Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 372.851 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_70**

АНАЛОГИЯ КАК ОСНОВА ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. Н. Дорофеев, Е. Н. Есетов, Н. В. Наземнова

В данной статье изучаются способы и методы, способствующие повышению качества обучения школьников основам векторной алгебры и приемам их применения к решению геометрических задач. С этой целью выделены и систематизированы необходимые знания основ векторной алгебры, которые учащиеся должны усвоить в процессе изучения темы «Основы векторной алгебры». В работе обоснован тот факт, что в эффективности процесса обучения старшеклассников применению основ векторной алгебры к решению геометрических задач важную роль играет такой метод познания, как аналогия. Приведены циклы взаимосвязанных задач, которые способствуют повышению качества обучения школьников применению векторного метода.

Ключевые слова: векторный метод, обучение решению геометрических задач, аналогия.

Введение

В современной методологии познания окружающего мира ученые активно используют такие методы, как анализ и синтез, конкретизация и обобщение, аналогия, индукция и дедукция, наблюдение и сравнение, математические методы статистической обработки данных. Как видим, аналогия выступает одним из важных методов познания мира. Суть этого метода состоит в том, что из истинного заключения А, сделанного на основе вполне обоснованных фактов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, исследователь может сделать возможно истинное заключение $\widetilde{A}$ из вполне обоснованных фактов, перенесенных в схожую ситуацию [1; 2]. Аналогию не следует путать с индукцией. Индукция — это метод доказательства того или иного утверждения. Заключение, сделанное по индукции и доказанное методом индукции, всегда истинно. Здесь важно заметить, что некоторые утверждения, сделанные по аналогии и обоснованные методом индукции, тоже обретают статус истинного положения. Учащихся необходимо учить различать, в каком случае мы получаем утверждение по аналогии, а в каком по индукции. В данной статье мы раскрываем некоторые способы обучения школьников аналогии как методу решения геометрических задач с помощью векторов.

Обзор литературы

Обучающиеся современной общеобразовательной школы с основами векторного метода знакомятся впервые в курсе геометрии VIII класса [3] или IX класса [4]. Их знания о векторах в основной школе ограничиваются определениями таких понятий, как вектор, который в школьном учебнике Л. С. Атанасяна и др. определяется через направленный отрезок, вводится понятие длины и направления вектора [3; 5]. На основе этих понятий определяются равные и коллинеарные векторы, сонаправленные и противоположно направленные векторы, вводится понятие угла между векторами, устанавливается, что угол между векторами может принимать значения от 0° до 180°. При определении угла между векторами важно обратить внимание школьников на тот факт, что угол между сонаправленными векторами равен 0°, а угол между противоположно направленными векторами — 180°. Курс геометрии в основной школе удовлетворяет всем потребностям физики, которая к этому времени активно использует как само понятие вектора, так и сумму векторов, произведение вектора на число[2; 6; 7]. Методическая особенность определения вектора заключается в его интерпретациях как скорости или силы. Опираясь на такие понятия, как длина вектора и угол между векторами, вводится понятие скалярного произведения двух векторов, которое играет важную роль не только для геометрии как метод решения задач на вычисление угла между прямыми, расстояния между плоскими геометрическими фигурами, но и как метод исследования математических моделей, описывающих реальные состояния физических процессов. Прежде всего следует учитывать, что посредством скалярного произведения векторов описывается работа, связанная с перемещением материальной точки под действием заданной силы и в заданном направлении. Этот факт позволяет нам материализовать само понятие скалярного произведения [2; 8]. Это не есть чисто теоретическое воображение, а некоторый математический объект, позволяющий нам посредством его изучать окружающий материальный мир.

В X классе при переходе от планиметрии к стереометрии положение векторного метода в геометрии существенным образом меняется. При соблюдении полной преемственности с курсом геометрии основной школы учащиеся повторяют знакомый им материал о векторах из курса VII–IX классов, но уже применительно к векторам в пространстве [3]. Затем они приступают к изучению новых фундаментальных (с точки зрения теории и ее применения) положений о векторах, связанных главным образом с вопросами, стоящими перед курсом стереометрии. Предполагается, что материал о векторах изученный в VII–IX классах, полностью усвоен учащимися. В связи с этим в X–XI классах, приступая к изучению вопросов векторной алгебры, повторение ряда основных понятий и определений следует провести в ускоренном режиме.

Курс геометрии X–XI классов предусматривает изучение следующих важных вопросов, касающихся векторов: 1) коллинеарные и компланарные векторы; 2) разложение вектора по трем некомпланарным векторам в пространстве; 3) скалярное умножение векторов в пространстве; вычисление длины вектора и угла между векторами; 4) координатный метод в пространстве, задание векторов координатами. Новые сведения о векторах не только расширяют знания учащихся о векторном методе познания окружающего мира (что само по себе имеет важное значение), но эффективно привлекаются и при построении самого курса стереометрии, доказательстве многих теорем и решении различных планиметрических и стереометрических задач.

Вполне естественно вначале показать в процессе обучения школьников решению планиметрических задач эффективное применение векторов. Затем наряду с решением планиметрических задач необходимо иллюстрировать обучающимся применимость векторов к решению как простых, так и более сложных стереометрических задач. Эффективнее при этом использовать именно те пространственные задачи, которые строятся по аналогии с планиметрическими. Здесь важно учитывать, что пространственным аналогом правильного треугольника служит правильный тетраэдр, пространственным аналогом квадрата — куб, пространственным аналогом параллелограмма — параллелепипед и т. д. Поэтому вопрос о формировании умений и навыков решения задач с помощью векторов связан с разработкой методики обучения школьников решению планиметрических задач. Если в этой области достигнут успех, то трудности, вызванные переходом к задачам стереометрическим, легко преодолимы, они носят преимущественно технический характер.

Приступая в X–XI классах к обучению школьников решению геометрических задач с применением векторов, необходимо в первую очередь сосредоточить их внимание на рассмотрении различных возможных подходов к решению именно планиметрических задач [3; 5]. При этом мы не будем стремиться вводить новые термины и понятия, не предусмотренные программой, такие, например, как линейная зависимость и независимость векторов, линейная комбинация векторов, ортонормированный базис, проекция вектора на ось и другие. Конечно, если бы программой было предусмотрено изучение этих исключительно важных для векторного метода понятий, то многие формулировки, обоснования и приемы решения задач могли бы быть более компактными и лаконичными.

Обсуждения

Прежде чем обсудить вопрос о векторном решении конкретных планиметрических или стереометрических задач, необходимо в сознании обучающихся четко упорядочить весь арсенал сведений, которыми они располагают в VIII–XI классах. Для этого все основные понятия и факты векторной алгебры мы структурируем в определенной последовательности, на них будем опираться и посредством их мы будем комментировать решения анализируемых задач. Первые шестнадцать пунктов охватывают материал, изучаемый школьниками в основной школе; последующие шесть включают сведения, изучаемые школьниками в IX–XI классах.

1. *Определение вектора, длина и направление (ненулевого) вектора, задание вектора упорядоченной парой точек или направленным отрезком.*

2. *Нулевой вектор* $\overrightarrow{0}$*, противоположные векторы, сонаправленные и противоположно направленные векторы. Коллинеарность векторов.*

3. *Откладывание вектора от данной точки.*

4. *Сумма двух векторов.*

5. *Правило треугольника.*

6. *Коммутативность сложения векторов.* Какими бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, выполняется равенство

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

7. *Ассоциативность сложения векторов.* Какими бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, выполняется равенство

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}).$$

   Методически важно обратить внимание школьников на то значимое обстоятельство, что благодаря закону ассоциативности и коммутативности сложения векторов мы имеем право в зависимости от конкретной ситуации складывать векторы в произвольном порядке независимо от их расположения [9;10].

8. *Закон поглощения нулевого вектора.*

9. *Разность двух векторов.*

10. *Сумма трех и более векторов.*

11. *Длина суммы и длина разности двух векторов.*

12. *Умножение вектора на число.*

13. *Ассоциативность умножения вектора на число.* Какими бы ни были числа k и l и каким бы ни был вектор $\overrightarrow{a}$, выполняется равенство

$$k(l\overrightarrow{a}) = (kl)\overrightarrow{a}.$$

14. *Дистрибутивность относительно сложения чисел.* Какими бы ни были числа k и l и каким бы ни был вектор $\overrightarrow{a}$, имеет место равенство

$$(k + l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}.$$

15. *Дистрибутивность относительно сложения векторов.* Какими бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и каким бы ни было число k, выполняется равенство

$$k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}.$$

16. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам на плоскости. Если $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — неколлинеарные векторы, а $\overrightarrow{c}$ — произвольный третий вектор, то найдутся такие числа k и l, что выполняется равенство
$$\overrightarrow{c} = k\overrightarrow{a} + l\,\overrightarrow{b}.$$

17. *Скалярное произведение двух векторов.*

18. *Коммутативность скалярного умножения.*

19. *Сочетательность скалярного умножения.*

20. *Дистрибутивность скалярного умножения.*

21. *Скалярный квадрат суммы трех векторов.* Каковы бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, выполняется равенство
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + 2\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}.$$

Рассмотрим теперь примеры некоторых задач, допускающих оптимальное решение посредством векторного метода, используя при этом только операции сложения векторов и умножения вектора на число. Заметим, что четкого разграничения между задачей на доказательство и теоремой указать невозможно. В некоторых учебных пособиях теорема может быть сформулирована как задача на доказательство, в то время как встречаемая в других учебных пособиях задача на доказательство может быть сформулирована как теорема. Поэтому первые приложения векторов проиллюстрируем на доказательстве трех известных теорем.

1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

Решение. В трапеции $ABCD$ проведем среднюю линию, соединяющую середину M боковой стороны AD с серединой N боковой стороны CB. Согласно правилу многоугольника имеем:
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN},$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

Сложив почленно эти два равенства и учитывая, что $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{0}$, получим $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. Но векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$

сонаправлены, поэтому и вектор $\overrightarrow{MN}$ сонаправлен с ними. Это значит, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.

Далее, из сонаправленности всех трех векторов следует, что

$$2|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|,$$

откуда

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Этим доказано, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований. Ценность этой задачи заключается в том, что векторный способ ее решения позволяет сделать предположение о том, что вектор, соединяющий середины боковых сторон, равен полусумме векторов, определяемых боковыми сторонами. Этот факт в совокупности с тем, что средняя линия равна полусумме ее оснований, позволяет учащимся с незначительной помощью учителя заключить, что точка пересечения отрезка, соединяющего боковые стороны трапеции, и ее средней линии задает центр тяжести трапеции [11].

Наши наблюдения за процессом усвоения учащимися векторного метода решения геометрических задач, а именно задачи 1, свидетельствуют о том, что у учащихся формируется достаточно устойчивое представление о возможности постановки более общей задачи, которую можно сформулировать как на плоскости, так и в пространстве:

2. В четырехугольнике $ABCD$ отмечены середины M и N сторон AB и CD. Доказать, что $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Методическая значимость подобных заданий заключается в том, что посредством аналогичных рассуждений школьники, как правило, легко заключают, что и вектор, определяемый серединами двух других противоположных сторон этого четырехугольника, тоже равен полусумме векторов, определяемых этими сторонами. Значит, точка пересечения этих отрезков служит центром равновесия четырехугольника. Поскольку четырехугольник ABCD, как уже было отмечено выше, может быть пространственным, значит, все полученные выше факты по аналогии могут быть перенесены и на пространственный четырехугольник, но, как известно, пространственный четырехугольник задает тетраэдр, следовательно, данная задача позволяет учащимся X–XI классов сделать вывод о том, что центр тяжести тетраэдра находится в точке пересечения отрезков, соединяющих его противоположные ребра. В этом направлении методически значимой будет следующая задача:

3. Доказать что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

В процессе поиска решения этой задачи учащихся можно нацелить на тот факт, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке, например M. Тогда многие из них самостоятельно или с незначительной помощью учителя составят равенства:

$$2\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MA},$$

$$2\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = l\overrightarrow{MB}.$$

Однако следующий этап решения задачи требует от учителя проявления некоторой методической смекалки. Как учащихся сориентировать на то, что следует произвести вычитание из первого равенства второе? Поскольку посредством вычитания получается значимое для решения данной задачи равенство

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MA} - l\overrightarrow{MB}.$$

Далее учителю необходимо сосредоточить внимание обучающихся на том факте, что разложение вектора по двум неколлинеарным векторам единственно. А это значит, что, воспользовавшись единственностью разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, легко можно найти значения коэффициентов $k = -1, -l = 1$. Следовательно, $\overrightarrow{MA_1} = -\overrightarrow{MA}, \qquad 2\overrightarrow{MB_1} = -\overrightarrow{MB}$, откуда учащиеся получают, что

$$2|\overrightarrow{MA_1}| = |\overrightarrow{MA}|, \qquad 2|\overrightarrow{MB_1}| = |\overrightarrow{MB}|,$$

или

$$|MA| : |MA_1| = |MB| : |MB_1| = 2 : 1.$$

Далее учащимся необходимо напомнить, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, или $\overrightarrow{MC} = -(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$. Но $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC_1}$, где C_1 — середина стороны $\overrightarrow{AB}$, поэтому $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MC_1}$. Откуда следует, что $|MC| : |MC_1| = 2 : 1$ и точки C, M и C_1 принадлежат одной прямой. Это значит, что медиана CC_1 проходит через точку M. Важно обратить внимание учащихся на то, что если медиана CC_1 проходит через точку , то и другие медианы тоже проходят через эту точку и делятся ею в отношении 2:1. Особая ценность этой задачи заключается в том, что точка пересечения медиан треугольника совпадает с его центром тяжести.

Обращаем внимание школьников на то, что все векторы, которые рассматривались в этой задаче, были отложены от точки M. Это значительно облегчило решение задачи, так как векторные равенства получаются предельно простыми.

Стереометрическим аналогом данной задачи служит задача следующего содержания:

Доказать, что медианы тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.

Используя аналогичные рассуждения, учащиеся, проводя более сложные вычислительные преобразования под строгим контролем учителя над каждым этапом решения задачи, обычно приходят к заключению, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1. Важно обратить внимание школьников на возможность формулирования по аналогии вывода о том, что точка пересечения медиан тетраэдра совпадает с его центром тяжести. Таким образом, учащиеся самостоятельно или с незначительной помощью учителя могут сделать заключение о том, что центр тяжести тетраэдра совпадает с точкой пересечения его средних линий, которая, в свою очередь, совпадает с точкой пересечения медиан тетраэдра. Это значит, что на основе аналогии мы получили два подхода к применению векторного метода к решению задач, связанных с нахождением центра тяжести тетраэдра. Этот факт определяет методическую ценность системы, состоящей из задач 3 и 4.

Следует отметить, что задача 3 служит основой для построения ее стереометрического аналога:

Доказать, что для любых четырех точек ABC пространства выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = 1/3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC})$, где — центр тяжести треугольника ABC.

Заключение

Таким образом, обучение старшеклассников основам векторной алгебры будет эффективным, если в процессе их усвоения мы будем чаще обращаться к векторным способам решения задач планиметрического и стереометрического содержания, взаимосвязанных между собой аналогией. Формирование у школьников умения устанавливать аналогию между схожими объектами в различных проблемных ситуациях способствует развитию у них как логического, так и аналитического мышления, повышению уровня восприятия абстрактного материала. Значимость этого подхода заключается еще и в том, что он обусловливает формирование в сознании обучающихся необходимости использования методов научного познания в изучении окружающего мира математическими методами и средствами.

Список литературы

1. **Болтянский В. Г.** Аналогия-общность аксиоматики // *Советская педагогика.* 1975. № 1. С. 83–93.

2. **Дорофеев С. Н.** Теория и практика формирования творческой активности будущих учителей математики в педагогическом вузе : дис. … д-ра пед. наук. Пенза, 2000. 410 с.

3. **Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.** Геометрия. 7–9 классы. М.: Просвещение, 2020. 384 с.

4. **Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.** Геометрия. 9 класс. М.: Просвещение, 2015. 175 с.

5. **Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.** Геометрия. 7–9 классы М.: Просвещение, 2020. 255 с.

6. **Дорофеев С. Н., Журавлева О. Н., Рыбина Т. М., Сарванова Ж. А.** Формирование исследовательских компетенций учащихся на уроке математики // *Современные наукоемкие технологии.* 2018. № 10. С. 181–185.

7. **Утеева Р. А.** Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе : дис. … д-ра пед. наук. М., 1998. 363 с.

8. **Кудрявцев Л. Д.** Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1977. 123 с.

9. **Дорофеев С. Н.** УДЕ как метод подготовки будущих бакалавров педагогического образования к профессиональной деятельности // *Гуманитарные науки и образование* / МордГПИ им. М. Е. Евсевьева. 2013. № 1. С. 14–17.

10. **Саранцев Г. И.** Как сделать обучение математике интересным. М.: Просвещение, 2011. 160 с.

11. **Dorofeev S., Pavlov I., Shichiyakh R., Prikhodko A.** Differentiated Training as a Form of Organization of Education and Cognitive Activity of Future Masters of Pedagogical Education // *Applied Lingvistics Research Jounal*, 2021, 5(3), Pp. 216–222.

Summary

Dorofeev S. N., Esetov E. N., Nazemnova N. V. Analogy as the basis for teaching students the vector method of geometric problem solving

This article examines the ways and the methods that contribute to improving the quality of teaching students the basics of vector algebra and methods of their application to solving geometric problems. For this purpose, the necessary knowledge of the basics of vector algebra, which students should learn in the process of studying the topic "Fundamentals of vector algebra", is highlighted and systematized.

The paper substantiates the fact that such a method of cognition as analogy plays an important role in the effectiveness of the process of teaching high school students to apply the basics of vector algebra to solving geometric problems. Some examples of interrelated tasks that contribute to improving the quality of teaching students the use of the vector method are given.

Keywords: Vector method, training in solving geometric problems, analogy.

References

1. **Boltyanskij V. G.** Analogy — commonality of axiomatics. *Sovetskaya pedagogika* [Soviet pedagogy], 1975. No. 1. Pp. 83–93.

2. **Dorofeev S. N.** *Teoriya i praktika formirovaniya tvorcheskoj aktivnosti budushhix uchitelej matematiki v pedagogicheskom vuze, dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora pedagogicheskix nauk* [The theory and practice of forming the creative activity of future teachers of mathematics in a pedagogical university], Penza, 2000. 410 p.

3. **Atanasyan L. S., Butuzov V. F., Kadomcev S. B. et al.** *Geometriya. 7–9 klassy* [Geometry. 7-9th grade]. M.: Prosveshhenie, 2020. 384 p.

4. **Aleksandrov A. D., Verner A. L., Ry'zhik V. I.** *Geometriya. 9 klass* [Geometry. 9th grade]. M.: Prosveshhenie, 2015. 175 p.

5. **Atanasyan L. S., Butuzov V. F., Kadomcev S. B. et al.** *Geometriya. 7–9 klassy* [Geometry. 7-9th grade]. M.: Prosveshhenie, 2020. 255 p.

6. **Dorofeev S. N., Zhuravleva O. N., Ry'bina T. M., Sarvanova Zh. A.** Formation of research competencies of students in the mathematics classroom. *Sovremenny'e naukoemkie texnologii* [Modern knowledge-intensive technologies]. 2018. No. 10. Pp. 181–185.

7. **Uteeva R. A.** *Teoreticheskie osnovy' organizacii uchebnoj deyatel'nosti uchashhixsya pri differencirovannom obuchenii matematike v srednej shkole. Dissertaciya doktora ped. nauk* [Theoretical foundations of the organization of students' learning activities in differentiated learning of mathematics in high school]. Moscow, 1998. 363 p.

8. **Kudryavcev L. D.** Mysli o sovremennoj matematike i ee izuchenii [Thoughts on Modern Mathematics and its Study]. M.: Nauka, 1977. 123 p.

9. **Dorofeev S. N.** UDE as a method of preparing future bachelors of teacher education for professional activities. *Gumanitarny'e nauki i obrazovanie.* MordGPI im. M. E. Evsev'eva [Humanities and Education / M. E. Evsevyev Mordovian State Pedagogical University]. No. 1, 2013. Pp. 14–17.

10. **Sarancev G. I.** *Kak sdelat' obuchenie matematike interesny'm* [How to make learning math interesting]. M.: Prosveshhenie. 2011. 160 p.

11. **Dorofeev S., Pavlov I., Shichiyakh R., Prikhodko A.** Differentiated Training as a Form of Organization of Education and Cognitive Activity of Future Masters of Pedagogical Education. *Applied Lingvistics Research Jounal*, 2021, 5(3), Pp. 216–222.

Для цитирования: Дорофеев С. Н., Есетов Е. Н., Наземнова Н. В. Аналогия как основа обучения школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 70–82. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_70

For citation: Dorofeev S. N., Esetov E. N., Nazemnova N. V. Analogy as the basis for teaching students the vector method of geometric problem solving. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 4 (41), pp. 70–82. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_70

Тольяттинский государственный университет, Тольятти,
Пензенский государственный университет, Пенза

Поступила 11.08.2021