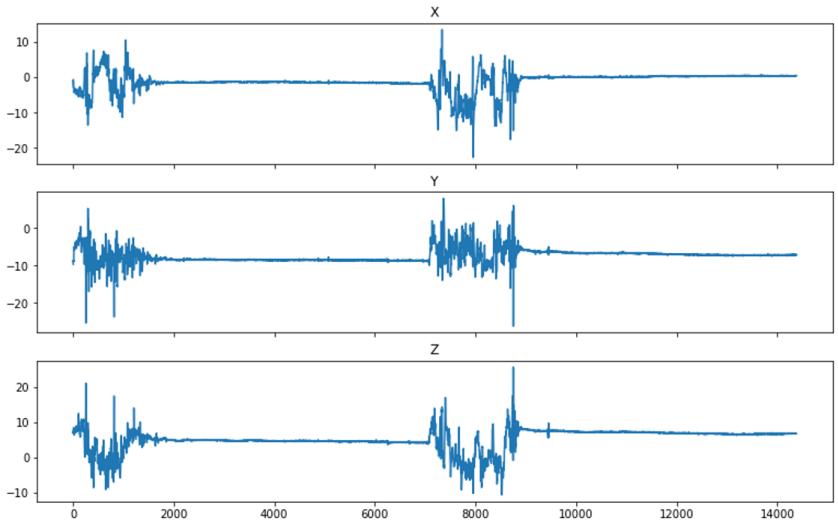

Рис. 4. Исходные данные, использованные для определения используемой методики фильтрации

Результаты работы фильтров можно увидеть на рис. 5, 6, 7. На этих рисунках соответственно представлены сравнения оригинальных дан-

ных и результатов работы фильтра нижних частот, медианного фильтра, фильтра Калмана.

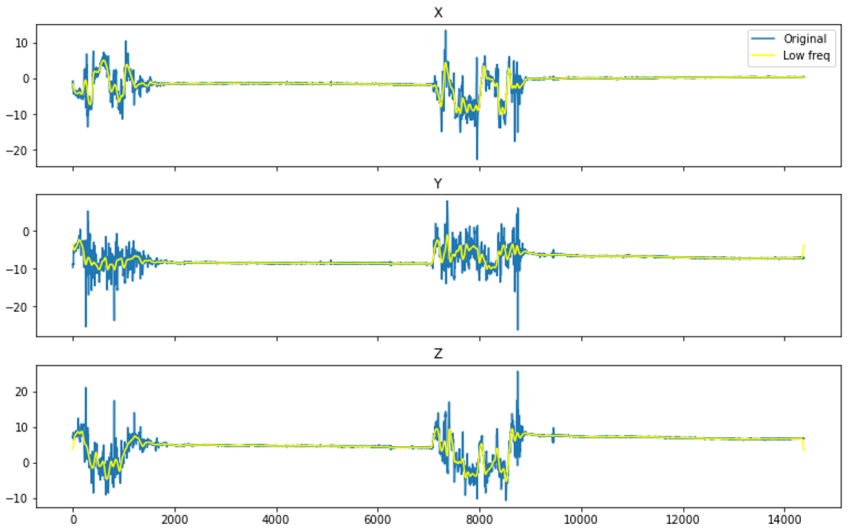

Рис. 5. Данные, полученные в результате использования фильтра низких частот, в сравнении с начальными данными

По полученным графикам можно сделать следующие выводы.

Фильтр нижних частот устранил точечные выбросы и низкочастотный шум, однако при этом была в значительной степени потеряна амплитуда изменений показаний, что в результате скажется на точности интерпретации данных.

Медианный фильтр усреднил показания датчиков на временной линии, при этом оставив видимыми основные точки с перепадами значений, однако амплитуда изменений показаний также была значительно изменена.

Фильтр Калмана показал наиболее точный результат, убрав большую часть низкочастотных шумов и устранив резкие точечные выбросы на временной линии, сохранив при этом амплитуду изменений показаний. Полученные с его помощью данные были максимально приближены к исходным, что должно положительно сказаться на точности работы классификатора. По этой причине был выбран именно этот метод фильтрации.

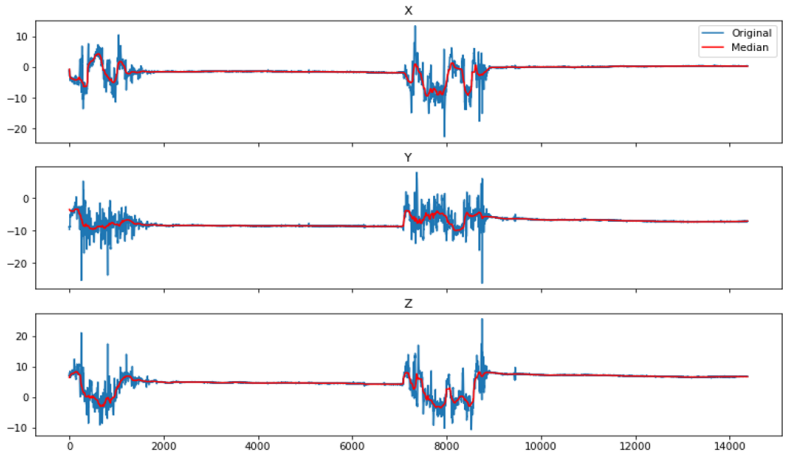

Рис. 6. Данные, полученные в результате использования медианного фильтра, в сравнении с начальными данными

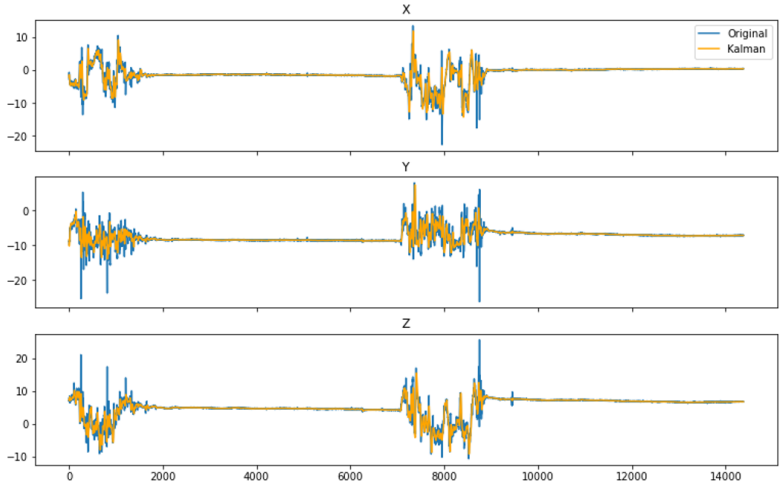

Рис. 7. Данные, полученные в результате использования фильтра Калмана, в сравнении с начальными данными

После обработки данные необходимо классифицировать. Для этого было принято решение об использовании рекуррентных нейронных сетей. Основанием для этого послужил ряд уже проведенных исследовательских работ, таких как «Всестороннее исследование распознавания активности с использованием акселерометров» (анг. A Comprehensive Study of Activity Recognition Using Accelerometers), где проводился анализ методов распознавания активности человека. Особое внимание в работе уделено сетям с долгой краткосрочной памятью (анг. Long short-

term memory, LSTM [9]) и сравнению их со сверточными сетями на примере трех различных наборов данных. При этом LSTM-сеть продемонстрировала большую точность и качество распознавания активности [10]. К схожим результатам пришли исследователи в работе «Использование LSTM-сетей для обработки данных акселерометра» (анг. Using LSTM Neural Network to Process Accelerometer DATA), где было выявлено, что LSTM-сети имеют высокую сбоеустойчивость при решении задачи распознавания данных акселерометра и способны демонстрировать точность до 90 % [11].

Кроме характеристик точности и сбоеустойчивости были также учтены возможности распознавания не только набора характерных движений, которые могут широко использоваться в работе, но и более общих, не специфических движений, выполняемых носителем акселерометра. Для этого возможно применение более специализированных LSTM-сетей, например двунаправленной LSTM-сети. В исследовании «Распознавание человеческой активности на основе датчиков с использованием двунаправленной LSTM-сети для тесно связанных движений» (анг. Sensor Based Human Activity Recognition Using Bidirectional LSTM for Closely Related Activities) было проведено сравнение использования для таких задач стандартной LSTM-сети и её специализированной, двунаправленной версии, и специализированная версия продемонстрировала большую точность распознавания, достигающую 98 % [12]. Схожие [13] результаты были достигнуты и в других исследованиях.

Таким образом, на основании приведенных работ было принято решение об использовании в исследовании именно LSTM-сети для обработки данных акселерометра. В качестве функции потерь было принято решение об использовании «categorical_crossentropy», наиболее подходящей для задачи классификации [14]. Для первичной модели использовалась модифицированная LSTM-модель, включающая двунаправленный слой. Обучение происходило в течение пяти эпох, размер одного «пакета» данных составлял 64 записи, в качестве набора данных валидации было использовано 10 % предварительно перемешанных данных. Данные были размечены идеально, результатом работы первичной модели стало значение функции потерь 0,3593, точность работы модели составила 0,8657. На рис. 8 представлена матрица ошибок (англ. Confusion Matrix[15]) первичной модели. Как можно видеть из рисунка, сеть с высокой точностью различает состояние бега и перемещения пешком.

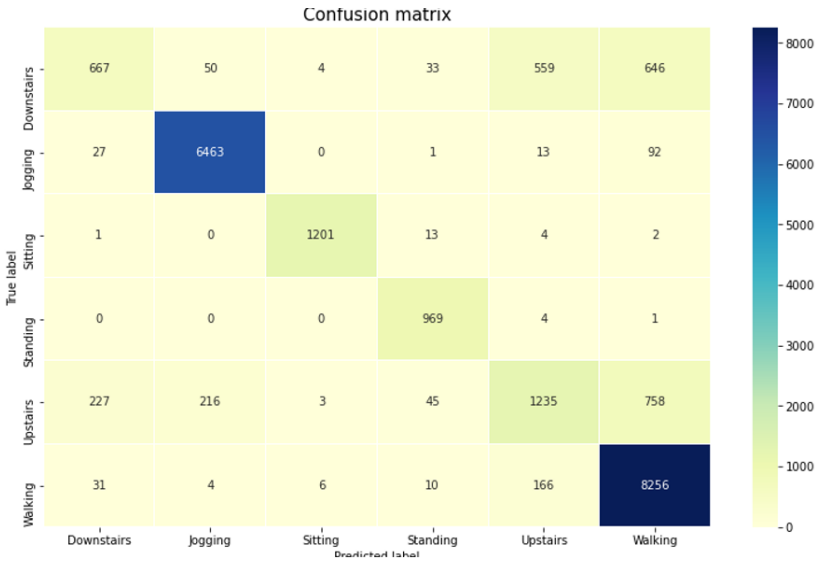

Рис. 8. Матрица ошибок первичной модели

С помощью рекуррентной нейронной сети в данных было обнаружено несколько интервалов, классифицированных как «сварка». При этом размеченные вручную интервалы данных классифицированы не были. На рис. 9 представлены такие интервалы.

Далее была обучена нейронная LSTM-сеть с теми же параметрами, но другими входными данными. Входными предикторами модели служили:

- X,Y,Z – координаты гироскопа правой руки;
- X,Y,Z – координаты гироскопа левой руки;
- X,Y,Z – координаты акселерометра правой руки;
- X,Y,Z – координаты акселерометра левой руки.

Объем входных данных составил 1393900 записей. На них были размечены участки, где велась сварка. Всего таких участков было 5, все они имели произвольную длину.

Результаты обучения модели показаны на рис. 10.

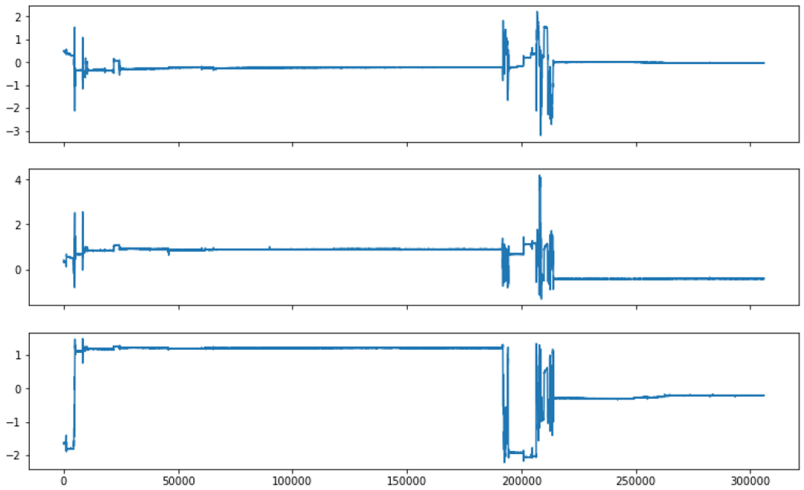

Рис. 9. Примеры интервалов, обнаруженных с помощью рекуррентной сети

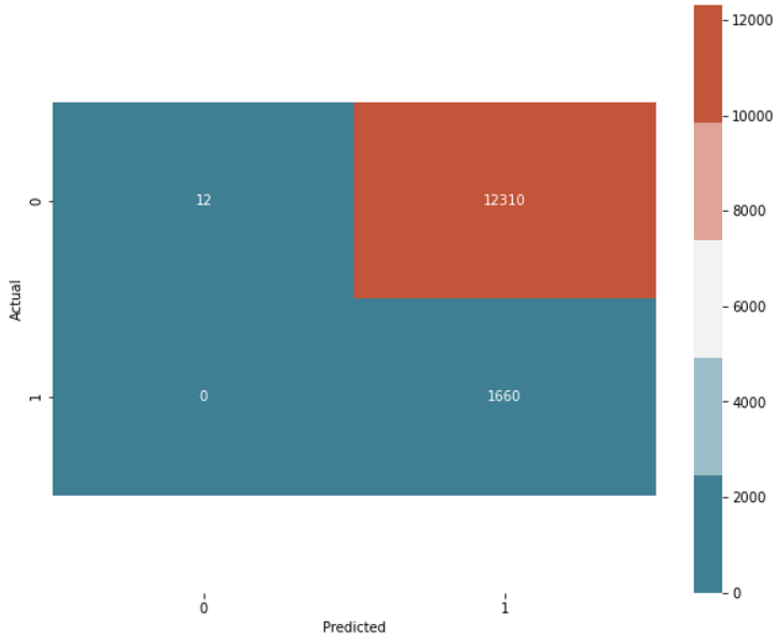

Рис. 10. Матрица ошибок обученной модели

Как видно из рисунка, модель переобучилась, выявив сварку на каждом отрезке. На рис. 11 и 12 представлены графики изменения точности и потерь модели.

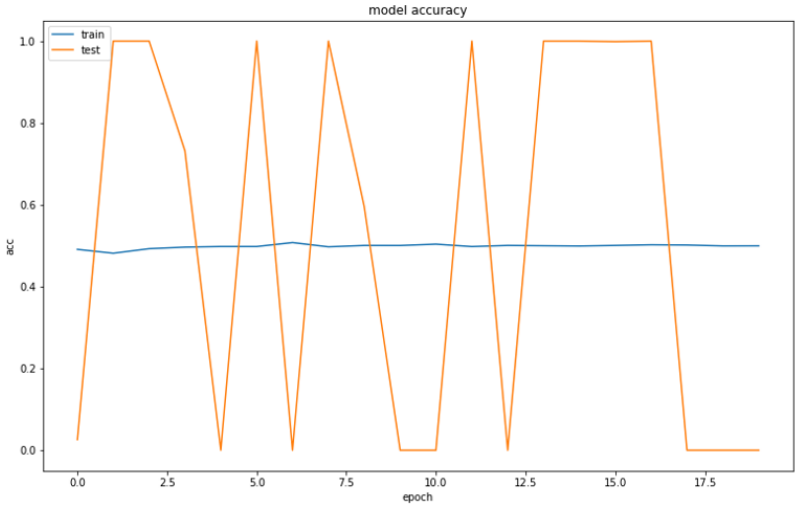

Рис. 11. График изменения значения точности модели

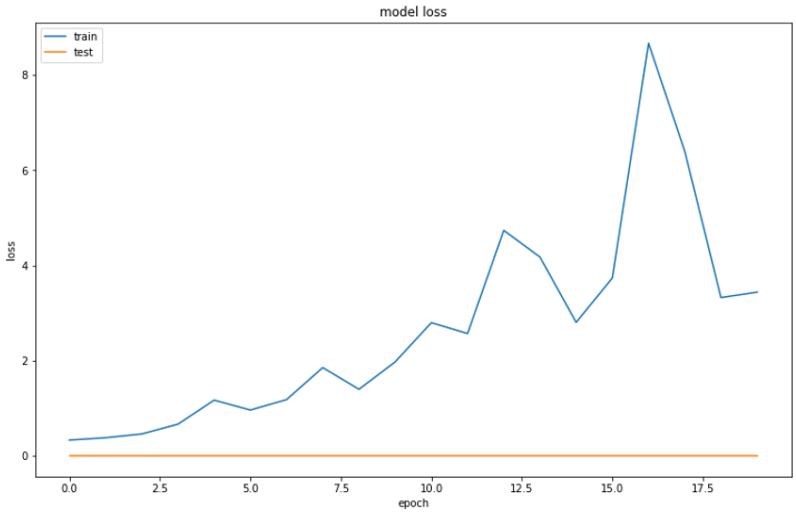

Рис. 12. График изменения значения функции потерь модели

Графики отчётливо демонстрируют, что переобучение модели началось с самых ранних эпох, что возможно из-за слишком большого числа предикторов [16]. В связи с этим было принято решение о реализации обучения с такими параметрами, чтобы переобучения было невозможно, а также о корректировке количества входных данных, влияющих на модель. Как показали дальнейшие исследования, в изменении этого параметра необходимость отсутствовала. Кроме того, в ходе исследования было выявлено негативное влияние количества эпох на результаты обучения: при приближении к 20 эпохам значительно падал параметр

val_loss, демонстрирующий качество работы модели на неизученных данных. Подобное поведение характерно при оверфиттинге модели, потому для получения лучших результатов было принято решение о снижении количества эпох обучения. Дальнейшие исследования показали, что оптимальным является использование 10 эпох.

Результатом тестирования различных значений параметров обучения и количества входных данных стала модель со следующими характеристиками: шаг модели 100, длина отрезка 500 значений, количество эпох обучения 10. Входными предикторами модели служили координаты гироскопа и акселерометра правой и левой рук. Результат работы модели представлен на рис. 13.

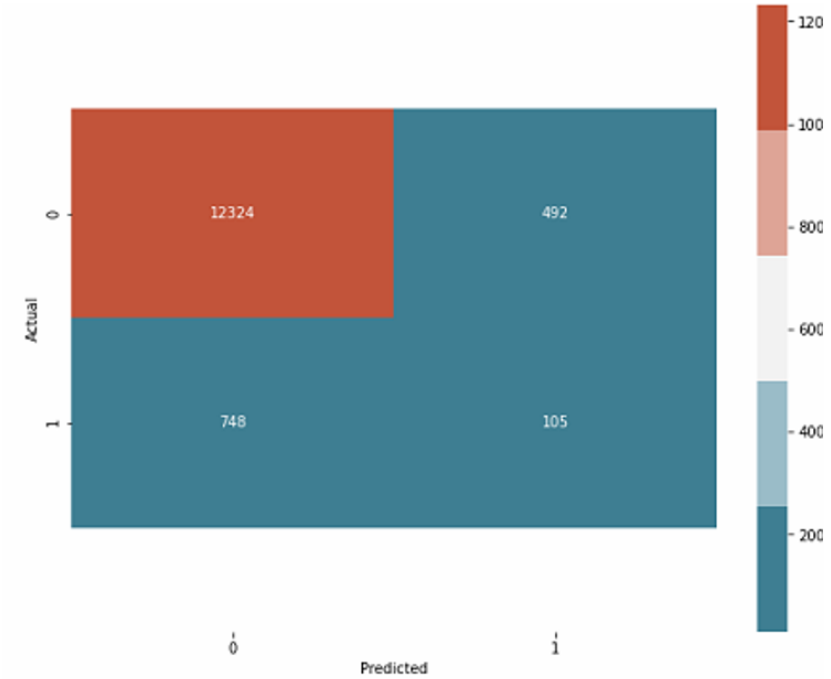

Рис. 13. Матрица ошибок итоговой модели

Данная модель показала точность оценки 0.8801, значение потерь составило 0,504. На рис. 14 представлен пример обнаруженного отрезка.

Как видно из рисунка, сеть определяет продолжительные участки без высоких колебаний. Данный паттерн движений характерен при деятельности, связанной со сваркой. Было принято решение оставить полученную модель в качестве финальной.

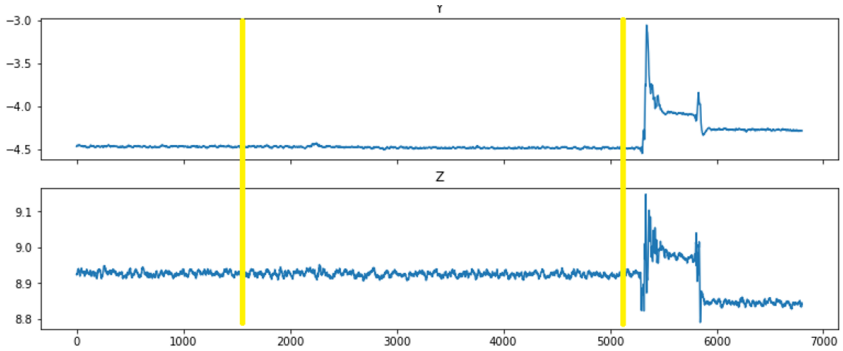

Рис. 14. Пример обнаруженного отрезка, относящегося к периоду времени, когда работник занимался сваркой

Результаты

Результатом данного исследования стало создание специальной двунаправленной LSTM-сети, предназначенной для определения деятельности оператора при сварке на основании данных с носимых устройств-браслетов со встроенными акселерометрами и гироскопами. Значимость полученного результата состоит в том, что полученная нейросеть позволит в дальнейшем выявлять периоды активности работника на предприятии, соотносить эти данные с биомаркерами и на основании этого проводить точную интерпретацию полученных результатов.

Заключение

В ходе проведения исследования были изучены различные биомаркеры и отобраны те из них, которые удовлетворяют требованиям, выставляемым целями исследования. Итоговыми биомаркерами стали: температура тела, сатурация, пульс, артериальное давление. В качестве маркеров деятельности были использованы показания акселерометра и гироскопа, расположенных в браслетах на правой и левой руках работника. Теоретическая значимость данного исследования заключается в формировании возможности изучения влияния окружающей и рабочей среды на сотрудников предприятия в условиях вредоносного производства. Собираемые с помощью носимых устройств статистические данные будут иметь меньшую точность, чем те, которые были получены в результате специальных обследований, однако они будут собираться в течение большего периода времени и охватывать различные виды деятельности сотрудников предприятия. В будущем будут проводиться дальнейшие исследования на данную тематику. Практическая значимость состоит в формировании набора требований к оборудованию,

достаточному для получения приемлемой информации о медицинском состоянии работников предприятия.

Была разработана система оценки деятельности работника на базе двунаправленной LSTM-сети. Данная система позволяет с высокой точностью (88 %) определить периоды, когда работник занимается сваркой, а когда иной деятельностью. Практическая значимость данного исследования состоит в потенциальной возможности контроля деятельности работников предприятия.

Дальнейшие исследования будут направлены на объединение разработанной системы оценки деятельности работника и системы считывания биомаркеров в единую информационную модель оценки состояния оператора киберфизической системы. Такая модель позволит использовать технологии искусственного интеллекта для определения медицинского состояния работника на удаленном предприятии, учитывая при этом факторы окружающей среды и его непосредственной деятельности. Таким образом, информационные технологии позволят добиться улучшения качества жизни операторов и повышения их безопасности при работе даже в самых неблагоприятных условиях.

Список источников

1. Биомаркеры – индикаторы состояния здоровья [Электронный ресурс]. URL: https://medinteres.ru/interesnyie-faktyi/biomarkeryi.html (дата обращения: 28.03.2022).

2. Тепловая инерция температурных датчиков [Электронный ресурс]. URL: https://isup.ru/articles/16/15436/ (дата обращения: 28.03.2022).

3. О сатурации кислорода в крови [Электронный ресурс]. URL: https://aptstore.ru/articles/saturatsiya-kisloroda-v-krovi/ (дата обращения: 28.03.2022).

4. Пульсовое давление в крови [Электронный ресурс]. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/pulsovoe-davlenie-krovi-rol-v-gemodinamike-i-prikladnye-vozmozhnosti-v-funktsionalnoy-diagnostike (дата обращения: 28.03.2022).

5. Повышенное давление: причины и особенности лечения [Электронный ресурс]. URL: https://aptstore.ru/articles/povyshennoe-davlenie-prichiny-i-osobennosti-lecheniya/ (дата обращения: 28.03.2022).

6. Фильтры высоких и низких частот [Электронный ресурс]. URL: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/36102/1/978-5-7996-1577-2_2015.pdf (дата обращения: 28.03.2022).

7. Медианная фильтрация [Электронный ресурс]. URL: https://ru.bmstu.wiki/Медианная_фильтрация (дата обращения: 28.03.2022).

8. Фильтр Калмана [Электронный ресурс]. URL: https://habr.com/ru/post/166693/ (дата обращения: 28.03.2022).

9. A Guide to RNN: Understanding Recurrent Neural Networks and LSTM Networks [Электронный ресурс]. URL: https://builtin.com/data-science/recurrent-neural-networks-and-lstm (дата обращения: 28.03.2022).

10. **Niall Twomey, Tom Diethe, Xenofon Fafoutis, Atis Elsts, Ryan McConville, Peter Flach and Ian Craddock**. A Comprehensive Study of Activity Recognition Using Accelerometers. URL: https://www.researchgate.net/publication/323847517_A_Comprehensive_Study_of_Activity_Recognition_Using_Accelerometers - March 2018 - doi: 10.20944/preprints201803.0147.v1

11. **Ivan Ozhiganov**. Using LSTM Neural Network to Process Accelerometer Data. URL: https://dzone.com/articles/using-lstm-neural-network-to-process-accelerometer - 08.05.2017

12. **Arumugam Thendramil Pavai**. Sensor Based Human Activity Recognition Using Bidirectional LSTM for Closely Related Activities / California State University, San-Bernardino, Electronic Theses Projects and Dissertations - 776 – 12.2018

13. **Matthew Chin Heng Chua, Youheng Ou Yang, Hui Xing Tan, Nway Nway Aung, Jing Tian**. Time Series classification using a modified LSTM approach from accelerometer-based data: A comparative study for gait cycle detection // *Gait & Posture 74* – 09.2019 – doi: 10.1016/j.gaitpost.2019.09.007

14. Categorical crossentropy loss function [Электронный ресурс]. URL: https://peltarion.com/knowledge-center/documentation/modeling-view/build-an-ai-model/loss-functions/categorical-crossentropy (дата обращения: 28.03.2022).

15. Confusion Matrix [Электронный ресурс]. URL: https://devopedia.org/confusion-matrix (дата обращения: 28.03.2022).

16. Переобучение [Электронный ресурс]. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Переобучение (дата обращения: 28.03.2022).

References

1. *Biomarkery – indikatory sostoyaniya zdorovya* [Biomarkers – health indicators] [Online]. Available at: https://medinteres.ru/interesnyie-faktyi/biomarkeryi.html (accessed: 28.03.2022).

2. *Teplovaya inerciya temperaturnyx datchikov* [Thermal inertia of temperature sensors] [Online]. Available at: https://isup.ru/articles/16/15436/ (accessed: 28.03.2022).

3. *O saturacii kisloroda v krovi* [About blood oxygen saturation] [Online]. Available at: https://aptstore.ru/articles/saturatsiya-kisloroda-v-krovi/ (accessed: 28.03.2022).

4. *Pulsovoe davlenie v krovi* [Pulse pressure in the blood] [Online]. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/pulsovoe-davlenie-krovi-rol-v-gemodinamike-i-prikladnye-vozmozhnosti-v-funktsionalnoy-diagnostike (accessed: 28.03.2022).

5. *Povyshennoe davlenie: prichiny i osobennosti lecheniya* [High blood pressure: causes and peculiarities of treatment] [Online]. Available at: https://aptstore.ru/articles/povyshennoe-davlenie-prichiny-i-osobennosti-lecheniya/ (accessed: 28.03.2022).

6. *Filtry vysokix i nizkix chastot* [High-pass and low-pass filters] [Online]. Available at: https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/36102/1/978-5-7996-1577-2_2015.pdf (accessed: 28.03.2022).

7. *Mediannaya filtraciya* [Median filtering] [Online]. Available at: https://ru.bmstu.wiki/Медианная_фильтрация (accessed: 28.03.2022).

8. *Filtr Kalmana* [Kalman filter] [Online]. Available at: https://habr.com/ru/post/166693/ (accessed: 28.03.2022).

9. *A Guide to RNN: Understanding Recurrent Neural Networks and LSTM Networks* [Электронный ресурс]. URL: https://builtin.com/data-science/recurrent-neural-networks-and-lstm (дата обращения: 28.03.2022).

10. **Niall Twomey, Tom Diethe, Xenofon Fafoutis, Atis Elsts, Ryan McConville, Peter Flach and Ian Craddock**. *A Comprehensive Study of Activity Recognition Using Accelerometers.* URL: https://www.researchgate.net/publication/323847517_A_Comprehensive_Study_of_Activity_Recognition_Using_Accelerometers - March 2018 - doi: 10.20944/preprints201803.0147.v1

11. **Ivan Ozhiganov**. *Using LSTM Neural Network to Process Accelerometer Data.* URL: https://dzone.com/articles/using-lstm-neural-network-to-process-accelerometer - 08.05.2017

12. **Arumugam Thendramil Pavai**. *Sensor Based Human Activity Recognition Using Bidirectional LSTM for Closely Related Activities.* California State University, San-Bernardino, Electronic Theses Projects and Dissertations - 776 – 12.2018

13. **Matthew Chin Heng Chua, Youheng Ou Yang, Hui Xing Tan, Nway Nway Aung, Jing Tian**. *Time Series classification using a modified LSTM approach from accelerometer-based data: A comparative study for gait cycle detection. Gait & Posture 74* – 09.2019 – doi: 10.1016/j.gaitpost.2019.09.007

14. *Categorical crossentropy loss function* [Online]. Available at: https://peltarion.com/knowledge-center/documentation/modeling-view/build-an-ai-model/loss-functions/categorical-crossentropy (accessed: 28.03.2022).

15. *Confusion Matrix* [Online]. Available at: https://devopedia.org/confusion-matrix (accessed: 28.03.2022).

16. *Pereobuchenie* [Retraining] [Online]. Available at: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Переобучение (accessed: 28.03.2022).

Сведения об авторах / Information about authors
Андрей Семенович Пенин / Andrey S. Penin
Студент-магистр / Graduate student
ВФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО», Санкт-Петербург, Российская Федерация / ITMO University
125993, Россия, Москва, улица Тверская, дом 11 / 125993, Russia, Moscow, Tverskaya Street, 11

Никита Олегович Турсуков / Nikita O. Tursukov
Программист / Programmer
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Российская Федерация / Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»
197022, Россия, Санкт-Петербург, улица Профессора Попова, дом 5, литера Ф / 197022, Russia, St. Petersburg, Professor Popova Street, 5, lit. F

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 05.04.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 26.04.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 26.04.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Научная статья

УДК 37.026.6
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_55

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА ШКОЛЬНИКОВ К МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОБУЧАЮЩИХ ИГР

Николай Иванович Попов, Евгения Андреевна Канева
Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина

Аннотация. В настоящее время в связи с эффективным развитием информационно-коммуникационных технологий глобальные изменения затрагивают все сферы жизнедеятельности человека, в том числе и образовательный процесс в школе. Перед педагогами возникает проблема комбинирования традиционных методов и средств обучения с инновационными для повышения эффективности и качества учебно-воспитательного процесса. Поскольку в условиях большого потока информации учащимся трудно удерживать свое внимание на одном объекте изучения, учителям необходимо применять в своей работе современные технологии для повышения мотивации и интереса школьников к учебному предмету. Одной из таких образовательных технологий являются обучающие компьютерные игры.

В работе кратко описаны две компьютерные обучающие игры по математике, разработанные одним из авторов статьи и предназначенные для формирования познавательного интереса школьников к учебной дисциплине. Первая игра посвящена теме «Квадратные уравнения» и имеет своей целью закрепление умений и

© Попов Н. И., Канева Е. А., 2022.

навыков решения учащимися восьмых классов квадратных уравнений разного типа. Вторая игра, спроектированная для учащихся 10–11 классов средней школы, разработана на основе учебного материала по тригонометрии и предназначена для закрепления знаний, умений и навыков школьников при выполнении заданий с использованием тригонометрического круга.

Ключевые слова: компьютерные обучающие игры, обучение математике, игровые технологии

Для цитирования: Попов Н. И., Канева Е. А. Формирование познавательного интереса школьников к математике с использованием компьютерных обучающих игр // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 2 (43). С. 55–66. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_55

Applied mathematics and mechanics

Original article

Forming schoolchildren's cognitive interest in mathematics using computer educational games

Nikolay I. Popov, Evgeniya A. Kaneva
Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, vecht@mail.ru

Annotation. At present, due to the effective development of information and communication technologies, global changes affect all spheres of human life, including the educational process at school. Teachers face the problem of combining traditional methods and teaching aids with innovative ones to improve the efficiency and quality of the educational process. Since it is difficult for students to keep their attention on one object of study in the conditions of a large flow of information, teachers need to use modern technologies in their work to increase the motivation and interest of students in the subject. One of such educational technologies is educational computer games.

The paper briefly describes two computer educational games in mathematics, developed by one of the authors of the article and designed to form the cognitive interest of schoolchildren in the academic discipline. The first game is devoted to the topic "Quadricular Equations" and aims to consolidate the skills and

abilities of 8th grade students to solve quadratic equations of various types. The second game, designed for students in grades 10-11 of secondary school, was developed on the basis of educational material on trigonometry and is designed to consolidate the knowledge, skills and abilities of schoolchildren when performing tasks using a trigonometric circle.

Keywords: computer learning games, teaching mathematics, game technologies

For citation: Popov N. I., Kaneva E. A. Forming schoolchildren's cognitive interest in mathematics using computer educational games. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 55–66. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_55

Одной из важных задач системы образования является переход от традиционного обучения, ориентированного в основном на репродуктивное мышление, к интерактивному обучению, направленному на развитие творческого и инновационного мышления студентов и школьников при формировании необходимой базы знаний [1].

В эпоху стремительного развития информационно-коммуникационных технологий педагогам всё труднее преподносить учебный материал обучающимся так, чтобы он был в достаточной мере воспринят каждым школьником, поскольку современному поколению детей в потоке большого объема информации сложно удерживать свое внимание на каком-либо одном объекте или процессе. В связи с этим целесообразно развивать познавательный интерес школьников к учебному предмету, стимулировать активность учащихся, желание учиться, узнавать что-то новое, стать образованным [2].

Одним из средств повышения эффективности обучения являются компьютерные обучающие игры [3]. В работах зарубежных исследователей акцентируется внимание на использовании различных видеоигр [4], разработке платформы геймификации курса, создании игр для осведомленности в области кибербезопасности, а также особо выделяется программирование через игру [5]. Исследователи отмечают, что игра повышает мотивацию обучающихся, расширяет их кругозор в области знания основ мировой культуры, развивает эрудицию и критическое мышление.

В программе Smile Game Builder по теме «Квадратные уравнения» одним из авторов статьи была создана компьютерная игра «В поисках Святослава» (рис. 1), используемая для закрепления теоретических знаний учащихся с помощью обучающих упражнений [6]. Предложенная школьникам идея игры заключается в том, что главному герою по имени Ратибор необходимо освободить своего лучшего друга Святослава, похищенного неизвестными людьми. В ходе игры герой общается с разными персонажами, которые просят его помочь своему другу, решая квадратные уравнения (рис. 2). Каждое правильное решение уравне-

Рис. 1. Начальная страница компьютерной игры «В поисках Святослава»

ния приносит обучаемому подсказку (определенную букву). В случае неверного ответа игрок может воспользоваться следующими попытками и попробовать решить подобное уравнение. В процессе всей игры игрок должен найти 7 подсказок (7 букв) и, сложив их в правильном порядке, составить слово «Колодец». Прибыв на указанное место, после нажатия игроком на клавишу ENTER герой освобождает своего друга Святослава от злых похитителей (рис. 3). При разработке игры используются глобальные переменные (например, Quest1, Quest2) и локальная переменная (Local Switch) логического типа. Все переменные в начале игры имеют ложное значение. Глобальная переменная Quest1 будет иметь истинное значение после того, как Ратибор узнает от мамы Святослава задание, которое необходимо выполнить для спасения

Рис. 2. Фрагмент обучающей игры

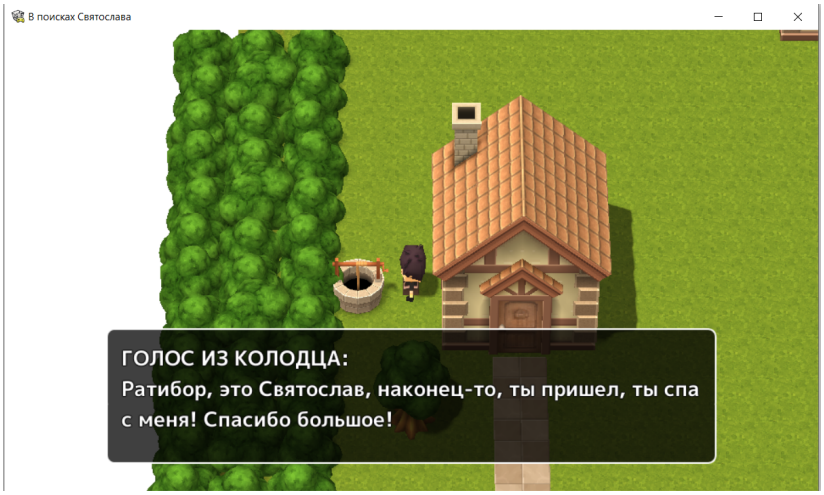

Рис. 3. Эпизод спасения Святослава

друга. При каждом взаимодействии героя с каким-либо другим персонажем выполняется проверка истинного значения глобальной переменной Quest1. Если данная переменная принимает значение True, то персонажи просят героя о помощи и предоставляют в случае верного ответа подсказку. Если же Quest1 имеет ложное значение, то появляется, например, следующее сообщение: «ТИМОФЕЙ: Ратибор, я думаю, тебе стоит проведать маму Святослава. . . », или вообще не происходит взаимодействия между персонажем и героем.

В случае если игровой герой правильно ответил на вопрос, глобальная переменная, например, Quest3 принимает значение True, в противном случае локальная переменная принимает значение True. Если герой подходит к персонажу повторно после того, как он уже ответил правильно в предыдущий раз, то срабатывает истинное значение глобальной переменной (Quest3) и появляется, например, следующее сообщение: «ТИМОФЕЙ: Ратибор, увы, я больше ничем не могу тебе помочь...» Если герой подходит к персонажу повторно после неверного ответа, то срабатывает истинное значение локальной переменной и герою предоставляется следующая попытка: «ТИМОФЕЙ: Ратибор, я думаю, тебе стоит снова попробовать решить уравнение: $x^2+9+x = 7x$».

Smile Game Builder не требует владения языками программирования, достаточно знать базовые алгоритмические структуры и интерфейс программы, на основе которых строится взаимодействие персонажей (рис. 4). В программе AXMA Story Maker по разделу триго-

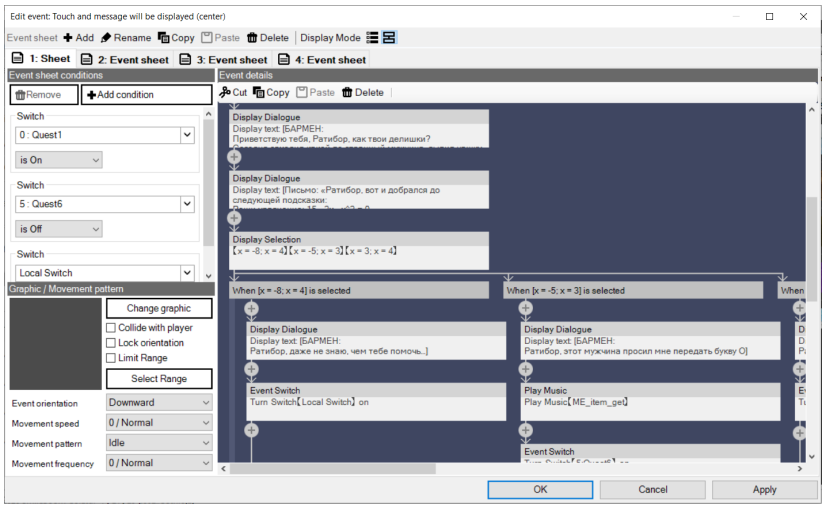

Рис. 4. Фрагмент проектирования взаимодействия героя с персонажем

нометрии была разработана компьютерная игра «Мир математики», предназначенная для закрепления умений и навыков работы с тригонометрическим кругом у обучающихся 10–11 классов. В предложенной игре фантастический персонаж Гарри Поттер просит помочь правильно выполнить задания по тригонометрии, чтобы стать настоящим волшебником (рис. 5). В компьютерной игре, разработанной одним из авторов статьи, предлагается выполнить семь упражнений. В первых двух заданиях необходимо на числовой окружности найти точку, соответству-

Рис. 5. Фрагмент игры «Мир математики»

ющую заданному числу, и выбрать ее из выпадающего списка. В следующих трех заданиях требуется определить число, которому на окружности соответствует точка с заданными координатами, и выбрать правильный ответ из предложенных (рис. 6). В последних двух заданиях

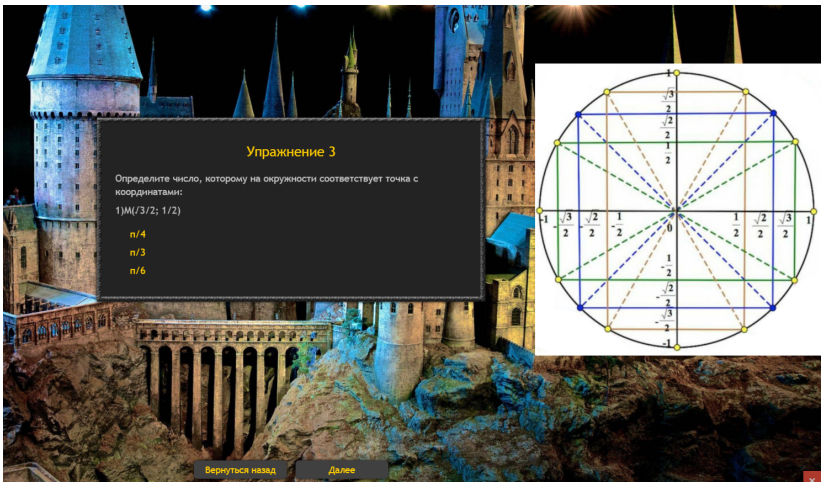

Рис. 6. Упражнение с выбором ответа

требуется найти на числовой окружности точку с заданной координатой и ввести в специальное поле ответ на вопрос, какому наименьшему положительному (отрицательному) числу она соответствует (рис. 7).

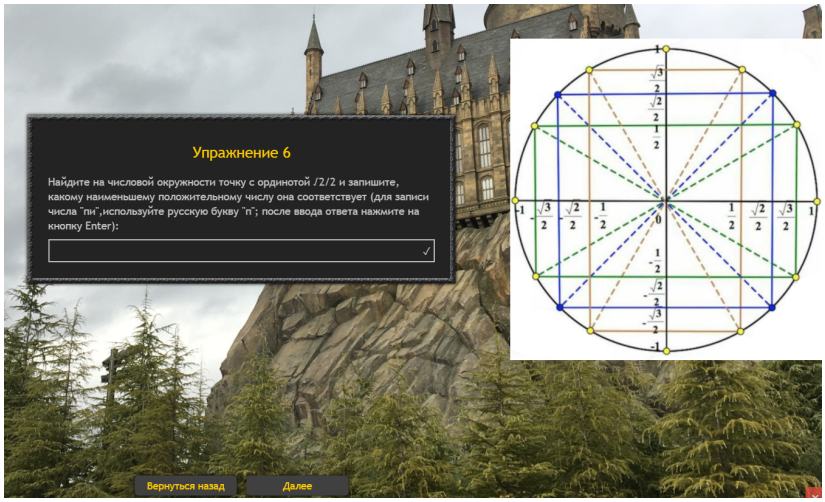

Рис. 7. Упражнение с вводом ответа

После выполнения всех заданий учащимся предлагается проверить свои ответы и узнать результаты, нажав на соответствующую кнопку (рис. 8).

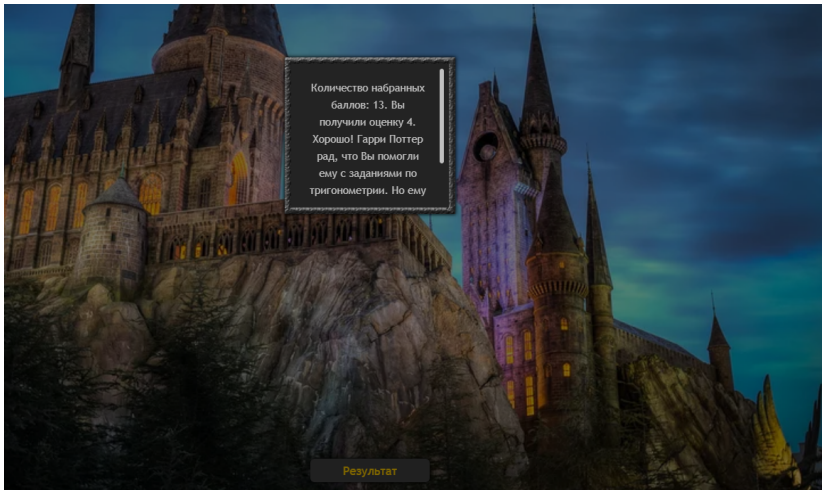

Рис. 8. Результаты обучаемого

При разработке компьютерной игры создаются специальные параграфы, каждый из которых является частью единой игровой истории, в частности в нашей обучающей игре – одной из серии заданий. В параграфах прописываются все необходимые функции, переменные, свойства объектов на языке JavaScript.

Приведем фрагмент кода параграфа 1.

```
asm.save = true;
Гарри.hade(1000);
effect ("jump");
texteffect ("fade");
\ <center> <h1> Упражнение 1</h1> </center>
picture("https://trikky.ru/wp-content/blogs.dir/1/files/2021
/05/20/eskgsjlxuaadsi4.jpg");
\ Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует
заданному числу:
sprites(true);
 круг1 = sprite("1");
 круг1.show(1000);
 круг1.left=73;
 круг1.width=27;
\ 1) п/2
select("A","B","C","D","E",function(номер) {
    if (номер == 2){
      mas_1[1]=1;
    }else {
      mas_1[1]=0;};
});
\ 2) 4п/3
select("A","B","C","D","E",function(номер) {
    if (номер == 4){
    mas_1[2]=1;
    }else {
    mas_1[2]=0;}
```

Для фиксирования правильных ответов обучающихся используются глобальные переменные $u1, u2, \ldots, u7$ и массивы mas_1, mas_2. Элементы массивов и переменные принимают значения 1 или 0 в зависимости от того, правильно или неправильно выполнено задание. Глобальная переменная rez выполняет функцию подсчета баллов. Кроме того, в игре используются функции *picture* (для вывода фоновых изображений), sprite (для вывода изображения Гарри Поттера), *music* (для воспроизведения музыки), *choice* (для вывода вариантов при выборе одного ответа),if (для проверки соответствия ответа обучаемого правильному

ответу), input (для создания поля ввода ответа школьником), *message* (для вывода результатов игры на экран монитора).

Многими исследователями отмечается, что отнюдь не каждая деятельность предполагает развитие, но, тем не менее, для компьютерной игры по математике – это обязательный элемент: развитие коммуникаций, качеств личности, интеллекта. В процессе работы со школьниками авторы статьи одной из своих основных задач считали формирование познавательного интереса учащихся к математике. Дидактические игры являются средством стимулирования познавательного интереса школьников, способствуют приобщению учащихся к поисково-исследовательской деятельности.

Как показали исследования, школьники от одного до трех часов в день тратят на общение в виртуальном мире, используя социальные сети. И поскольку это виртуальное пространство является для современного школьника привычным, то, естественно, в знакомой для учащегося среде, по мнению авторов, и нужно прививать любовь к математике.

Список источников

1. **Попов Н. И.** Фундаментализация университетского математического образования : монография. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2021. 174 с.

2. **Попов Н. И., Канева Е. А.** Использование компьютерных игр по математике в учебном процессе средней школы // *Математическое моделирование и информационные технологии [Электронный ресурс]: V Всероссийская научная конференция с международным участием (9–11 декабря 2021 г., г. Сыктывкар): сборник материалов. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2021. С. 57–58. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).*

3. **Бочаров М. И., Можарова Т. Н., Соболева Е. В., Суворова Т. Н.** Разработка персонализированной модели обучения математике средствами интерактивных новелл для повышения качества образовательных результатов школьников // *Перспективы науки и образования. 2021. № 5 (53). С. 306–322.*

4. **Zinoveva L .V., Zinovev S.A.** Role-playing video games in the space of psychocorrection and psychotherapy // *Smalta. 2017. № 4. Pp. 17–19.*

5. **Paiva J. C., Leal J. P., Queiros R.** Fostering programming practice through games // *Information (Switzerland). 2020. № 11 (11). Pp. 1–20.*

6. **Канева Е. А.** Компьютерная игра по математике для школьников // *Материалы VII научно-образовательной студенческой конференции, посвященной дню рождения Николая Ивановича Лобачевского. Казань. 2020. С. 126–131.*

References

1. **Popov N. I.** *Fundamentalizaciya universitetskogo matematicheskogo obrazovaniya : monografiya* [The fundamentalization of university mathematics education: monograph] / *Yelets: EGU im. I.A. Bunina, 2021. 174 p.* (In Russ.)

2. **Popov N. I., Kaneva E. A.** The use of computer games in mathematics in the educational process of secondary school. *Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye technologii [Electronic resource]: V Vserossijskaya nauchnaya konferenciya s mezhdunarodnym ychastiem* [Mathematical modeling and information technologies [Electronic resource]: V All-Russian scientific conference with international participation] (December 9–11, 2021, Syktyvkar): collection of materials: text scientific electronic edition on CD. Syktyvkar: Publishing House of SSU im. Pitirim Sorokina, 2021, pp. 57–58. (In Russ.)

3. **Bocharov M. I., Mozharova T. N., Soboleva E. V., Suvorova T. N.**Development of a personalized model of teaching mathematics by means of interactive short stories to improve the quality of educational results for schoolchildren. *Perspektivy nauki i obrazovaniya* [Prospects of Science and Education]. 2021. No. 5 (53). Pp. 306–322. (In Russ.)

4. **Zinoveva L .V., Zinovev S.A.** Role-playing video games in the space of psychocorrection and psychotherapy. *Smalta. 2017. No. 4. Pp. 17–19.*

5. **Paiva J. C., Leal J. P., Queiros R.** Fostering programming practice through games. *Information (Switzerland). 2020. No. 11 (11). Pp. 1–20.*

6. **Kaneva E. A.**Computer game in mathematics for schoolchildren. *Materialy VII nauchno-obrazovatelnoj studencheskoj konferencii, posvyashchennoj dnyu rozhdeniya Nikolaya Ivanovicha Lobachevskogo* [Proceedings of the VII scientific and educational student conference dedicated to the birthday of Nikolai Ivanovich Lobachevsky]. Kazan. 2020. S. 126–131. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Николай Иванович Попов / Nikolay I. Popov
д.п.н., к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой физико-математического и информационного образования / Doctor of Pedagogical Sciences, Ph.D. in Physics and Mathematics, Head of the Department of Physics, Mathematics, and Information Education
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Евгения Андреевна Канева / Evgeniya A. Kaneva
студент-магистрант / undergraduate student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 24.05.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 30.05.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 01.06.2022

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 2 (43)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 2 (43)

НАСТАВНИК–УЧЕНИК

Научная статья

УДК 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_67

МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ РЕАКЦИИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С НАКЛОННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Андрей Васильевич Ермоленко[1], **Виктория Романовна Макарова**[2]
[1,2]Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина

Аннотация

При математическом моделировании различных конструкций в строительстве возникает необходимость в решении контактных задач со свободной границей. Эффективным способом решения таких задач является метод обобщенной реакции, предложенный в Сыктывкарском университете. В представленной статье с применением метода обобщенной реакции решена контактная задача для пластины над наклонным основанием.

Ключевые слова: пластина, метод обобщенной реакции, уравнение Софи Жермен–Лагранжа, контактная реакция

Для цитирования: Ермоленко А. В., Макарова В. Р. Метод обобщенной реакции для пластины с наклонным основанием // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 2 (43). С. 67–74. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_67

© Ермоленко А. В., Макарова В. Р., 2022.

Mentor-student

Original article

Generalized reaction method for a plate with an inclined base

Andrey V. Yermolenko, Viktoria R. Makarova
[1,2]Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Annotation
An effective way to solve problems on the interaction of plates and bases is the generalized reaction method. The presented article shows the application of the generalized reaction method to a cantilevered and rigidly fixed plate. The solution using the generalized reaction method is a system of iterated functions, the finding of which in a certain number of iterations will be reduced to solving the problem, which makes it possible to accurately and quickly determine the answer.

Keywords: plate, generalized reaction method, the Sophie Germain–Lagrange equation, contact reaction

For citation: Andrey V. Yermolenko., Makarova V. R. Generalized reaction method for a plate with an inclined base. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika=Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 2 (43), pp. 67−74. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_2_67

Введение

В рамках научной школы Новожилова – Черныха – Михайловского [1; 2] в Сыктывкарском университете решен ряд контактных задач со свободной границей, см., например, [3]. Особенностью такого рода задач является существенная нелинейность, т. е. при попытке линеаризовать задачу она теряет смысл.

В данной работе рассмотрена одна из такого рода задач – о пластине над наклонным основанием. Постановка задачи следующая. Цилиндрически изгибаемая пластина [3] ширины l и толщины h расположена над абсолютно жестким, идеально гладким основанием, лежащим под наклоном на расстоянии $\Delta(x) = \dfrac{l}{200}(1 + \dfrac{x}{l})$. На пластину действует постоянная нормальная нагрузка $q_0 = const$. Под действием нагрузки

пластина изгибается и прилегает к основанию, образуя область контакта $[x_0; x_1]$. Требуется определить прогибы пластин w, зону контакта и возникающие контактные реакции $r(x)$.

Рассматриваются два случая задачи:

- для шарнирно закрепленной пластины;
- для жестко закрепленной пластины.

Материалы и методы

Для решения задач используем уравнение Софи Жермен–Лагранжа [3] в виде

$$Dw_1^{IV} = q_0 - r(x). \tag{1}$$

Здесь $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

При этом для шарнирной пластины граничные условия записываем в виде

$$w(0) = 0, w''(0) = 0,$$
$$w(l) = 0, w''(l) = 0, \tag{2}$$

а для жестко закрепленной пластины – так:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0,$$
$$w(l) = 0, w'(l) = 0. \tag{3}$$

При этом прогиб w и контактные реакции $r(x)$ должны удовлетворять следующему соотношению [4]:

$$r = [r + \beta(w - \Delta(x))]_+, \beta > 0. \tag{4}$$

Здесь $\phi_+ = 1/2(\phi + |\phi|)$.

Используя выражение (4), решение контактной задачи находим по следующей итерационной схеме:

$$r^{k+1}(x) = [r^k + \beta(w^k - \Delta(x))]_+, \beta > 0, \tag{5}$$

где

$$w^k(x) = \frac{1}{D}\int_0^l G(x,\xi)(q_0 - r^k(\xi))d\xi,$$

при этом функция Грина для краевой задачи {(1), (2)} имеет следующий вид [5]:

$$G_1(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + \frac{\xi - l}{6l}x^3 + (\xi^3 - 3l\xi^2 + 2l^2\xi)\frac{x}{6l},$$

а для краевой задачи {(1), (3)} –

$$G_2(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + (l^2\xi - 2l\xi^2 + \xi^3)\frac{x^2}{2l^2} + (3\xi^2 l - 2\xi^3 - l^3)\frac{x^3}{6l^3}.$$

В качестве начальных условий полагаем

$$r^0(x) = 0, w^0(x) = \frac{q_0}{D}\int_0^l G(x,\xi)d\xi.$$

Результаты

Для реализации итерационной схемы (5) была написана программа на языке Python [6], с использованием которой проведен численный эксперимент.

На рис. 1 показан прогиб, на рис. 2 – контактная реакция основания шарнирно закрепленной пластины со следующими физическими и геометрическими параметрами:

$$l = 50 \text{ см}, h = 1 \text{ см}, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \nu = 0,3, q_0 = 5 \text{ кГ/см}^2.$$

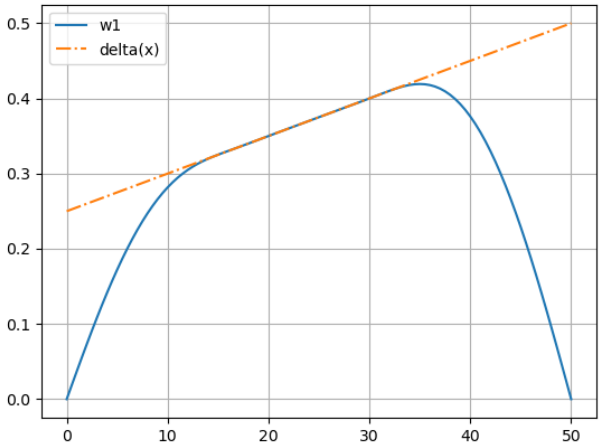

Рис. 1. Прогиб (сплошная линия) шарнирно закрепленной пластины

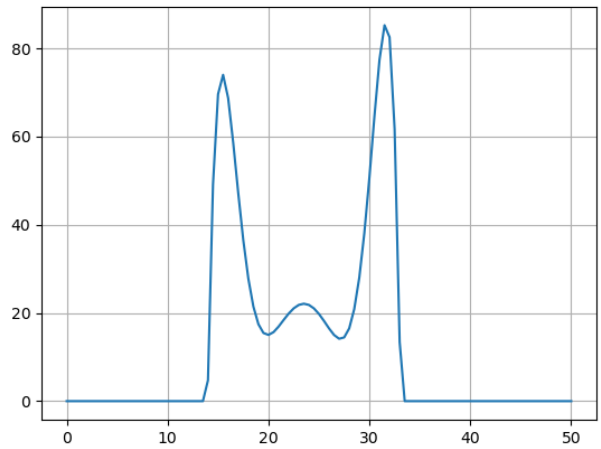

Рис. 2. Контактная реакция основания для шарнирно закрепленной пластины и основания

На рис. 3 и 4 приведен пример расчета при аналогичных параметрах для жестко закрепленной пластины.

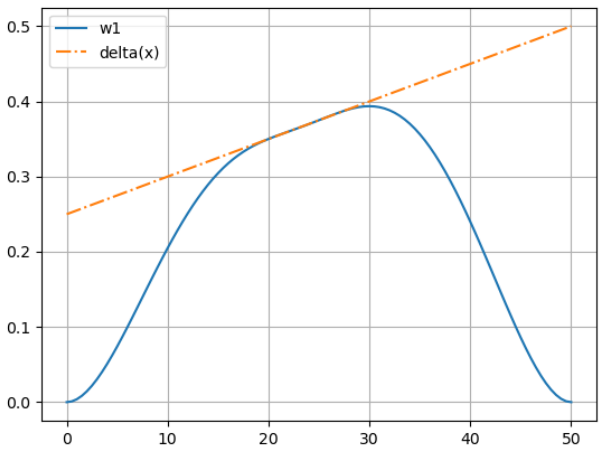

Рис. 3. Прогиб (сплошная линия) жестко закрепленной пластины

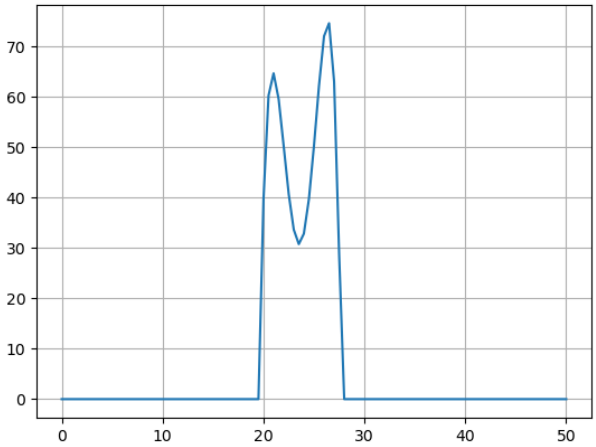

Рис. 4. Контактная реакция основания для жестко закрепленной пластины и основания

Обсуждение

Полученные результаты согласуются с результатами работы [3] и подтверждают предположение, что контактные реакции на границе зоны контакта имеют пиковое значение. При этом зона контакта для шарнирно закрепленной пластины намного больше зоны контакта для жестко закрепленной пластины при аналогичных параметрах.

Список источников

1. **Михайловский Е. И.** Школа механики академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2005. 172 с.

2. **Черных К. Ф., Михайловский Е. И., Никитенков В. Л.** Об одной ветви научной школы Новожилова (Новожилов – Черных – Михайловский – Никитенков). Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2002. 147 с.

3. **Ермоленко А. В.** Контактные задачи со свободной границей: учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 105 с. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).

4. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. 128–136 с.*

5. **Ермоленко А. В., Ладанова С. В.** Контактная задача для двух пластин с разным закреплением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (36). 87–92 с.*

6. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

References

1. **Mikhailovskii E.I.** *Shkola mekhaniki akademika Novozhilova* [The Novozhilov School of Mechanics]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2005. 172 p.

2. **Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I., Nikitenkov V.L.** *Ob odnoy vetvi nauchnoy shkoly Novozhilova (Novozhilov – Chernykh – Mikhaylovskiy – Nikitenkov)* [About one branch of the scientific school of Novozhilov (Novozhilov - Chernykh - Mikhailovsky - Nikitenkov)]. Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2002.147 p.

3. **Yermolenko A.V.** *Fundamentalizaciya universitetskogo matematicheskogo obrazovaniya : monografiya* [Contact problems with free boundary: textbook]. Syktyvkar: Izd. Pitirim Sorokin, 2020. 1 opt. compact disc (CD-ROM). 105 p.

4. **Mikhailovsky E.I., Tarasov V.N.** *O sxodimosti metoda obobshhennoj reakcii v kontaktnyx zadachax so svobodnoj granicej* [Convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary]. RAS. PMM. 1993. V. 57. Issue. 1. Pp. 128–136.

5. **Yermolenko A. V., Ladanova S. V.** *Kontaktnaya zadacha dlya dvux plastin s raznym zakrepleniem* [Contact problem for two plates with different restraints]. Bulletin of the Syktyvkar University. Ser. 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2020. Issue. 3 (36). Pp. 87-92.

6. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2019, 4 (33), pp. 86–95. (In Russ.)

Сведения об авторах / Information about authors
Андрей Васильевич Ермоленко / Andrey V. Yermolenko
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук / Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Макарова Виктория Романовна / Viktoria R. Makarova
студент / student
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина / Pitirim Sorokin Syktyvkar State University
167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55 / 167001, Russia, Syktyvkar, Oktyabrsky Ave., 55

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 22.06.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 28.06.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 28.06.2022

Contents

Mathematics

Bannikova T. M., Nemtsova O. M. *Geometrical and analytical characteristics of the constructing the polynomial of a circle division* 4

Applied mathematics and mechanics

Belyaeva N. A., Mashin I. O., Nadutkina A. V. *Phase transition of a viscous fluid in a nonisothermal flow* 21

Computer sciences

Penin A. S., Tursukov N. O. *Development of components of a model for assessing the state of a cyberphysical system operator* 32

Methodical materials

Popov N. I., Kaneva E. A. *Forming schoolchildren's cognitive interest in mathematics using computer educational games* 55

Tutor-follower

Andrey V. Yermolenko., Makarova V. R. *Generalized reaction method for a plate with an inclined base* 67

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 2 (43) 2022

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет В. А. Устюгов
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 26.07.2022. Дата выхода в свет 09.08.2022.
Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern.
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 8,8.
Тираж 32 экз. Заказ № 48.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru