ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 539.3 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_41**

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Андрюкова В. Ю.

Приведен подробный вывод формул упругой энергии и работы внешних сил для колец, нагруженных центральными силами. Представлены выражения для вычисления критической нагрузки в случае плоской деформации кольца, а также в сучае пространственной формы потери устойчивости.

Ключевые слова: криволинейный стержень, критическая нагрузка, устойчивость, уравнения Эйлера, работа внешних сил, упругая энергия.

Предположим, что криволинейный тонкий упругий стержень находится в равновесии под действием каких-либо сил. Пусть М – некоторая точка на оси стержня. Пусть X, Y, Z – три взаимно перпендикулярные оси в точке М, ось Z направлена по касательной к линии деформированного стержня, X, Y по главным осям инерции поперечного сечения. Выберем на оси стержня точку M_0, которая в результате деформации переходит в точку M. Соответствующие три взаимно перпендикулярные оси обозначим через (X_0, Y_0, Z_0), в результате поворота при деформации они переходят в оси (X, Y, Z). Обозначим s – длину дуги стержня, отсчитываемой от некоторой точки. Косинусы углов между осями (X_0, Y_0, Z_0) и (X, Y, Z) [1] запишем в матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\gamma & \cos\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \sin\alpha & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Проекции перемещения в точке M_0 на оси (X_0, Y_0, Z_0) обозначим через (w, v, u). Предположим, что точки M_0 и M движутся вдоль стержня со скоростью, равной 1, системы осей (X, Y, Z) и (X_0, Y_0, Z_0) вращаются вокруг точек M_0 и M с угловыми скоростями Ω_0 и Ω. Проекции угловой скорости Ω на оси (X, Y, Z) обозначим (p, q, r), а проекции угловой скорости Ω_0 на оси (X_0, Y_0, Z_0) — (p_0, q_0, r_0). Пусть $\delta p = p - p_0$, $\delta q = q - q_0$, $\delta r = r - r_0$. Будем считать деформации малыми так, что можно положить

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1,$$

$$\sin\alpha = \alpha, \sin\beta = \beta, \sin\gamma = \gamma.$$

Тогда величины δp, δq, δr, углы α, β, γ и перемещения w, v, u связаны уравнениями [2]

$$\begin{cases} \delta p = \dfrac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \dfrac{d\beta}{ds} - p_0\beta + r_0\gamma, \\ \delta r = \dfrac{d\gamma}{ds} - q_0\beta + p_0\gamma, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{dw}{ds} + q_0 u - r_0 v, \\ -\alpha = \dfrac{dv}{ds} + r_0 w - p_0 u, \\ 0 = \dfrac{du}{ds} + p_0 v - q_0 w. \end{cases} \tag{2}$$

В результате деформации упругая энергия стержня может быть вычислена по формуле [2]

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l (A\delta p^2 + B\delta q^2 + C\delta r^2)ds, \tag{3}$$

где l – длина стержня, A, B – главные жесткости стержня при изгибе, C – жесткость при кручении.

Пусть теперь ось стержня в недеформированном состоянии есть окружность радиуса R и одна из главных осей сечения направлена к центру окружности, ось Y_0 перпендикулярна к плоскости кольца. В нашем случае в формулах (1) – (2) $p_0 = 0$, $q_0 = \frac{1}{R}$, $r_0 = 0$. Вводя вместо дуги S центральный угол ϑ так, что $S = R\vartheta$, получим формулы

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{R}\Big(\dfrac{dw}{d\vartheta} + u\Big), \\ \alpha = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dv}{d\vartheta}, \\ w = \dfrac{du}{d\vartheta}. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \delta p = -\dfrac{1}{R^2}v'' + \dfrac{1}{R}\gamma, \\ \delta q = \dfrac{1}{R^2}(w'' + u'), \\ \delta r = \dfrac{1}{R}\gamma' + \dfrac{1}{R^2}v'. \end{cases} \tag{5}$$

Выражение для упругой энергии в формуле (3) примет вид

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{B}{R^3}(w'' + u')^2 + \frac{A}{R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{R^2}(\gamma' + \frac{1}{R}v'')^2\right)d\vartheta. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение неподвижную систему координат (ξ, η, ζ) так, что проекции перемещений w, v, u на эти оси определяются формулами

$$\begin{cases} \xi = (w - R)\cos\vartheta - u\sin\vartheta, \\ \eta = (w - R)\sin\vartheta + u\cos\vartheta, \\ \zeta = v. \end{cases} \tag{7}$$

Дифференцируя последние равенства, получим

$$\begin{cases} \xi' = (w' + u)\cos\vartheta + (u' - w - R)\sin\vartheta, \\ \eta' = -(w' + u)\sin\vartheta + (u' - w - R)\cos\vartheta, \\ \zeta' = v'. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = (w' + u)^2 + 2Ru' - 2Rw + (u' - w)^2 + v'^2 + R^2 = R^2$$

или

$$(w' + u)^2 + 2Ru' - 2Rw + (u' - w)^2 + v'^2 = 0. \tag{8}$$

Последнее представляет собой условие несжимаемости оси кольца. В линейном приближении условие несжимаемости примет вид $u' = w$, что совпадает с третьим уравнением системы (2).

Предположим, что кольцо нагружено центральными силами P, равномерно распределенными по кольцу. В этом случае работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = -PR\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}-R\right)d\vartheta. \tag{9}$$

Обозначим подынтегральную функцию

$$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}-R = \sqrt{(w-R)^2+u^2+v^2}-R =$$

$$= R\sqrt{1+\frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}}-R.$$

Введем в рассмотрение функцию $\phi(t)$ и, разлагая ее в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка, получим

$$\phi(t) = \sqrt{1+t} \approx \phi(0)+\phi^{'}(0)t+\frac{1}{2}\phi^{''}(0)t^2 = 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2,$$

где

$$t = \frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}.$$

Тогда подынтегральная функция примет вид

$$\rho = R(1+1/2t-1/4t^2)-R =$$

$$= \frac{R}{2}\left(\frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}\right)-\frac{R}{4}\left(\frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}\right)^2.$$

Оставляя в последнем равенстве только квадратичные слагаемые, получим

$$\rho = -w+\frac{u^2}{2R}+\frac{v^2}{2R}-\frac{w^2}{2R}.$$

Далее из (8)

$$2Rw = (w'+u)^2+2Ru'+(u'-w)^2+v'^2,$$

с учетом условия несжимаемости $u' = w$

$$2Rw = (w'+u)^2+2Ru'+v'^2 = w'^2+2w'u+u^2+2Ru'+v'^2.$$

Интегрируя последнее равенство и учитывая условия периодичности перемещений $w(2\pi)-w(0)=0$ и $u(2\pi)-u(0)=0$, находим:

$$2R\int_0^{2\pi} w d\vartheta = 2R\int_0^{2\pi} u' d\vartheta + \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta +$$

$$+2\int_0^{2\pi} w' u^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

Учитывая, что

$$2\int_0^{2\pi} w' u d\vartheta = 2uw\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} w u' d\vartheta = -2\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta,$$

$$\int_0^{2\pi} u' d\vartheta = u\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

имеем

$$2R\int_0^{2\pi} w d\vartheta = \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta - 2\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

С учетом этого формула (9) примет вид

$$W = -PR\int_0^{2\pi} \rho d\vartheta = PR\Big(-\int_0^{2\pi} w d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta -$$

$$-\frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} 2w^2 d\vartheta\Big) = PR\Big(-\frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta - \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta - \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta\Big) =$$

$$= PR\Big(-\frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta - \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta\Big). \tag{10}$$

Окончательно получаем выражение для работы внешних сил в квадратичном приближении:

$$W = -\frac{P}{2}\int_0^{2\pi} (2w^2 - w'^2 - v'^2 + v^2) d\vartheta. \tag{11}$$

В положении равновесия полная энергия системы принимает минимальное значение. При расчете на устойчивость кольца требуется найти минимальное значение силы P, при которой вариационная задача

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{B}{R^3}(w'' + u')^2 + \frac{A}{R}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{R}(\gamma' + \frac{1}{R}v')^2\right)d\vartheta -$$

$$-\frac{P}{2}\int_0^{2\pi}(w'^2 - 2w^2 + v'^2 - v^2)d\vartheta \to \min_{u,v,w,\gamma} \tag{12}$$

имеет нетривиальное решение.

Заметим, что система дифференциальных уравнений Эйлера для функционала (12) распадается на две независимые подсистемы [3]:

$$\frac{B}{R^3}(w^{IV} + 2w'' + w) + P(w'' + 2w) = 0. \tag{13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{A}{R^3}v^{(4)} + \dfrac{C}{R^3}v'' + \dfrac{C + A}{R^2}\gamma'' - P(v'' - v) = 0, \\ \dfrac{A + C}{R}v'' + C\gamma'' - A\gamma = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Уравнение (13) описывает плоскую деформацию кольца. Для вывода формулы вычисления критической нагрузки в [2] представляют периодическую функцию v в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin(k\vartheta + \phi)$$

и, подставляя в уравнение (13), получают

$$\frac{B}{R^3}(k^4 - 2k^2 + 1) - P(k^2 - 2) = 0.$$

Откуда

$$P = \frac{B}{R^3}\frac{(k^2 - 1)^2}{(k^2 - 2)}.$$

Критическая нагрузка в случае $k = 2$ равна

$$P_1 = \frac{4.5B}{R^3}. \tag{15}$$

Система уравнений (14) соответствует пространственной форме потери устойчивости кольца. Представив функции v и γ в виде тригонометрического ряда и вычислив их производные

$$v = \sum_{k=0}^{n} a_k(\sin k\vartheta + \phi), \quad v'' = -\sum_{k=0}^{n} a_k k^2 \sin(k\vartheta + \phi),$$

$$v^{(4)} = \sum_{k=0}^{n} a_k k^4 \sin(k\vartheta + \phi),$$

$$\gamma = \sum_{n=0}^{m} b_n \sin(n\vartheta + \phi), \quad \gamma'' = -\sum_{n=0}^{m} b_n n^2 \sin(n\vartheta + \phi),$$

получим систему уравнений для определения критической силы P:

$$\begin{cases} -\dfrac{A}{R^3} a_k k^4 - \dfrac{C}{R^3} k^2 a_k - \dfrac{C+A}{R^2} k^2 b_k + P(k^2 a_k - a_k) = 0, \\ \dfrac{A+C}{R} k^2 a_k + C k^2 b_k + A b_k = 0. \end{cases} \tag{16}$$

В данном случае критическое давление определяется формулой [2]

$$P_2 = \frac{k^2(k^2-1)AC}{R^3(k^2 C + A)}. \tag{17}$$

В случае $k = 2$

$$P_2 = \frac{12AC}{R^3(4C + A)}. \tag{18}$$

Далее будем считать, что поперечное сечение кольца есть прямоугольник, одна сторона которого перпендикулярна плоскости кольца, ее длину обозначим через a, другая сторона параллельна этой плоскости, ее длину обозначим b. Тогда

$$B = \frac{ab^3}{12}E, \quad A = \frac{a^3 b}{12}E.$$

Жесткость на кручение можно найти в справочнике [4].

В качестве заключения заметим, что при малых b критическая сила определяется (15) и наблюдается плоская форма потери устойчивости, если же a мало, то наоборот, $P_2 < P_1$, имеем пространственную форму потери устойчивости кольца. Полученные формулы (15), (18) совпадают с аналогичными формулами работы [2], полученными из геометрических соображений.

Список литературы

1. **Перельмутер А. В., Сливкер В. И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. Т. 1. 686 с.

2. **Николаи Е. Л.** Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.

3. **Andryukova V., Tarasov V.** Nonsmooth problem of stability for elastic rings. Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. CNSA-2017. 22-27 may 2017, Part I. Saint-Petersburg. Publisher: BBM. Pp. 213–218.

4. **Биргер И. А** Прочность. Устойчивость. Колебания // Справочник : в 3 т. / под общ. ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1988. 831 с.

Summary

Andryukova V. Yu. Variational approach to calculating critical loads in the case of spatial deformation of curved rods

A detailed derivation of the formulas of elastic energy and work of external forces for rings loaded with central forces is given. xpressions for calculating the critical load are presented in the case of plane deformation of the ring, as well as in the case of the spatial form of buckling.
Keywords: curvilinear bar, critical load, stability, Euler equations, work of external forces, elastic energy.

References

1. Perel'muter A. V., Slivker V. I. *Ustoychivost' ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennyye problemy* [Stability of the structures equilibrium and related problems]. Vol. 2. Moscow, Izdatel'stvo SKAD SOFT, 2010. 672 p.

2. **Nikolai Ye. L.** *Trudy po mekhanike* [Writings on mechanics]. Moscow, Gostekhizdat, 1955. 584 p.

3. **Andryukova V., Tarasov V.** Nonsmooth problem of stability for elastic rings. *Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov.* CNSA-2017. 22-27 may 2017, Part I. Saint-Petersburg. Publisher: BBM. Pp. 213–218.

4. **Birger I. A.** *Prochnost'. Ustoychivost'. Kolebaniya* [Strength. Stability. Oscillations]. M.: Mashinostroenie, 1988. 831 p.

Для цитирования: Андрюкова В. Ю. Вариационный подход к вычислению критических нагрузок // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 41−49. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_41

For citation: Andryukova V. Yu. Variational approach to calculating critical loads in the case of spatial deformation of curved rods. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 4 (41), pp. 41−49. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_41

ФИЦ Коми НЦ УрО РАН
Физико-математический институт *Поступила 20.10.2021*