Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2022.
Выпуск 1 (42)
Bulletin of Syktyvkar University.
Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2022; 1 (42)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.3
https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_1_5

НЕКООПЕРАТИВНАЯ АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА С НЕЧЕТКИМИ ОЦЕНКАМИ

Владимир Георгиевич Чернов
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, e-mail: vladimir.chernov44@mail.ru

Аннотация. В исследовании операций значительное место занимают задачи, формальной моделью которых являются антагонистические игры. Классические методы решения таких игр основаны на принципе «общего знания», согласно которому участники игры располагают полной информацией о возможных решениях и их последствиях. Известны исследования, в которых допускается информационная рефлексия участников игры, т. е. допускается их неуверенность в оценке ситуации, требующей принятия решения. Для формализации этой неуверенности значения элементов платежной матрицы представляют в форме нечетких чисел. Выбор наилучшего решения осуществляется на основе преобразования нечетких оценок последствий возможных решений в форму эквивалентных нечетких множеств с треугольными функциями принадлежности.

Ключевые слова: антагонистическая игра, платежная матрица, нечеткое множество, функция принадлежности

Для цитирования: Чернов В. Г. Некооперативная антагонистическая игра с нечеткими оценками // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2022. Вып. 1 (42). С. 5−14. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_1_5

Applied mathematics and mechanics

Original article

Non-cooperative antagonistic game with fuzzy estimates

Vladimir G. Chernov
Vladimir State University, e-mail: vladimir.chernov44@mail.ru

Abstract. In the study of operations a significant place is occupied by problems, the formal model of which are antagonistic games. The classical methods of solving such games are based on the principle of "common knowledge"according to which the participants in a game have full information about possible solutions and their consequences. Studies are known in which information reflexivity of the participants of the game is allowed, i.e. their uncertainty in assessing the situation requiring a decision is allowed. To formalize this uncertainty, it is proposed that the values of the elements of the payment matrix should be presented in the form of fuzzy numbers. The choice of the best solution is based on the conversion of fuzzy estimates of the consequences of possible solutions in the form of equivalent fuzzy sets with triangular membership functions.

Keywords: antagonistic game, payment matrix, fuzzy set, membership function

For citation: Chernov V. G. Non-cooperative antagonistic game with fuzzy estimates. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, No. 1 (42), pp. 5—14. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_1_5

Введение

Некооперативная антагонистическая игра может быть представлена тройкой $G = \{A, B, L(A, B)\}$, где $A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}$ – множество стратегий игрока ; $B = \{b_j : j = \overline{1, N}\}$ – множество стратегий игрока B; $L(A, B)$ – бинарное отношение, заданное на прямом произведение $A \times B$ и обычно называемое платежной матрицей или матрицей игры.

Очевидно, что для решения игры необходимо определить множества A и B и матрицу $L(A, B)$.

В основе классической теории игр лежит предположение о так называемом «общем (полном) знании», которое гласит: игра со всеми правилами известна игрокам и каждый из них знает, что все участники осведомлены о том, что известно остальным партнерам по игре. И такое положение сохраняется до конца игры [1; 2].

Если исходить из рациональности игроков, то можно допустить, что они располагают сведениями о возможных действиях противоположной стороны. Хотя, скорей всего, игрокам было бы более выгодно держать соответствующие данные в секрете. Причины, по которым принцип «общего знания»"нарушается при построении матрицы игры, рассмотренные в [3], дают основания говорить о наличии неопределенности в оценке значений элементов матрицы $L(A, B)$. При этом имеется достаточно оснований утверждать, что эта неопределенность имеет нестатистический характер. Соответственно, есть обстоятельства, позволяющие говорить о целесообразности представления элементов матрицы игры в нечеткой форме в виде нечетких чисел или нечетких вербальных утверждений.

Нечеткую формулировку некооперативной антагонистической игры одним из первых предложил D. Butnariu [4]. В настоящее время известно достаточно много работ, посвященных решению нечетких матричных игр [5–8].В то же время многие работы, допуская нечеткость исходных данных, остаются в рамках классической теории. Например, используя методы нечеткого линейного программирования, находят смешанные стратегии, предполагая, что игра реализуется многократно при сохранении неизменности исходных условий. Если игра реализуется однократно или небольшое число раз, то говорить о смешанных стратегиях не приходится, тем более если решение приходится принимать в изменяющихся условиях. В ряде работ [5–8] предложенные методы могут использоваться только с определенными видами функций принадлежности нечетких элементов матрицы игры, например треугольными или трапецеидальными. Далее будет рассмотрена ситуация однократной реализации игры.

Материалы и методы

Вполне реальна ситуация, когда неопределенности в оценках элементов платежной матрицы у ее составителей представляются по-разному. Выбор того или иного вида функций принадлежности (ФП) нечетких оценок позволяет моделировать различия в степени их неопределенности [9; 10].

Предположим, что задана игра

$$\widetilde{G} = \{A, B, \widetilde{L}(A, B)\},$$

где $\widetilde{L}(A, B)$ – нечеткое отношение на $A \times B$.

Тогда каждой паре (a_i, b_j) будет поставлена в соответствие нечеткая оценка $\widetilde{l}(a_i, b_j)$, формализуемая нечетким множеством (НМ) с ФП $\mu_{ij}(z)$. В общем случае для $\widetilde{l}(a_i, b_j)$ и $\widetilde{l}(a_k, b_q)$, $i \neq k \in [1, M]$ могут быть выбраны различные виды ФП. В результате получим матрицу

$$\widetilde{L}(A, B) = ||\widetilde{l}(a_i, b_j)||$$

или

$$\widetilde{M} = ||\mu_{ij}(z)||. \tag{1}$$

Если $\widetilde{l}(a_i, b_j)$ – нечеткие числа, то $z \in [z_{min}, z_{max}]$, определяемому диапазоном значений носителей нечетких оценок. При вербальных оценка $z \in [0, 1]$.

В антагонистических играх участники имеют противоположные интересы. Для определенности предположим, что игрок A выигрывает, а B проигрывает. Соответственно, A стремится максимизировать свой выигрыш, B минимизировать проигрыш.

При неполных знаниях возникает ситуация, аналогичная ситуации принятия решения на основе критерия недостаточного основания Лапласа, т. е. игроки допускают равную возможность использования противодействующей стороной любой стратегии из множества допустимых (полезных). Тогда игрок A должен определить последствия выбора стратегии $a_i \in A$ при любом выборе другого игрока, аналогично для $b_j \in B$ при любом выборе A. Нечеткость значений элементов матрицы (1) предопределяет нечеткость оценок последствий выбранных стратегий.

Для получения этих оценок предлагается следующее. Рассматривать для игрока A строки матрицы (1), а для B – столбцы, как совокупность нечетких множеств, преобразуемые в дальнейшем в эквивалентное нечеткое множество с треугольной ФП. Такое НМ можно рассматривать как ожидаемую соответствующим игроком нечеткую оценку сделанного выбора. Можно показать, что такое преобразование не нарушает логику задачи. Кроме того, треугольный вид ФП позволяет упростить процедуру сравнения эквивалентных нечетких множеств (ЭНМ), используя, например, методы описанные в [11], [12].

Параметры ФП ЭНМ определяются следующим образом. Для строки a_i:

– левая граница носителя ЭНМ $z_i^L = \min_j\{z_{ij}^L\}$, z_{ij}^L – левая граница носителей НМ, образующих i-ую строку;

– правая граница носителя ЭНМ $z_i^R = \max_j\{z_{ij}^R\}$, z_{ij}^L – правая граница носителей НМ, образующих i-ую строку;

– координата центра тяжести ЭНМ

$$CG_i^E = \frac{\sum_{ki} \mu_{ij}(z_{ki}) z_{ki}}{\sum_{ki} \mu_{ij}(z_{ki})}, z_{ki} \in [z_i^L; z_i^R]; \tag{2}$$

– координата максимума ФП ЭНМ z_i^* определяется из известного соотношения $CG_i^E = \frac{1}{3}(z_i^L + z_i^* + z_i^R)$, тогда

$$z_i^* = 3CG_i^E - (z_i^L + z_i^R). \tag{3}$$

Если при расчетах получается, что $z_i^* \leq z_i^L$, то $z_i^* = z_i^L$, а при $z_i^* \geq z_i^R$ $z_i^* = z_i^R$.

Аналогично, $z_j^L = \min_i\{z_{ij}^L\}$, $z_j^R = \max_i\{z_{ij}^R\}$,

$$CG_j^E = \frac{\sum_{kj} \mu_{ij}(z_{kj}) z_{kj}}{\sum_{kj} \mu_{ij}(z_{kj})}, z_{kj} \in [z_j^L; z_j^R], \tag{4}$$

$$z_j^* = 3CG_j^E - (z_j^L + z_j^R). \tag{5}$$

Как следует из приведенных выше соотношений процедура построения ЭНМ не зависит от вида функций принадлежности нечетких элементов платежной матрицы.

В результате для игрока A получим набор из M ЭНМ $\widetilde{S} = \{\widetilde{s}_i : i = \overline{1, M}\}$, для B – из N ЭНМ $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_j : j = \overline{1, N}\}$ с треугольными функциями принадлежности $\mu_{s_i}(z)$ и $\mu_{h_j}(z)$ соответственно. Каждое из $\widetilde{s}_i$ или $\widetilde{h}_j$ – это нечеткое распределение предполагаемых игроками результатов применения стратегий $_i$, b_j. Для игрока A наилучшей будет стратегия a_i^*, дающая наибольший нечеткий выигрыш, для B – b_j^*, дающая наименьший нечеткий проигрыш. Определение этих стратегий выполняется сравнением нечетких множеств(чисел) $\widetilde{s}_i$ и $\widetilde{h}_j$ с помощью методов, описанных в [11–12].

В классической теории наличие равновесных стратегий определяется либо седловой точкой, либо нахождением оптимальных смешанных стратегий. В рассматриваемой постановке задачи решения нечеткой антагонистической игры определенные игроками стратегии будем рассматривать с точки зрения получения равновесного результата такого, когда совпадают значения нечеткого выигрыша и проигрыша. Очевидно, что для этого надо вычислить пересечение нечетких множеств $\widetilde{s}(a_i^*)$ и $\widetilde{h}(b_j^*)$:

$$\widetilde{R} = \widetilde{s}(a_i^*) \cap \widetilde{h}(b_j^*)$$

или

$$\mu_{\widetilde{R}}(z) = \mu_{\widetilde{s}(a_i^*)}(z) \cap \mu_{\widetilde{h}(b_j^*)}(z) = \min\{\mu_{\widetilde{s}(a_i^*)}(z), \mu_{\widetilde{h}(b_j^*)}(z)\}. \qquad (6)$$

Множество $\widetilde{R}$ не может быть пустым, так как в формировании ЭНМ $\widetilde{s}(a_i^*)$ и $\widetilde{h}(b_j^*)$ участвует элемент, стоящий на пересечении соответствующей строки и столбца нечеткой матрицы игры. Таким образом, при однократной реализации антагонистической игры с нечеткой платежной матрицей у игроков имеется возможность определить стратегии, дающие им нечеткий равновесный результат.

Результаты

Проиллюстрируем изложенное выше простым примером. Задана платежная матрица с элементами в виде нечетких чисел с различными функциями принадлежности.

Таблица 1

Нечеткая платежная матрица

Стратегии игроков	b_1	b_2	b_3
a_1	6 (трапеция)	2 (тент)	3 (треугольник)
a_2	5 (пик)	6 (трапеция)	3 (треугольник)
a_3	1 (треугольник)	2 (тент)	4 (пик)

Числа, указанные в таблице —это координаты центров тяжести соответствующих нечетких чисел. При симметричных ФП эти значения совпадают с модальными значениями нечетких чисел. В скобках указаны типы ФП (рис. 1), которые выбирались произвольно.

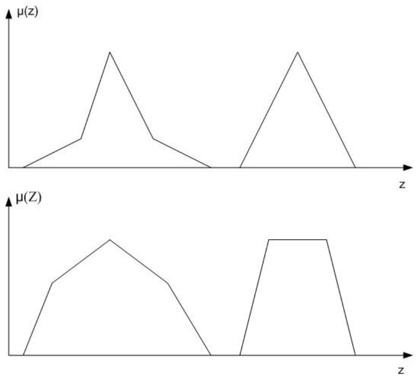

Рис. 1. Пик, треугольник, тент, трапеция

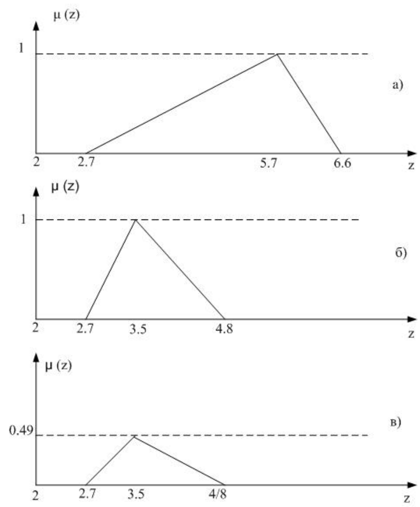

Рис. 2. Нечеткие оценки последствий выбора в качестве наилучших

Можно показать, что неопределенность нечетких оценок, представленных различными ФП, будет разная [9; 10]. Результаты расчетов по соотношениям (2)–(6) представлены на рис. 2.

Заключение

Классическая теория дает однозначное решение при однократной реализации игры только в случае наличия седловой точки. В рассматриваемом случае игроки при нечеткой платежной матрице, используя чистые стратегии, могут ожидать получение результата в виде нечеткого равновесного значения.

Список источников

1. **Myerson R. B.** Game theory: analysis of conflict. London Harvard: Harvard.Un.Press, 1991. 584 p.

2. **Geanakoplos J.** Common Knowledge. Handbook of Game Theory.v.2. ed. R. Aumann and S. Hart. Elsiever Science B.V. 1994. Pp. 1438–1496.

3. **Сигал А. В.** Теоретико-игровая модель принятия инвестиционных решений // *Ученые записки Таврического национального университета имени. В. И. Вернадского. Серия: Экономика и управление.* 2011. № 1. Т. 24 (63). С. 193–205.

4. **Butnariu D.** Fuzzy games: a description of the concept // *Fuzzy Sets and System.* 1978. 1. P. 181–192.

5. **Вовк С. П.** Игра двух лиц с нечеткими стратегиями и предпочтениями // *Альманах современной науки и образования.* 2014. № 7(85). С. 47–49.

6. **Ghosh D., Chakravorty S.** On Solving Bimatrix Games with Triangular Fuzzy Payoffs // *International Conference on Mathematics and Computing.* 2018. Pp. 441–352.

7. **Stalin T, Thirucheran M.** Solving Fuzzy Matrix Games Defuzzificated by Trapezoidal Parabolic Fuzzy Number. // *SRD-International Journal for Scientific Research and Development.* 2015. V. 3. Issue 10. Pp. 341–345.

8. **Verma Tina, Kumar Amit, Kacprzyk Janusz.** A Novel Approach to the Solution of Matrix Games with Payoffs Expressed by Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers // *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems.* 2015. № 3. V. 9. Pp. 25–46.

9. **Dubois D., Prade H.** Theoriedes Possibilites. Applications a la representation des conisisancesen in for antique. Masson, 1980. 288 p.

10. **Чернов В. Г.** Выбор решения на основе нечеткой игры с «природой» // *Прикладная информатика.* 2021. № 2. Т. 16. С. 131–143.

11. **Воронцов Я. А., Матвеев М. Г.** Методы параметризованного сравнения нечетких и трапециевидных чисел // *Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии.* 2014. № 2. С. 90–97.

12. **Чернов В. Г.** Сравнение нечетких чисел на основе построения линейного отношения порядка // *Динамика сложных систем – XXI век.* 2018. № 2. С. 81–87.

References

1. **Myerson R. B.** *Game theory: analysis of conflict.* London Harvard: Harvard.Un.Press, 1991. 584 p.

2. **Geanakoplos J.** *Common Knowledge. Handbook of Game Theory. V. 2. ed. R. Aumann and S. Hart. Elsiever Science B.V.* 1994. Pp. 1438–1496.

3. **Sigal A. V.** Game theory model of investment decision making of investment decisions. *Uchenye zapiski Tavricheskogo nacional'nogo universiteta imeni. V.I. Vernadskogo, seriya "Ekonomika i upravlenie"* [Scientific Notes of the Taurida National University named after. V. I. Vernadsky. Series "Economics and Management"]. 2011. № 1, V. 24(63). Pp. 193–205. (in Ukrainian).

4. **Butnariu D.** Fuzzy games: a description of the concept. *Fuzzy Sets and System.* 1978. 1. Pp. 181–192.

5. **Vovk S. P.** The game of two persons with fuzzy strategies and preferences. *Al'manah sovremennoj nauki i obrazovaniya* [Almanac of Modern Science and Education]. 2014. № 7(85). Pp. 47–49. (In Russ.).

6. **Ghosh D., Chakravorty S.** On Solving Bimatrix Games with Triangular Fuzzy Payoffs. *International Conference on Mathematics and Computing.* 2018. Pp. 441–352.

7. **Stalin T, Thirucheran M.** Solving Fuzzy Matrix Games Defuzzificated by Trapezoidal Parabolic Fuzzy Number. *SRD-International Journal for Scientific Research and Development.* 2015. V. 3. Issue 10. Pp. 341–345.

8. **Verma Tina, Kumar Amit, Kacprzyk Janusz.** A Novel Approach to the Solution of Matrix Games with Payoffs Expressed by Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers. *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems.* 2015. No 3. V. 9. Pp. 25–46.

9. **Dubois D., Prade H.** *Theoriedes Possibilites. Applications a la representation des conisisancesen in for antique.* Masson, 1980. 288 p.

10. **Chernov V. G.** Choosing a Solution Based on Fuzzy Game with Nature. *Prikladnaya informatika* [Journal of Applied Informatics]. V. 16. № 2(92). 2021. Pp. 131–142. (In Russ.)

11. **Voroncov Ya. A., Matveev M. G.** Methods of parametrized comparison of fuzzy and trapezoidal numbers. *Vestnik VGU, Seriya Sistemnyj analiz I informacionnye tekhnologii* [Vestnik VSU. Series System analysis and information technologies]. 2014. No 2. Pp. 90–96. (In Russ.)

12. **Chernov V. G.** Comparison of fuzzy number on the basis of construction linear order relation. *Dinamika slozhnyh sistem – XXI vek* [Dynamics of Complex Systems – XXI Century.]. 2018. No 2. Pp. 81–87. (In Russ.)

Сведения об авторе / Information about author
Владимир Георгиевич Чернов / Vladimir G. Chernov
д.э.н., профессор кафедры «Вычислительная техника и системы управления» / Doctor of economical sciences, Professor of Department of Computer Science and Control Systems
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых / Vladimir State University
600000, Россия, г. Владимир, ул. Горького, дом № 87 / 600000, Russia, Vladimir, Gorky St., 87

Статья поступила в редакцию / The article was submitted 05.02.2022
Одобрено после рецензирования / Approved after reviewing 21.02.2022
Принято к публикации / Accepted for publication 24.02.2022