НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 539.3 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_83**

Об одной контактной задаче для двух пластин

Ермоленко А. В., Беляев Е. А., Туркова О. И.

С использованием метода обобщенной реакции приводится численное решение контактной задачи для двух пластин – одна закреплена шарнирно, вторая имеет жесткое закрепление. Показано, что распределение контактных реакций существенно зависит от взаимного расположения пластин. При этом зоной контакта является или отрезок, или точка.
Ключевые слова: пластина, контактная задача, метод обобщенной реакции, численное решение.

Введение

В работе [1] приведено аналитическое решение контактной задачи для двух цилиндрически изгибаемых пластин (см. рис. 1), где «сверху» находится шарнирно закрепленная пластина, а «снизу» – жестко закрепленная пластина[1]. Однако предложенный в статье [1] подход к решению задачи, в которой, наоборот, «сверху» находится жестко закрепленная пластина, а «снизу» – шарнирно закрепленная пластина[2], не приводит к разумному результату. Поэтому для решения двух представленных задач применяется разработанный в Сыктывкарском университете численный метод обобщенной реакции [2], который хорошо зарекомендовал себя при решении задач с неопределенной областью контактного взаимодействия.

[1]Условно будем называть в данной работе ее *задача 1.*

[2]Будем называть ее *задача 2.*

1. Численное решение задачи 1

Рассмотрим две цилиндрически изгибаемые пластины толщины h и ширины $2l$, которые расположены параллельно друг другу на расстоянии Δ. На верхнюю шарнирно закрепленную пластину действует нормальная нагрузка $q_n^+ \equiv q_0 = const$. Под действием нагрузки верхняя пластина изгибается и давит на нижнюю жестко закрепленную пластину, образуя область контакта $[x_0, 2l - x_0]$. Требуется определить прогибы пластин, зону контакта и возникающие контактные реакции $r(x)$ (см. рис. 1).

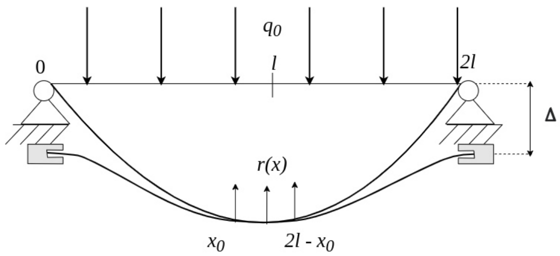

Рис. 1. Контактное взаимодействие двух цилиндрически изгибаемых пластин

Решение будем искать с использованием классической теории изгиба плоских пластин, разрешающее уравнение которой в случае цилиндрического изгиба записывается так [4]:

$$Dw^{IV} = q_n, \tag{1}$$

где w – прогиб пластины, $q_n = q_n^+ - q_n^-$, q_n^+, q_n^- – действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности пластины нагрузки, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Учитывая симметричность задачи, будем рассматривать пластины только на отрезке $[0, l]$. Условия симметрии примем в виде ($i = 1, 2$ – номер пластины)

$$w_i{}'(l) = 0, w_i{}'''(l) = 0. \tag{2}$$

При этом верхняя (с индексом «1») пластина при $x = 0$ удовлетворяет условиям шарнирного закрепления

$$w_1(0) = 0, w_1''(0) = 0, \tag{3}$$

а нижняя (с индексом «2») – условиям жесткого закрепления

$$w_2(0) = 0, w_2'(0) = 0. \tag{4}$$

Функции Грина для краевых задач $\{(1), (2), (3)\}$ и $\{(1), (2), (4)\}$ имеют соответственно следующий вид:

$$G_1(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + \frac{1}{2}(2l\xi - \xi^2)x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$G_2(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + \frac{1}{4l}(2l\xi - \xi^2)x^2 - \frac{1}{6}x^3. \tag{5}$$

Здесь H – функция Хевисайда.

Используя найденные функции Грина и учитывая, что на верхнюю пластину действуют нагрузки $q_{1n}^{+}(x) \equiv q_0$ (активная) и $q_{1n}^{-}(x) \equiv r(x)$ (реактивная), а на нижнюю – только нагрузка $q_{2n}^{+}(x) \equiv r(x)$, решение задач $\{(1), (2), (3)\}$ и $\{(1), (2), (4)\}$ принимает вид

$$w_1 = \frac{1}{D}\int_0^l G_1(x,\xi)(q_0 - r(\xi))d\xi,\ w_2 = \frac{1}{D}\int_0^l G_2(x,\xi)r(\xi))d\xi. \tag{6}$$

При этом прогибы w_i и контактные реакции r связаны соотношением [2]

$$r = [r + \beta(w_1 - w_2 - \Delta]_+, \beta > 0, \tag{7}$$

где $\phi_+ = \frac{1}{2}(\phi + |\phi|)$.

Используя выражения (6), (7), строится следующая итерационная схема:

$$r^{(k+1)} = [r^{(k)} + \beta(w_1^{(k)} - w_2^{(k)} - \Delta]_+, \beta > 0, \tag{8}$$

где

$$w_1^{(k)} = \frac{1}{D}\int_0^l G_1(x,\xi)(q_0 - r^{(k)}(\xi))d\xi,\ w_2^{(k)} = \frac{1}{D}\int_0^l G_2(x,\xi)r^{(k)}(\xi))d\xi.$$

В качестве начальных условий полагаем $r^{(0)} = 0$.

Для реализации итерационной схемы (8) была написана программа на языке программирования python [3]. На рис. 2 приведен пример расчета двух пластин при следующих физических и геометрических па-

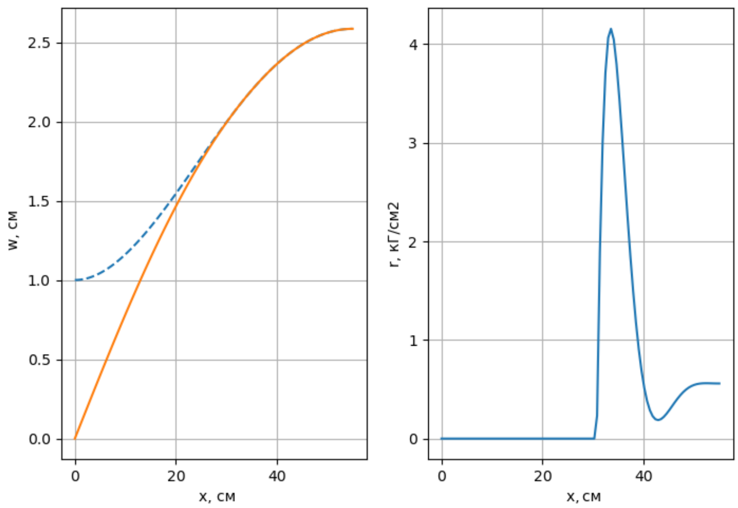

Рис. 2. Прогибы и контактные реакции (задача 1)

раметрах:

$$l = 55 \text{ см},\ h = 1 \text{ см},\ E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2,\ \nu = 0,3,\ q_0 = 5 \text{ кГ/см}^2. \quad (9)$$

На рис. 2 и 3 слева пунктирной линией показан прогиб «нижней» пластины с дополнительным перемещением Δ для лучшей визуализации результата.

Сделаем следующие замечания. Во-первых, при наличии контакта реакции имеют характерный вид, как на рис. 2, а именно в средней части реакция примерно равна действующей нагрузке, а на краю пиковые нагрузки. В работе [5] показано, что при расчете по классической теории данные пики описываются сосредоточенными силами. Во-вторых, если провести расчет по параметрам работы [1], то получаются точно такие же результаты.

2. Численное решение задачи 2

В данной задаче жестко закрепленная пластина расположена над шарнирно закрепленной пластиной. Для решения данной задачи методом обобщенной реакции достаточно в предыдущем разделе в формулах (5) поменять местами функции Грина с сохранением всех остальных выкладок.

На рис. 3 показан результат расчета задачи 2 при параметрах (9).

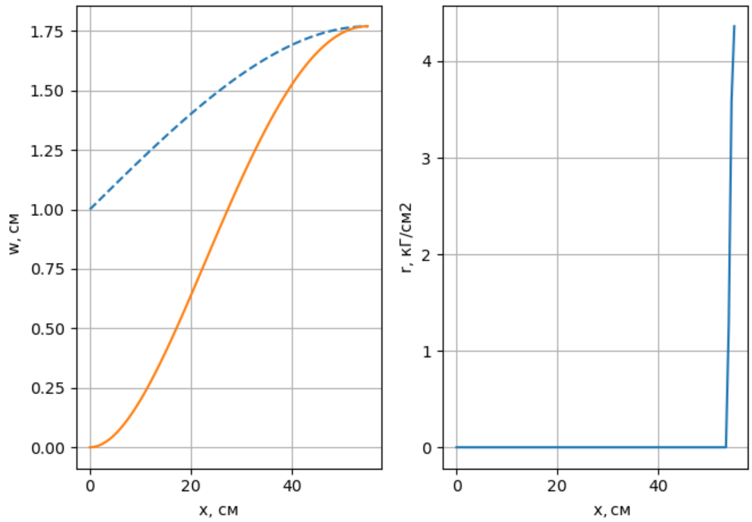

Рис. 3. Прогибы и контактные реакции (задача 2)

При этом следует отметить, что приведенный график контактных реакций является характерным при всех использованных параметрах. Это позволяет утверждать, что контакт в задаче 2 происходит только в одной точке.

Список литературы

1. **Ермоленко А. В., Ладанова С. В.** Контактная задача для двух пластин с разным закреплением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2020. Вып. 3 (36). С. 87—92.

2. **Ермоленко А.В.** Контактные задачи со свободной границей. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). 105 с.

3. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

4. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 1995. 251 с.

5. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.

Summary

Yermolenko A. V., Belyaev E. A., Turkova O. I. One contact problem for two plates

Using the generalized reaction method, a numerical solution of the contact problem for two plates is given. One plate is hinged, the other one is rigidly fixed. It is shown that the distribution of contact reactions significantly depends on the relative position of the plates. In this case, the contact zone is either a segment or a point.
Keywords: plate, contact problem, generalized reaction method, numerical solution.

References

1. **Yermolenko A. V., Ladanova S. V**. Contact problem for two plates with different fixing. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2020, 3 (36). Pp. 87-92.

2. **Ермоленко А. В.** *Kontaktnye zadachi so svobodnoj granicej* [Free Boundary Contact Problems]. Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2020. (CD-ROM). 105 p.

3. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33). Pp. 86–95.

4. **Mihajlovskii E. I., Toropov A. V.** *Matematicheskiye modeli teorii uprugosti* [Mathematical models of the theory of elasticity]. Syktyvkar: Sykt Publishing House. University, 1995. 251 p.

5. **Mikhailovskii E. I., Tarasov V. N.** On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary. *Jurnal prikladnoy matematiki i mekhaniki* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1993, v. 57, No. 1. Pp. 128–136.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Беляев Е. А., Туркова О. И. Аналогия как основа обучения школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 83−89. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_83

For citation: Yermolenko A. V., Belyaev E. A., Turkova O. I. One contact problem for two plates . *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021. No. 4 (41), pp. 83−89. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_83

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 01.11.2021*