МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 512.55 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_4**

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ПОЛУКОЛЕЦ

Е. М. Вечтомов, В. В. Чермных

В настоящей статье выделены и проанализированы три основных направления становления и развития теории полуколец. Рассмотрены кольце-модульное направление, обобщающее и расширяющее теорию колец и модулей на полукольца и полумодули над ними; универсально-алгебраическое направление, базирующееся на универсальной алгебре и теории полугрупп; направление, связанное с исследованием специальных классов полуколец и нацеленное на применения полуколец внутри математики, в компьютерных науках, в приложениях математики. Первые два направления содержат изучение общей теории полуколец, построение структурных теорий для отдельных важных и интересных классов абстрактных полуколец. Третье направление включает в себя, в частности, описание конечных полуколец с теми или иными условиями.

Ключевые слова: полукольцо, полутело, полумодуль, кольцо, дистрибутивная решетка, развитие теории полуколец.

Введение

Класс полуколец содержит класс всех (ассоциативных) колец и класс всех дистрибутивных решеток, ряд известных числовых систем.

Как указано в [1] термин полукольцо впервые появился в работе Г. Вандивера [2], но неявно полукольца использовались еще Р. Дедекиндом [3] при исследованиях решетки идеалов колец, Д. Гильбертом [4], при рассмотрении вопросов аксиоматики числовых систем.

Систематическое изучение полуколец началось в 50-е гг. XX века в работах А. Алмейда Косты, С. Берна, Г. Зассенхауса, К. Исеки, М. Хендриксона, В. Словиковского, В. Завадовского и др. Так, рассматривались идеалы полуколец, а среди них выделялись и исследовались полустрогие идеалы, гомоморфизмы (следовательно, формулировались и теоремы о гомоморфизмах), фактор-полукольца, конгруэнции на полукольцах. Отметим, что Берном и Зассенхаусом получен полукольцевой аналог классической теоремы Веддерберна - Артина для полупервичных колец.

При наличии некоторых отдельных интересных и важных теоретических результатов в этот период большая их часть представляла собой переносы кольцевых и общеалгебраических понятий на полукольца.

Появлялись новые примеры полуколец, причем оказывалось, что зачастую полукольца возникают как модели к давно известным математическим объектам. К примеру, это можно сказать о *полукольцах Лукасевича.* Ян Лукасевич — польский математик, одним из первых рассмотревший многозначную логику. Его трехзначная логика представляла систему, в которой высказывание могло принимать значения 0 (ложь), 1 (истина) или 1/2 (вероятно или нейтрально). Если мы рассмотрим единичный отрезок $\mathbb{I}$ с аддитивной операцией $\vee$ — максимум, и мультипликативной операцией $a \otimes b = \max\{0, a+b-1\}$, то получим полукольцо, а с трехзначной логикой Лукасевича связано трехэлементное полукольцо $\langle L_3, \vee, \otimes \rangle$. К настоящему времени развитие этого направления привело к изучению MV-алгебр и MV-полуколец.

Многочисленные полукольца возникают при рассмотрении различных t-*норм* и t-*конорм* — ассоциативных коммутативных операций на $\mathbb{I}$. Такие полукольца появились и используются в нечеткой логике — разделе математики, являющемся обобщением классической логики и теории множеств и базирующемся на понятии нечеткого множества, впервые введенного Лотфи Заде в 1965 г.

В отдельных книгах и монографиях встречались упоминания о полукольцах, говорилось о перспективах их развития (L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*; 1963, А. Г. Курош, *Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года* (1974 г. издания)). Таким образом, 50–80 годы стали периодом становления теории полуколец, и полукольцо все еще оставалось достаточно экзотическим объектом.

Ситуация стала меняться с 90-х гг. прошлого века. Постепенно накопленный материал по полукольцам нашел отражение в монографии Г. Вайнерта и У. Хебиша [5] и особенно — в первой монографии Дж. Голана [6] и в ее расширенном варианте [1]. В настоящее время определение полукольца, которое использовал Голан, наиболее употребительно (см. ниже определение 1). Большую роль сыграли обзоры К. Глазека по полукольцам, их приложениям и близким вопросам [7], [8]. В настоящее время теория полуколец является активно развивающимся разделом современной математики.

Отметим вклад в теорию полуколец кировской алгебраической школы под руководством профессора Е. М. Вечтомова. Полукольцевые исследования начались с кандидатской диссертации В. В. Чермных «Пучковые представления полуколец» (1994 г.), а о возможности применения пучков для исследования полуколец впервые было сказано К. И. Бейдаром в 1990 г. на семинаре «Кольца и модули» (МГУ, руководитель А. В. Михалев). В 1994 г. состоялась успешная защита Е. М. Вечтомовым докторской диссертации «Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле». Постепенно интересы Вечтомова стали смещаться с колец на полукольца, и уже в 1996 г. под его руководством была защищена диссертация В. И. Варанкиной «Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций». Всего под руководством Е. М. Вечтомова защищено 16 кандидатских диссертаций по теории полуколец (В. В. Чермных, В. И. Варанкина, И. А. Семенова, М. Н. Подлевских, А. В. Ряттель, В. В. Широков, О. В. Старостина, А. В. Черанева, М. А. Лукин, Д. В. Чупраков, В. В. Сидоров, Е. Н. Лубягина, А. А. Петров, Н. В. Шалагинова, И. В. Орлова, О. В. Чермных). В 2007 г. В. В. Чермных защитил докторскую диссертацию «Функциональные представления полуколец и полумодулей», позже его ученик Р. В. Марков — кандидатскую диссертацию «Пирсовские слои и цепи полуколец». Готовятся к защитам докторская диссертация В. В. Сидорова (научный консультант Е. М. Вечтомов) и кандидатская М. В. Бабенко (научный руководитель В. В. Чермных). Тематика диссертаций — это теория полуколец непрерывных функций и исследование абстрактных полуколец с дополнительными условиями. Теория полуколец непрерывных функций благодаря работе проф. Вечтомова и его учеников к сегодняшнему дню является хорошо разработанным и в то же время с ясными перспективами направлением в теории полуколец. Отметим исследования полутел, в том числе и их функциональные представления, хорошие продвижения получены в описании упорядоченных полутел. Начато изучение решеточно упорядоченных полуколец, в частности, получены существенные результаты по представлениям решеточно упорядоченных полуколец сечениями. Среди новых и перспективных отметим интересные результаты о конечных полукольцах с дополнительными условиями. Положено начало исследованиям полуколец многочленов и формальных степенных рядов [9].

О результатах указанных и некоторых других разделов теории полуколец и говорится в настоящей статье. Делается попытка выделить основные направления в теории полуколец, наметить перспективы ее развития.

Исходные понятия и примеры

Начнем с определений основополагающих понятий.

Определение 1 (в широком смысле [2]). Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle S, + \rangle$ — аддитивно записанная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — мультипликативно записанная полугруппа, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения $+$ с обеих сторон: $a(b+c) = ab + ac, (a+b)c = ac + bc$ для любых $a, b, c \in S$.

Будем рассматривать полукольца с коммутативным сложением, если иное не оговорено.

Элемент 0 полукольца S называется *нулем*, если $0 + s = s + 0 = s$ и $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$ для любого $s \in S$. Элемент 1 полукольца S называется *единицей*, если $s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$ для всех $s \in S$. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным.*

Определение 2 (в узком смысле [1]). *Полукольцо* — это полукольцо в широком смысле, в котором сложение коммутативно и существуют нуль 0 и единица 1. Если $1 = 0$, то полукольцо одноэлементно.

Определение 3. Полукольцо называется *полутелом*, если его мультипликативная полугруппа является группой. *Полуполе* — это коммутативное полутело. Полутело с присоединенным нулем будем называть *полутелом с нулем.*

Полукольцо с нулем 0 назовем *антикольцом*, если оно удовлетворяет квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$. Полукольцо с 0 и $1 \neq 0$ называется *полукольцом с делением*, если любой его ненулевой элемент обратим. Отметим, что полукольца с делением исчерпываются телами и полутелами с нулем.

Приведем примеры числовых полуколец.

Пример 1. Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения является коммутативным полукольцом с единицей и без нуля; кольцом разностей полуколец $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$ служит кольцо $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Полуполем частных полукольца $\mathbb{N}$ будет полуполе всех положительных рациональных чисел.

Пример 2. Алгебраическая структура $\langle\mathbb{R}^+, +, \cdot\rangle$ всех неотрицательных действительных чисел будет полуполем с нулем, кольцом разностей которого служит поле $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Пример 3. Рассматривая на множестве $\mathbb{P}$ всех положительных действительных чисел операции $\vee$ (max) и умножение $\cdot$, получим полуполе $\langle\mathbb{P}, \vee, \cdot\rangle$ с идемпотентным сложением (верно тождество $x \vee x = x$).

Пример 4. Пусть $S = \{0, 1\}$ — двухэлементное полукольцо с нулем 0 и единицей 1. В S умножение определяется однозначно, $0 + 0 = 0$ и $0 + 1 = 1 + 0 = 1$. Если $1 + 1 = 0$, то полукольцо S изоморфно двухэлементному полю $\mathbb{Z}_2$; если $1 + 1 = 1$, то S изоморфно двухэлементной цепи $\mathbb{B}$.

Для иллюстрации рассмотрим пример «тропического» полуполя, на базе которого строится идемпотентный анализ (так же как на базе поля $\mathbb{R}$ действительных чисел зиждется классический математический анализ).

Пример 5. Пусть $S = \langle\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, +\rangle$ — линейно упорядоченное полуполе с нулем $-\infty$ относительно операции сложения $\vee$ (max) и операции умножения $+$. Элемент $-\infty$ будет также наименьшим, сложение идемпотентно ($x \vee x = x$), а по умножению ($+$) S является коммутативной группой с добавленным нулем $-\infty$. Относительно интервальной (естественной) топологии S становится топологическим аддитивно идемпотентным полуполем. Заметим, что S изоморфно (тополого-алгебраически) как топологическому аддитивно идемпотентному полуполю с нулем $\langle\mathbb{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ всех неотрицательных действительных чисел со сложением $\vee$ и обычным умножением чисел, так и полуполю $\langle\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \wedge, +\rangle$. Поэтому тропическое полуполе $\langle\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, +\rangle$ называется еще *минимаксным.*

Для получения новых полуколец к полукольцам применяются известные алгебраические конструкции.

Примеры 6. Для любого фиксированного полукольца S с нулем 0 и единицей 1 строятся:

i) полукольцо $M_n(S)$ всех квадратных матриц размера $n \times n$ с коэффициентами из S ($n \in \mathbb{N}$);

ii) полукольцо $S[x]$ всех многочленов с коэффициентами из S от одной переменной x, коммутирующей с элементами из S;

iii) полукольцо $S[[x]]$ всех формальных степенных рядов с коэффициентами из S от одной переменной x, коммутирующей с элементами из S.

Заметим, что полукольца $M_n(S), S[x], S[[x]]$ также обладают нулем и единицей и содержат подполукольцо, канонически изоморфное исходному полукольцу коэффициентов S. Изучение взаимосвязей свойств полуколец $M_n(S), S[x], S[[x]]$ со свойствами полукольца S является одной из важных тем теории полуколец. Например, мультипликативная сократимость справа полукольца $S[x]$ влечет аддитивную сократимость полукольца S.

Далее при изложении теории полуколец даются исходные полукольцевые определения как общеалгебраического, так и специального характера. К общеалгебраическим относятся понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, фактор-полукольца, гомоморфизма, прямого произведения полуколец, решеток идеалов, конгруэнций, подполуколец. Вводятся понятия подпрямо неразложимого полукольца и конгруэнц-простого полукольца.

Для полуколец формулируются и доказываются универсально-алгебраические утверждения: теоремы о гомоморфизме и изоморфизме, теорема Биркгофа о подпрямом произведении.

Затем определяются более специальные и специфические полукольцевые понятия, такие как поглощающий элемент (по сложению и по умножению), идемпотентность (аддитивная и мультипликативная), сократимость (аддитивная и мультипликативная), конгруэнция Берна по идеалу и т. д.

Конгруэнция Берна на полукольце S с нулем по его идеалу J — это такое бинарное отношение $\rho(J)$ на S, что для любых $s, t \in S$ имеем:

$$s\rho(J)t \Leftrightarrow \exists a, b \in J(s + a = t + b).$$

Легко видеть, что $\rho(J)$ есть конгруэнция на полукольце S, причем $J \subseteq [0]_{\rho(J)}$. Идеал J образует класс нуля некоторой конгруэнции (равносильно конгруэнции $\rho(J)$) на S тогда и только тогда, когда J — *полустрогий* идеал, т. е. $a \in J$ и $a + b \in J$ влекут $b \in J$ при любых $a, b \in S$. При этом конгруэнция Берна $\rho(J)$ будет наименьшей среди конгруэнций σ на полукольце S с тем же классом нуля, что и $\rho(J)$: $[0]_\sigma = [0]_{\rho(J)}$.

Конгруэнции на любом кольце S суть в точности конгруэнции Берна по различным идеалам J в S, т. е. отношения сравнимости по J: $s\rho(J)t \Leftrightarrow s - t \in J$.

Для произвольного полукольца S с нулем 0 обозначим через

$$r(S) = \{s \in S : \exists t \in S\, (s + t = 0)\}$$

множество всех элементов из S, имеющих противоположный элемент. Ясно, что $r(S)$ — строгий идеал полукольца S, являющийся кольцом. Идеал J полукольца S называется *строгим*, когда $a + b \in J$ влечет $a \in J$ для любых $a, b \in S$. Строгие идеалы в полукольцах являются полустрогими, но, вообще говоря, не наоборот; так, в кольцах все идеалы полустрогие, а строгими будут только сами кольца (как несобственные идеалы). В дистрибутивных решетках все идеалы строгие.

Основные направления в теории полуколец

В развитии теории полуколец можно выделить следующие основные направления:

1. *Кольце-модульное направление* как обобщение и расширение теории колец и модулей на полукольца и полумодули над ними. Рассматриваются структурные свойства полуколец с нулем и единицей. Исследуются полукольца с различными дополнительными условиями, гомологические свойства полуколец и т. д.

2. *Универсально-алгебраическое направление*, базирующееся на теории полугрупп и универсальной алгебре. Изучаются полукольца в широком понимании, в том числе и с некоммутативным сложением. Важную роль играют свободные полукольца, расширения полуколец, многообразия и квазимногообразия полуколец, решетки идеалов и конгруэнций полуколец.

3. *Изучение полуколец специального вида.* Исследуются полукольца непрерывных функций, сечений, соответствий; матричные полукольца в рамках линейной алгебры над полукольцами; тропические полукольца с применением в теории оптимального управления; полукольца путей в графах и т. п.

Первые два направления охватывают изучение абстрактных полуколец, построение структурных теорий для отдельных важных и интересных классов полуколец. Третье направление, включая теорию конечных полуколец, служит основой для полукольцевых приложений в компьютерных науках, теории кодирования и криптографии, оптимальном управлении, лингвистике, экономике.

Рассмотрим подробнее каждое из основных направлений.

Кольце-модульное направление

Перечислим некоторые актуальные темы и сюжетные линии.

Расширения полуколец

Затронем один из фрагментов общей теории полуколец.

Полукольцо S с нулем 0 назовем *расширением полукольца R посредством полукольца T*, если на S существует конгруэнция ρ, для которой класс нуля $[0]_\rho$ изоморфен R и фактор-полукольцо S/ρ изоморфно T.

На полукольце S с нулем 0 существуют три конгруэнции, имеющие $r(S)$ классом нуля.

Во-первых, конгруэнция Берна $\rho(r(S))$, фактор-полукольцо по которой является антикольцом [10, с. 25].

Во-вторых, «разностная» конгруэнция σ: $s\sigma t \Leftrightarrow \exists x, y \in S\,(s + x = t \,\&\, t + y = s)$, фактор-полукольцо по которой упорядочиваемо [10, с. 30].

В-третьих, наименьшая конгруэнция на S, фактор-полукольцо по которой аддитивно идемпотентно [11, предложение 2].

Очевидно, что упорядочиваемые полукольца суть антикольца, а аддитивно идемпотентные полукольца упорядочиваемы.

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Любое полукольцо S с нулем является расширением однозначно определенного (с точностью до изоморфизма) кольца $r(S)$ посредством аддитивно идемпотентного полукольца.*

Заметим, что в данной теореме аддитивно идемпотентное полукольцо определено, вообще говоря, неоднозначно.

Теорема [12, предложение 4.1.1]. *Любое полукольцо S с нулем, для которого кольцо $r(S)$ обладает единицей, однозначно представимо в виде прямой суммы кольца и антикольца.*

Редукция к базовым классам полуколец

В структурной теории полуколец роль «кирпичиков», из которых могут строиться произвольные полукольца, играют следующие типы полуколец:

i) *кольца* как полукольца, аддитивная полугруппа которых является коммутативной группой;

ii) *дистрибутивные решетки* как полукольца с тождествами коммутативности $x + y = y + x$ и $xy = yx$, идемпотентности $xx = x$ и поглощения $x + xy = x$;

iii) *полутела*. Полутела изучались в работах [5; 13–15], [16, Дополнение].

Попарные пересечения классов колец, дистрибутивных решеток и полутел совпадают с классом одноэлементных полуколец, определяемым тождеством $x = y$.

Одна из актуальных задач общей теории полуколец заключается в сведении изучения полуколец к названным классам полуколец посредством различных алгебраических и теоретико-множественных конструкций. С другой стороны, исследовались полукольца, представляющие собой некий симбиоз:

1) колец и дистрибутивных решеток;

2) колец и полутел;

3) дистрибутивных решеток и полутел.

Приведем примеры классов полуколец указанных переплетений.

1) Многообразие M полуколец, порожденное булевыми кольцами и дистрибутивными решетками. В многообразии всех полуколец многообразие M определяется тождествами $xy = yx, xx = x, x + 2xy = x$, и каждое полукольцо из M является подпрямым произведением двухэлементных полей и двухэлементных цепей (см. [17, предложение 6.3.2]).

2) Дизъюнктные полукольцевые объединения S кольца R и полутела U рассматривались в работах [18], [19]. Решены задачи существования и единственности полуколец S для заданных R и U, описано строение их идеалов и конгруэнций.

3) К таким полукольцам принадлежат абелево-регулярные положительные полукольца [20, глава 2], [21–23]. Полукольцо S с нулем 0 и единицей 1 было названо *абелево-регулярным положительным полукольцом* (arp-полукольцом), если S — *регулярное*, т. е. для любого $a \in S$ найдется такой $b \in S$, что $aba = a$, его мультипликативные идемпотенты коммутируют с любыми элементами из S, *положительное*, т. е. все элементы вида $s + 1$ обратимы в S. Впервые коммутативные arp-полукольца появились в [24, замечание 3] под названием регулярные.

В произвольном arp-полукольце S выделяются ограниченная дистрибутивная решетка $L(S)$ всех мультипликативных идемпотентов и полутело $U(S)$ всех обратимых элементов. Рассматривается также естественный решеточный гомоморфизм $\psi_S : L(S) \to ConU(S)$ решетки $L(S)$ в решетку конгруэнций полутела $U(S)$. Оказывается, что любое arp-полукольцо S однозначно, с точностью до изоморфизма, восстанавливается по своей индуцированной тройке $\langle L(S), U(S), \psi_S \rangle$. arp-Полукольцо S называется *булевым arp-полукольцом*, если решетка $L(S)$ булева. Теория arp-полуколец подробно изложена в главе 2 монографии [20]. Класс обобщенных arp-полуколец изучен в [22].

Выполнение кольце-модульных теорем в классе полуколец

Вызывают большой интерес исследования, связанные с выполнением кольце-модульных теорем в классе полуколец. Зачастую справедливость той или иной теоремы теории колец и модулей для полукольца S делает S близким к кольцу или даже кольцом, что дает характеризации колец в терминах полуколец. Приведем несколько подобных результатов, в которых S — произвольное полукольцо с 0 и 1.

Теорема [25]. *Полукольцо многочленов $S[x]$ нетерово (нетерово справа) тогда и только тогда, когда S есть нетерово (соответственно, нетерово справа) кольцо.*

Полукольцо S называется *нетеровым* (*нетеровым справа*), если каждый его идеал (правый идеал) конечно порожден. Напомним, что классическая теорема Гильберта о базисе утверждает, что над нетеровым справа кольцом кольцо $S[x]$ нетерово справа.

Теорема [26, предложение 2]. *Полное матричное полукольцо $M_n(S)$ регулярно при некотором (любом) $n \geq 3$ тогда и только тогда, когда S есть регулярное кольцо.*

Существуют регулярные полукольца, не являющиеся кольцами. Заметим, что полукольцо $M_2(S)$ регулярно $\Leftrightarrow$ S есть прямая сумма регулярного кольца и идемпотентного булева *arp*-полукольца [26, предложение 5]. Хорошо известно, что для регулярных колец кольца матриц $M_n(S)$ регулярны.

Теорема [27, теорема 3]. *Для полукольца S выполняется критерий Бэра, и любой (правый) S-полумодуль изоморфно вкладывается в некоторый инъективный S-полумодуль в том и только в том случае, когда S — кольцо.*

Утверждение достаточности в этой теореме суть две известные кольце-модульные теоремы.

Вопросам гомологической характеризации полуколец посвящена обзорная статья С. Н. Ильина [28].

Исследования полуколец многочленов

Выше нами было указано, что полукольца многочленов имеют важное значение с теоретической точки зрения, а особенно в связи с разнообразными приложениями. Удивительным при этом оказывается тот факт, что серьезных исследований полуколец многочленов крайне мало. Подтверждение этим словам является и почти полное неупоминание многочленов в монографии Голана.

Интересными в свете сказанного выглядят полученные М. В. Бабенко новые результаты о полукольцах косых многочленов. Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S, записываемых слева от переменной x. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. С такими операциями $S[x, \varphi]$ становится полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Выше уже говорилось, что явный перенос теоремы Гильберта о базисе на полукольца не верен. Однако в работе Л. Дейла [29] были определены монические идеалы полукольца многочленов $S[x]$ над коммутативным полукольцом S; именно идеал J полукольца $S[x]$ называется *моническим*, если для любого многочлена из J любой его одночлен лежит в J. Дейлом было доказано, что *если коммутативное полукольцо S нетерово, то полукольцо $S[x]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей монических идеалов*. Отметим, что в полукольце конечно порожденность всех левых (правых) идеалов равносильна условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) идеалов [1, prop. 6.16].

Определим аналогичным образом монические односторонние идеалы для произвольного полукольца многочленов, в частности для полукольца косых многочленов, и договоримся их называть левыми и правыми m-идеалами.

Теорема. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нетерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Описания левых и правых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$ основываются на их коэффициентных множествах и принципиально не отличаются от случая полукольца $S[x]$. Интересным и важным является выяснение строения главных m-идеалов.

Заметим, что в произвольном полукольце $R = S[x, \varphi]$ косых многочленов имеются тривиальные главные левые m-идеалы — нулевой, несобственный и порожденный одночленом x^k. Вопрос о существовании главного левого m-идеала, порожденного неодночленом, оказался весьма непростым.

Через $\mathrm{ann}_l(A) = \{s \in S : sA = 0\}$ обозначим *левый аннулятор множества* $A \subseteq S$. Полукольцо S называется *риккартовым слева*, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\mathrm{ann}_l(a) = Se$; *левым полукольцом Безу*, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом. Эндоморфизм φ полукольца S называется *жестким*, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in S$.

Теорема [30, предложение 1]. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x, \varphi]$. Тогда:*

1) *если для любого $i = 0, \ldots, k-1$ выполнено*

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i),$$

то $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R;

2) *если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, что $L = Rf$ и $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$ для всех $i = 0, \ldots, k-1$.*

Конструкция построения главного m-идеала с нетривиальным образующим многочленом, применяемая в доказательстве этой теоремы, может быть перенесена на произвольное полукольцо многочленов при условии, что полукольцо коэффициентов обладает нетривиальной алгеброй центральных дополняемых идемпотентов.

Решеточно упорядоченные полукольца

В монографии Голана [1, глава 21] под решеточно упорядоченным полукольцом понимается полукольцо S с дополнительными решеточными операциями $\vee$ и $\wedge$ и для любых $a, b \in S$ выполняются условия $a + b = a \vee b$ и $ab \le a \wedge b$. Такое определение является достаточно узким, под него попадают только аддитивно идемпотентные полукольца. Наиболее общее определение решеточно упорядоченного полукольца мы получаем при почти дословном переносе с понятия l-кольца. Сейчас мы остановимся на некотором промежуточном варианте, так называемых drl-полукольцах.

Определение [31]. Алгебра $(S, +, \cdot, -, \vee, \wedge, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

1) $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо;

2) $(S, \vee, \wedge)$ — решетка с порядком $\le$;

3) $x - y$ — наименьший элемент z, такой, что $y + z \ge x$;

4) $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z), x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$ для любых $x, y, z \in S$;

5) $x(y - z) = xy - xz, (x - y)z = xz - yz$ для любых $x, y, z \in S$;

6) $(x - y) \vee 0 + y \leq x \vee y$ для любых $x, y \in S$;

7) $xy \geq 0$ для любых $0 \leq x, y \in S$.

Это определение было дано в 1981 г. Ранго Рао на основе понятия drl-полугруппы (dually residuated lattice ordered semigroup), введенного в обиход К. Свами в 1965 г. [32].

Идеал drl-полукольца S, являющийся выпуклым множеством относительно решеточного порядка в S, называется *l-идеалом.* Произвольная конгруэнция ρ на drl-полукольце S — это в точности отношение Берна по l-идеалу J, причем J является классом нуля ρ.

Рассмотрим два важных l-идеала: $L(S) = \{a \in S : 0 - a = 0\}$ — l-идеал drl-полукольца S, являющийся положительно упорядоченным drl-полукольцом с наименьшим элементом 0 и $R(S) = \{0 - a : a \in S\}$ — всех аддитивно обратимых элементов из S. Их значение проявляется в следующих теоремах о разложениях drl-полукольца.

Теорема [33, теорема 4.1]. *Любое drl-полукольцо является прямой суммой l-кольца и drl-полукольца с наименьшим элементом:* $S = R(S) \oplus L(S)$.

Теорема [33, теорема 4.2]. *drl-Полукольцо S есть прямая сумма l-кольца и drl-полукольца с наименьшим и наибольшим элементами тогда и только тогда, когда выполняется условие* $(\exists i \in S)(\forall a \in S)(a + (i - a) = i + i)$.

Решетка L называется *брауэровой*, если для любых ее элементов a, b множество всех таких $x \in L$, что $b \vee x \geq a$, имеет наименьший элемент.

Теорема [33, теорема 4.3]. *drl-Полукольцо S есть прямая сумма l-кольца и брауэровой решетки в точности тогда, когда для любых $a, b, c \in S$ выполняется условие* $(a + b) - (c + c) = (a - c) + (b - c)$.

Теорема [33, теорема 4.4]. *Пусть S — drl-полукольцо, удовлетворяющее условиям* $(a + b) - (c + c) = (a - c) + (b - c)$ *и* $(\exists i \in S)(\forall a \in S)(a + (i - a) = i + i)$. *Тогда равносильны утверждения:*

1) *S есть прямая сумма l-кольца и булевой алгебры;*

2) $i - (i - a) = a$ *для любого* $a \in S$;

3) $(i - a) \wedge a = ((i - a) \wedge a + (i - a) \wedge a) - (i - a) \wedge a$ *для любого* $a \in S$.

Известно, что *аддитивно сократимые* полукольца (т. е. полукольца с квазитождеством $a + c = b + c \Rightarrow a = b$), и только они, вкладываются в кольца, в свои кольца разностей. В случае drl-полуколец ситуация аналогичная.

Теорема [33, предложения 5.2 и 5.4]. *Кольцо разностей R аддитивно сократимого drl-полукольца S является l-кольцом; решетки l-идеалов* $\operatorname{Id} R$ *и* $\operatorname{Id} S$ *изоморфны.*

Теорема [33, предложения 6.1 и 6.2]. *Любое drl-полутело является линейно упорядоченным; каждое drl-полутело либо идемпотентно, либо содержит drl-полуполе, изоморфное $\mathbb{Q}^+$.*

Метод функциональных представлений в теории полуколец

Пучок, изначально — пучок абелевых групп, был открыт Ж. Лере в 1945 г. и со временем стал важным инструментом алгебраической топологии. Кроме многочисленных применений пучков (теория категорий, логика, нестандартный анализ и пр.) отметим метод функциональных (пучковых) представлений алгебр. Пучок в теории представлений можно считать обобщением конструкции алгебры непрерывных функций, а в некоторых случаях, при факторных представлениях, — разложением представляемой алгебры в подпрямое произведение.

За 60–90-е гг. прошлого столетия накопилось большое число результатов по представлениям колец, дистрибутивных решеток, почти-колец, универсальных алгебр [34–37]. Это стало предпосылкой для развития теории пучковых представлений полуколец. Были построены конкретные пучки полуколец и полумодулей, получены представления полуколец и полумодулей их сечениями. Исследованы компактные представления, полнота представлений полуколец, другие вопросы общей теории представлений [16; 23; 38; 39]. Найдены представления некоторых классов полутел [14; 16, Дополнение].

Среди результатов последних лет, связанных с этой тематикой, отметим полученные характеризации полуколец свойствами пирсовских слоев (Р. В. Марков, М. В. Бабенко, В. В. Чермных) и развитие теории функциональных представлений drl-полуколец (О. В. Чермных, В. В. Чермных).

Множество BS всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S образует булево кольцо (относительно полукольцевого умножения и с «подправленной» операцией сложения). Для любого максимального идеала M из BS определяем конгруэнцию на полукольце S:

$$a \equiv b (\operatorname{mod} \rho_M) \Leftrightarrow ae = ba \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M.$$

Фактор-полукольца вида S/ρ_M называются *пирсовскими слоями* полукольца S.

Теорема [40, предложение 9]. *Для полукольца S равносильны следующие условия:*

1) *S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, каждый идемпотент которого является центральным дополняемым идемпотентом;*

2) *все пирсовские слои полукольца S являются полукольцами с делением.*

Результаты подобного типа были получены в [40; 41] для заменяемых полуколец, полуколец без нильпотентных элементов, регулярных полуколец с некоторыми дополнительными условиями, риккартовых, бирегулярных полуколец.

Исследования пирсовских слоев полуколец было продолжено в работах М. В. Бабенко и В. В. Чермных [30; 42] в классе полуколец многочленов, и особенно для полукольца косых многочленов. Своеобразие полученных результатов, на наш взгляд, заключается в том, что зачастую удается получить характеризацию полукольца многочленов в терминах как пирсовских слоев полукольца многочленов, так и пирсовских слоев полукольца коэффициентов. Как демонстрацию высказанного приведем один из типичных наших результатов.

Теорема. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *$R = S[x, \varphi]$ — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов*;

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любого $f \in R$*;

3) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любого $a \in S$*;

4) *S — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов.*

Пусть S — drl-полукольцо. Собственный l-идеал P drl-полукольца S называется *неприводимым*, если $A \cap B \subseteq P$ влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ для любых l-идеалов A, B.

На множестве $\mathrm{Irr}S$ всех неприводимых l-идеалов из S введем *стоуновскую* топологию. Открытыми множествами являются множества вида $D(A) = \{P \in \mathrm{Irr}S : A \nsubseteq P\}$, A — l-идеал.

Пусть $P \in \mathrm{Irr}S$ и U — открытое в $\mathrm{Irr}S$ подмножество. Положим: $0_U = \cap\{Q \in \mathrm{Irr}S : Q \in U\}$, $0_P = \cup\{0_V : V$ — открыто в $\mathrm{Irr}S$ и $P \in V\}$.

Тогда получаем пучок drl-полуколец $(\Pi(S), \mathrm{Irr}S)$, где $\Pi(S) = \dot\cup(S/0_P)$ по всем $P \in \mathrm{Irr}S$.

Элемент произвольного drl-полукольца S, не лежащий ни в одном собственном l-идеале из S, называется *формальной единицей.*

Теорема [43, теорема 1]. *Для пучка* $(\Pi(S), \mathrm{Irr}\, S)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) S изоморфно drl-подполукольцу $\hat{S}$ drl-полукольца всех глобальных сечений пучка Π*, и drl-полукольцо всех глобальных сечений с компактными носителями лежит в $\hat{S}$;*

2) если S содержит формальную единицу, то S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка Π.

f-Полукольцом назовем drl-полукольцо, являющееся подпрямым произведением линейно упорядоченных drl-полуколец.

Симметрической разностью называется элемент

$$x * y = (x - y) \vee (y - x) = x \vee y - x \wedge y.$$

Элементы $a, b \in S$ называются *ортогональными*, если $|a| \wedge |b| = 0$, где $|a| = a * 0$. Для любого подмножества A drl-полукольца S обозначим через A^* множество всех элементов из S ортогональных каждому элементу из A.

Для неприводимого l-идеала P положим $0(P) = \{a \in S : a^* \nsubseteq P\}$. Получаем пучок f-полуколец: $(L(S), \mathrm{Irr}\, S) = (\dot\cup S/0(P), \mathrm{Irr}\, S)$.

Назовем f-полукольцо S *гельфандовым*, если для любых различных максимальных l-идеалов M и N из S найдутся такие элементы $a \in M \setminus N$ и $b \in N \setminus M$, что $|a| \wedge |b| = 0$.

Теорема [43, теорема 2]. *Гельфандово f-полукольцо S с единицей* 1 *изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(L(S), \mathrm{Max}\, S)$*; каждый слой пучка является f-полукольцом с единственным максимальным l-идеалом, а базисное пространство — компакт.*

Изоморфные представления сечениями пучка $(L(S), \mathrm{Irr}\, S)$ получены также для f-полуколец: риккартовых, бирегулярных и строго регулярных [43, теоремы 3, 4, 5].

Собственный l-идеал P drl-полукольца S называется *первичным*, если для любых l-идеалов I, J из S включение $IJ \subseteq P$ влечет $I \subseteq P$ или $J \subseteq P$.

Пусть $\operatorname{Spec} S$ — *первичный спектр* drl-полукольца — пространство всех первичных l-идеалов из S со стоуновской топологией. Для открытого $U \subseteq \operatorname{Spec} S$ положим $O_U = \cap\{P \in \operatorname{Spec} S : P \in U\}$ и для $P \in \operatorname{Spec} S$ $O_P = \cup\{O_U : U$ — открытая окрестность точки $P\}$. Тогда получаем еще одну конструкцию пучка $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$ drl-полуколец со слоями S/O_P для каждого $P \in \operatorname{Spec} S$.

drl-Полукольцо называется *l-полупервичным*, если пересечение всех его первичных l-идеалов равно нулю.

Теорема [44, теорема 1]. *Произвольное l-полупервичное drl-полукольцо S с формальной единицей изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$.

Пусть сейчас S — произвольное drl-полукольцо. Назовем l-идеал A *дополняемым*, если $A + B = S$, $A \cap B = 0$ для некоторого l-идеала B.

Множество всех дополняемых l-идеалов drl-полукольца S обозначим через βS. Поскольку решетка $\operatorname{Id} S$ всех l-идеалов drl-полукольца S дистрибутивна, то βS будет булевой решеткой, но не обязательно подрешеткой решетки $\operatorname{Id} S$.

Пространство $\operatorname{Max} \beta S$ булевой решетки βS является нульмерным компактом, т. е. хаусдорфовым компактным пространством с базой из открыто-замкнутых множеств.

Пусть $M \in \operatorname{Max} \beta S$. Обозначим $0_M = \cup\{A \in \beta S : A \in M\}$. Получаем еще один пучок drl-полуколец со слоями $S/0_M$, $M \in \operatorname{Max} \beta S\}$, который обозначим через $(\Psi(S), \operatorname{Max} \beta S)$.

Теорема [44, теорема 2]. *Произвольное drl-полукольцо S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(\Psi(S), \operatorname{Max} \beta S)$ *неприводимых drl-полуколец.*

Наконец, в [45] определяются компактные пучки drl-полуколец и изучаются их свойства. В частности, описано строение неприводимых и максимальных l-идеалов drl-полукольца сечений компактного пучка. Получено описание компактного пучка f-полуколец в терминах непрерывного отображения его неприводимого (и максимального) спектра на компакт [45, теорема 1]. В работе также содержится доказательство того, что f-полукольцо является гельфандовым тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу всех глобальных сечений компактного пучка f-полуколец с единственным максимальным идеалом [45, теорема 2].

Универсально-алгебраическое направление

Характерным результатом данного направления служит описание минимальных многообразий полуколец, полученное С. В. Полиным [46].

Проиллюстрируем это направление на примере мультипликативно идемпотентных полуколец [12; 17]. Полукольцо с идемпотентным умножением (с тождеством $xx = x$) называется *мультипликативно идемпотентным.* Мультипликативно идемпотентными полукольцами являются булевы кольца и дистрибутивные решетки. Полукольцо, являющееся одновременно мультипликативно идемпотентным и аддитивно идемпотентным (с тождеством $x+x = x$), называется просто *идемпотентным.*

Перечислим все двухэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца: поле $\mathbb{Z}_2$; дистрибутивная решетка $\mathbb{B}$; идемпотентное монополукольцо $\mathbf{D} = \{a, 1\}$; мультипликативно идемпотентное полукольцо $\mathbf{T} = \{\infty, 1\}$ с константным сложением $x + y = \infty$; идемпотентное *полукольцо левых нулей* $\mathbf{L} = \{a, b\}$, т. е. полукольцо с тождеством $xy = x$; идемпотентное *полукольцо правых нулей* $\mathbf{R} = \{a, b\}$, т. е. полукольцо с тождеством $xy = y$.

Собственный идеал J полукольца S называется: *простым*, если $\forall a, b \in S(ab \in J \Rightarrow (a \in J \text{ или } b \in J))$; *максимальным*, если $J \subset I$ влечет $I = S$ для любого идеала I в S.

Напомним, что дистрибутивная решетка с $1 \neq 0$, каждый элемент a которой имеет дополнение b: $a + b = 1$ и $ab = 0$, называется *булевой.* Дистрибутивная решетка S с нулем 0, в которой интервалы $[0, a] = \{s \in S : s \leq a\}$ являются булевыми решетками для любых $a \in S$, называется *обобщенной булевой* решеткой.

Сформулируем ряд утверждений о структурных свойствах мультипликативно идемпотентных полуколец.

Теорема [17, теорема 1.2.1]. *Произвольное полукольцо S коммутативно и мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда простые идеалы в S разделяют его элемент, т. е. для любых двух неравных элементов полукольца S в нем существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов.*

Следствие (теорема Биркгофа). *Всякая дистрибутивная решетка S изоморфна некоторой решетке множеств (множеств простых идеалов в S).*

Теорема [17, предложение 3.3.2]. *Любое конечнопорожденное мультипликативно идемпотентное полукольцо конечно.*

Теорема [17, теорема 4.1.1]. *Любое конечное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем разлагается в прямую сумму булева кольца и мультипликативно идемпотентного антикольца.*

В главе 5 монографии [17] изучались свойства решетки $L(M)$ всевозможных подмногообразий многообразия М всех мультипликативно идемпотентных полуколец. Доказано, что решетка $L(M)$ счетная, с псевдодополнениями, 0-дистрибутивная и немодулярная. В решетке $L(M)$ найдены все 64 псевдодополнения подмногообразий в M: относительно отношения включения они образуют булеву подрешетку в $L(M)$.

Теорема [17, следствие 6.2.2]. *Многообразие* $M(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T})$ *полуколец, порожденное полукольцами* $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T}$*, задается одним тождеством* $x + 2xy + yz = x + 2xz + yz$.

Теорема [17, теорема 6.2.2]. *Решетка подмногообразий многообразия* $M(\mathbf{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T})$ *является 16-элементной булевой решеткой.*

В параграфе 6.3 [17] описаны все 16 подмногообразий многообразия $M(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T})$.

Теорема [47]. *Решетка подмногообразий многообразия всех идемпотентных полуколец является 78-элементной дистрибутивной решеткой.*

Сформулируем два новых результата, полученных Е. М. Вечтомовым и А. А. Петровым.

Теорема. *Любое конгруэнц-простое мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем изоморфно* $\mathbb{B}$ *или* $\mathbb{Z}_2$.

Теорема. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

Изучение полуколец специального вида

Коснемся нескольких важных тем.

Линейная алгебра над полукольцами

Теории матриц с коэффициентами из различных полуколец посвящены докторские диссертации А. Э. Гутермана [48] и Я. Н. Шитова [49], статьи Н. К. Кривулина [50; 51]. Исследовались разнообразные ранги матриц над полукольцами, линейные и полукольцевые гомоморфизмы полуколец матриц. Эта тематика активно развивается, имеет многочисленные приложения.

Идемпотентная математика

Большое влияние на направления развития теории полуколец оказывают потребности решения практических задач — полукольца успешно применяются в дискретной математике, компьютерной алгебре, идемпотентном анализе, теории оптимального управления и других разделах математики и ее приложениях.

Как пример отметим тропическую (идемпотентную) математику. Это быстро развивающаяся область математики, которая связана с изучением полуколец с идемпотентным сложением. Название «тропическая» появилось в честь бразильского математика венгерского происхождения Имре Симона, исследовавшего тропическое полукольцо в связи с вопросами информатики и теории оптимизации.

Первоначально тропическая математика развивалась в тесной связи с прикладными вопросами. Так, некоторые задачи оптимизации при формулировке их на языке идемпотентных полуколец становятся более удобными (например, с линейными ограничениями и целевой функцией), и одно из важных направлений исследований тропической математики ориентировано на разработку эффективных методов решения как для известных, так и новых оптимизационных задач. Одной из первых работ по идемпотентной математике, по крайней мере в нашей стране, была статья Н. Н. Воробьева 1967 года [52], в которой рассматривались начала матричной и линейной алгебры над идемпотентными полукольцами. Развитие идей тропической математики привело к интересным теоретическим результатам. Отметим построение начал идемпотентной линейной алгебры, исследование аналогов основных понятий «евклидовой» геометрии, тропической алгебраической геометрии [53].

Основной вклад в развитие тропической математики (как теоретических, так и прикладных направлений) принадлежит академику В. П. Маслову и его школе [54–56]. Созданный ими идемпотентный анализ и идемпотентный функциональный анализ базируются на квантовании (и деквантовании) Маслова — это логарифмические преобразования, восходящие еще к работам Э. Шредингера. Интересной, а для некоторых и проясняющей природу квантования Маслова, выглядит следующая аналогия: «...наряду с традиционной математикой (над полями) возникает ее «тень» — идемпотентная математика. Эта тень соотносится с традиционной математикой примерно так же, как классическая физика с квантовой теорией» [57].

Полукольца непрерывных функций

Они образуют класс полуколец, имеющих функционально-топологическую природу.

Классическим объектом функциональной алгебры служит кольцо $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ всех непрерывных действительнозначных функций на топологическом пространстве X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций [58]. Кольцо $C(X)$ является кольцом разностей как полукольца $C^+(X) = C(X, \mathbb{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных функций на X, так и полуполя $U(X) = C(X, \mathbb{P})$ всех непрерывных положительных функций на X.

Если в полукольцах $C^+(X)$ и $U(X)$ вместо обычной операции сложения взять операцию $\vee$ (max двух функций), сохранив операцию умножения, то получим аддитивно идемпотентное полукольцо $C^\vee(X) = C(X, \mathbb{R}^\vee)$ и аддитивно идемпотентное полуполе $U^\vee(X) = C(X, \mathbb{P}^\vee)$. Полукольца $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ будут положительными полукольцами, т. е. в них элементы вида $f+1$ и $f \vee 1$ обратимы.

Начало систематическому исследованию полуколец $C^+(X)$ и полуполей $U(X)$ положила статья 1998 г. [59]. Теории полуколец непрерывных функций посвящены двухтомная монография [60], обзорная работа [61], статьи [62; 63]. Изучение различных видов полуколец непрерывных функций продолжается и расширяется.

В книге [60] поставлены открытые вопросы для решения и дальнейшего развития теории полуколец непрерывных функций; см. Задачи 9.31—9.32, 14.1 (эта задача уже решена В. В. Сидоровым), 14.97, 14.98, 16.14, 18.14—18.16, 19.5, 22.27, 41.2 и Заключение.

Полукольца с циклическим умножением

Рассматриваются циклические полукольца как с коммутативным, так и с некоммутативным сложением.

Полукольцо S называется (мультипликативно) *циклическим*, если его мультипликативная полугруппа является циклической $S = (a) = \{1, a, \ldots, a^m, \ldots\}$. Для конечного циклического $(k+n)$-элементного полукольца $S = (a)$ имеем

$$S : 1, a, \ldots, a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+n-1}, \text{ где } a^{k+n} = a^k$$

при $k \geq 0, n \geq 0, k+n \geq 2$.

Такие циклические полугруппа и полукольцо $S = (a)$ имеют *тип* (k, n) и образующую a. При $n = 1$ элемент a^k будет поглощающим по умножению, а при $n \geq 2$ получаем цикл $\{a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+n-1}\}$, являющийся полуполем с некоммутативным сложением. Если $k = 0$, то S — циклическое полуполе с некоммутативным сложением. Поэтому циклические полукольца с коммутативным сложением имеют тип $(k, 1)$.

С точностью до изоморфизма существуют четыре бесконечных циклических полукольца. На бесконечной мультипликативной циклической полугруппе $S = (a) : 1 < a < \ldots < a^m \ldots$ зададим четыре операции сложения: max и min относительно линейного порядка $\leq$; левое $(x + y = x)$ и правое $(x+y = y)$. Получаем четыре циклических полукольца, первые два из которых с идемпотентным коммутативным сложением, последние два — с идемпотентным некоммутативным сложением.

Проблема описания конечных циклических полуколец — это задача нахождения всевозможных операций сложения на мультипликативной циклической полугруппе S типа (k, n), превращающих S в полукольцо. Эта задача оказалась совсем непростой.

Классификация конечных циклических полуколец с неидемпотентным коммутативным сложением предложена в статье [64]. Новый метод изучения конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением предложен в статье [65].

Циклические полукольца с некоммутативным сложением исследовались в работах [66; 67] в зависимости от условий идемпотентности или неидемпотентности операции сложения. См. также обзор [68].

Мини-полукольца

Полукольца с небольшим числом элементов играют заметную роль в теории полуколец как наглядные примеры, иллюстрирующие многие специфические полукольцевые понятия и показывающие структурное разнообразие класса полуколец.

С точностью до изоморфизма существует 10 двухэлементных полуколец, задаваемых таблицами Кэли операций сложения и умножения на двухэлементном множестве $\{a, b\}$. Существуют 43 трехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца [69] и 61 трехэлементное аддитивно идемпотентное полукольцо [70]. Для перечисления мини-полуколец использовались компьютерные программы.

Наряду с конечными циклическими полукольцами мини-полукольца с различными дополнительными условиями могут найти применение в криптографии и теории кодирования.

Список литературы

1. **Golan J. S.** Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

2. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which cancelation law of addition does not hold // *Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. Pp. 914–920.*

3. **Dedekind R.** Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen // *Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlessungen Uber Zahlentheorie, 4 Anfl., Druck und Verlag, Braunschweig. 1894.*

4. **Hilbert D.** Über den Zahlbegriff // *Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1899. V. 8. Pp. 180–184.*

5. **Hebisch U., Weinert H. J.** Semirings: theory and applications in computer science. Series in Algebra. Vol. V. World Scientific. Singapore, 1998. 361 p.

6. **Golan J. S.** The theory of semirings with applications in mathemayics and theoretical computer science // *Pitman monographs and syrveys in pure and applied mathematics. 1992 (1991). V. 54.*

7. **Glazek K.** A Short Guide Through the Literature on Semirings // *Preprint No. 39. University of Wroclaw, Math. Inst., Wroclaw. 1985.*

8. **Glazek K.** A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science. Technical University Press. 2002.

9. **Масляев Д. А., Чермных В. В.** Полукольца косых многочленов Лорана // *Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 521–533.*

10. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца : учебное пособие. Киров: Изд-во ВГПУ. 2000, 44 с.

11. **Лукин М. А.** Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах // *Проблемы современного математического образования в*

педвузах и школах России: Интерактивные формы обучения математике студентов и школьников : материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Киров: Изд-во ВятГУ, 2012. С. 312–316.

12. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца // *Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18. Вып. 4. С. 41–70.*

13. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** К теории полутел //*Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 2. С. 161–162.*

14. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Полутела и их свойства // *Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.*

15. **Полин С. В.** Простые полуполя и полутела // *Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.*

16. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец : монография. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

17. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 144 с.

18. **Вечтомов Е. М., Лукин М. А.** Полукольца, являющиеся объединениями кольца и полутела // *Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 6. С. 159–160.*

19. **Лукин М. А.** О полукольцевом объединении кольца и полутела // *Известия вузов. Математика. 2008. № 12. С. 76–80.*

20. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец : монография. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.

21. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Структура абелево-регулярных положительных полуколец // *Успехи математических наук. 2007. Т. 62. Вып. 1. С. 199–200.*

22. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Обобщенные абелево-регулярные положительные полукольца // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2007. Вып. 7. С. 3–16.*

23. **Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Vechtomov E. M.** Abelian-regular positive semirings // *Journal of Mathematical Science [New York]. 1999. V. 97. Pp. 4162–4176.*

24. **Вечтомов Е. М.** Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // *Математические заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 15–24.*

25. **Богдалов И. Ф.** Обратимость теоремы Гильберта о базисе в классе полуколец // *Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России : тезисы докладов Межрегиональной научной конференции. Киров: Изд-во ВятГУ, 1998. С. 171–172.*

26. **Ильин С. Н.** Критерий регулярности полных матричных полуколец // *Математические заметки. 2001. Т. 70. Вып. 3. С. 366–374.*

27. **Ильин С. Н.** О применимости двух теорем теории колец и модулей // *Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 563–574.*

28. **Ильин С. Н.** О гомологической классификации полуколец // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.*

29. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings // *Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. Pp. 45–50.*

30. **Бабенко М.В., Чермных В. В.** О полукольцах косых многочленов над полукольцом Безу // *Математические заметки. 2022. Т. 111* (в печати).

31. **Rao P. R.** Lattice ordered semirings // *Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1981. V. 9. Pp. 119–149.*

32. **Swamy K. L. N.** Duallity residuated lattice ordered semigroups // *Math. Ann. 1965. V. 159. Pp. 105–114.*

33. **Чермных О. В.** О drl-полугруппах и drl-полукольцах // *Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 4. С. 167–179.*

34. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of noncommutative rings // *Comm. Algebra. 1976. V. 39. Pp. 512–526.*

35. **Grothendieck A., Dieudonne J.** Éléments de Géométrie Algébrique1. — I.H.E.S., Publ. Math. 4. — Paris, 1960.

36. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings // *Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V.70. Pp. 1–112.*

37. **Simmons H.** Compact representations — the lattice theory of compact ringed spaces // *J. Algebra. 1989. V. 126, Pp. 493–531.*

38. **Чермных В. В.** Пучковые представления полуколец // *Успехи математических наук. 1993. Т. 48. № 5. С. 185–186.*

39. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец // *Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. № 3. С. 111–227.*

40. **Марков Р. В., Чермных В. В.** О пирсовских слоях полуколец // *Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19, № 2. С. 171–186.*

41. **Марков Р. В., Чермных В. В.** Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // *Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 213–221.*

42. **Бабенко М. В., Чермных В. В.** Пирсовские слои полуколец косых многочленов // *Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 48–60.*

43. **Чермных В. В., Чермных О. В.** Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец // *Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 946–971.*

44. **Чермных О. В.** Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. II // *Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 677–684.*

45. **Чермных В. В., Чермных О. В.** Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. III // *Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 3. С. 235–248.*

46. **Полин С. В.** Минимальные многообразия полуколец // *Математические заметки. 1980. Т. 27. № 4. С. 527–537.*

47. **Pastijn F.** Varieties Generated by Ordered Bands. II // *Order. 2005. V. 22. Pp. 129-143.*

48. **Гутерман А. Э.** Фробениусовы эндоморфизмы пространства матриц : дис. ... д-ра физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2009. 321 с.

49. **Шитов Я. Н.** Линейная алгебра над полукольцами : дис. ... д-ра физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2015. 302 с.

50. **Кривулин Н. К.** О решении обобщенных линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. 2006. № 1. С. 23–36.*

51. **Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.** Приближенная факторизация положительных матриц с помощью методов тропической оптимизации // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. 2020. Т. 16. № 4. С. 357–374.*

52. **Воробьев Н. Н.** Экстремальная алгебра положительных матриц // *Elektronische Informatiosverarbeitung und Kybernetik. 1967. V. 3. P. 39–71.*

53. **Joswig M.** Essentials of Tropical Combinatorics. Graduate Studies in Mathematics. V. 219. 2021. 398 p.

54. **Маслов В. П., Колокольцов В. Н.** Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.

55. **Gondran M., Minoux M.** Graphs, Dioids and Semirings. New Models and Algorithms. New York: Springer, 2008. 400 p.

56. **Kolokoltsov V. N., Maslov V. P.** Idempotent Analysis and its Applications. Mathematics and its Applications. Vol. 401. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

57. **Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.** Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // *Математические заметки. 2001. Т. 69. № 5. С. 758–797.*

58. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 p.

59. **Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.*

60. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. [под ред. Е. М. Вечтомова]. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2016. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 316 с.

61. **Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.** Полукольца непрерывных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.*

62. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 4. С. 87–107.*

63. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций // *Математические заметки. 2009. Т. 85. Вып. 6. С. 803–816.*

64. **Бестужев А. С., Вечтомов Е. М.** Циклические полукольца с коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 20. С. 8–39.*

65. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Конечные циклические полукольца с полурешеточным сложением, заданным двухпорожденным идеалом натуральных чисел // *Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 82–100.*

66. **Вечтомов Е. М., Орлова (Лубягина) И. В.** Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // *Фун-*

даментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.

67. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 17–41.*

68. **Бестужев А. С., Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Строение циклических полуколец // *Сборник материалов IX науч. конф. ЭКОМОД-2016 «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий» [Электронный ресурс]. Киров: Изд-во ВятГУ, 2016. С. 21–30.*

69. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца // *Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 2. С. 13—23.*

70. **Zhao X., Ren M., Crvenkovic S., Shao Y., Dapic** P. The variety generated by an ai-semiring of order three // *Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. Issue 2. Pp. 117–132.*

Summary

Vechtomov E. M., Chermnykh V. V. Main directions of the development of the semiring theory

The article highlights and analyzes the main directions of formation and development of Semiring Theory. The first ring-module direction summarizes and extends the theory of rings and modules onto semirings and semimodules over them. The next one is a universal algebraic direction that is based on Universal Algebra and Group Theory. The third direction is connected with study of special classes of semirings and is aimed at using semirings within Mathematics, in Computer Sciences and in applications of Mathematics. The first two directions contain investigating of the general theory of semirings, building structural theories for certain important and interesting classes of abstract semirings. The third direction includes describing of finite semirings with certain conditions.

Keywords: semiring, semifield, semimodule, ring, distributive lattice, development of Theory of Semirings.

References

1. **Golan J. S.** *Semirings and their Applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 38 p.

2. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which cancelation law of addition does not hold. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1934, V. 40. Pp. 914–920.

3. **Dedekind R.** Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen *Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlessungen Uber Zahlentheorie*, 4 Anfl., Druck und Verlag, Braunschweig, 1894.

4. **Hilbert D.** Über den Zahlbegriff. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 1899, V. 8. Pp. 180–184.

5. **Hebisch U., Weinert H. J.** *Semirings: theory and applications in computer science.* Series in Algebra. Vol. V. World Scientific, Singapore, 1998. 361 p.

6. **Golan J. S.** The theory of semirings with applications in mathemayics and theoretical computer science. *Pitman monographs and syrveys in pure and applied mathematics*, V. 54, 1992 (1991).

7. **Glazek K.** A Short Guide Through the Literature on Semirings. *Preprint No. 39. University of Wroclaw*, Math. Inst., Wroclaw, 1985.

8. **Glazek K.** *A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science.* Technical University Press, 2002.

9. **Maslyaev D. A., Chermnykh V. V.** Skew Laurent polynomial semiring. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical News], 2020, V. 17. Pp. 521–533.

10. **Vechtomov E. M.** *Vvedenie v polukoltsa: uchebnoe posobie* [Introduction to semirings: A Tutorial], Kirov, Izd. Vyatskogo gospeduniversiteta, 2000. 44 p.

11. **Lukin M. A.** On universal congruence on semirings. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: interaktivnye formy obucheniya matematike studentov i*

shkol'nikov. Materialy V Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsyi [Problems of Modern Mathematics Education in Pedagogical Universities and Schools of Russia: Interactive Forms of Teaching Mathematics to Students and Schoolchildren : Proceedings of the V All-Russian Scientific and Methodical Conference], Kirov, Izd. VyatGGU, 2012. Pp. 312–316.

12. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2013, V. 18. No. 4. Pp. 41–70.

13. **Vechtomov E. M., Cheraneva A. V.** On the theory of semidivision rings). *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 2008, V. 63. No. 2. Pp. 161–162.

14. **Vechtomov E. M., Cheraneva A. V.** Semifields and their properties. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, V. 14. No. 5. Pp. 3–54.

15. **Polin S. V.** Simple semisfields and semifields. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1974, V. 15. No. 1. Pp. 90–101.

16. **Chermnykh V. V.** *Funktsional'nye predstavleniya polukolets: monografiya* [Functional representations of semirings: monography], Kirov, Izd. VyatGGU, 2010. 224 p.

17. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Polukoltsa s idempotentnym umnozheniem: monografiya* [Semirings with idempotent multiplication: monography], Kirov, OOO «Raduga-PRESS», 2015. 144 p.

18. **Vechtomov E. M., Lukin M. A.** Semirings which are the unions of a ring and a semifield. *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 2008, V. 63. No. 6. Pp. 159–160.

19. **Lukin M. A.** Semiring joins of a ring and semifield. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Proceedings of Higher Education Institutions. Mathematics], 2008. No. 12. Pp. 76–80.

20. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnykh V. V.** *Elementy teorii polukolets* [Elements of semiring theory], Kirov, OOO «Raduga-PRESS», 2012. 228 p.

21. **Vechtomov E. M., Starostina O. V.** Structure of abelian regular positive semirings). *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 2007. V. 62. No. 1. Pp. 199–200.

22. **Vechtomov E. M., Starostina O. V.** Generalized abelian regular positive semirings). *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1. Matematuka. Mehanika. Informatika* [Bulletin of the Syktyvkar University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2007, Vol. 7. Pp. 3–16.

23. **Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Vechtomov E. M.** Abelian-regular positive semirings. *Journal of Mathematical Science [New York]*, 1999, V. 97. Pp. 4162–4176.

24. **Vechtomov E. M.** Annihilator characterizations of Boolean rings and Boolean lattices. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1993, V. 53. No. 2. Pp. 15–24.

25. **Bogdalov I. F.** Invertibility of the Hilbert basis theorem in the class of semirings. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: Tezisy dokladov Mezhregional'noy nauchnoy konferentsyi* [Problems of Modern Mathematics Education in Pedagogical Universities and Schools of Russia : Abstracts of the Interregional Scientific Conference], Kirov, Izd. Vyatskogo gospeduniversiteta, 1998. Pp. 171–172.

26. **Il'in S. N.** Regularity Criterion for Complete Matrix Semirings. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, V. 70. No. 3. Pp. 366–374.

27. **Il'in S. N.** On the applicability to semirings of two theorems from the theory of rings and modules. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2008, V. 83. No. 4. Pp. 563–574.

28. **Il'in S. N.** On the homological classification of semirings. *Itogi nauki i tehniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results of Science and Technology. Modern Mathematics and its Applications. Thematic reviews], 2018, V. 158. Pp. 3–22.

29. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, V. 56. Pp. 45–50.

30. **Babenko M. V., Chermnykh V. V.** On skew polynomial semirings on Bezout semiring. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2022, V. 111.

31. **Rao P. R.** Lattice ordered semirings. *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, 1981, V. 9. Pp. 119–149.

32. **Swamy K. L. N.** Duallity residuated lattice ordered semigroups. *Math. Ann.*, 1965, V. 159. Pp. 105–114.

33. **Chermnykh O. V.** On *drl*-semigroups and *drl*-semirings) *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshev collection], 2016, V. 17. No. 4. Pp. 167–179.

34. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of noncommutative rings. *Comm. Algebra*, 1976, V. 39. Pp. 512–526.

35. **Grothendieck A., Dieudonne J.** *Éléments de Géométrie Algébrique 1.* I.H.E.S., Publ. Math. 4. — Paris, 1960.

36. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1967, V. 70. Pp. 1–112.

37. **Simmons H.** Compact representations — the lattice theory of compact ringed spaces. *J. Algebra*, 1989, V. 126. Pp. 493–531.

38. **Chermnykh V. V.** Sheaf representations of semirings. *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in mathematical sciences], 1993, V. 48. No. 5. Pp. 185–186.

39. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2012, V. 17. No. 3. Pp. 111–227.

40. **Markov R. V., Chermnykh V. V.** On Pierce stalks of semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2014, V. 19. No. 2. Pp. 171–186.

41. **Markov R. V., Chermnykh V. V.** Semirings close to regular and their Pierce stalks) *Trydy IMM UrO RAN* [Proceedings of IMM UB RAS], 2015, V. 21. No. 3. Pp. 213–221.

42. **Babenko M. V., Chermnykh V. V.** Pierce stalks of semirings of skew polynomials. *Trydy IMM UrO RAN* [Proceedings of IMM UB RAS], 2021, V. 27. No. 4. Pp. 48–60.

43. **Chermnykh V. V., Chermnykh O. V.** Functional representations of lattice-ordered semirings. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical News], 2017, V. 145. Pp. 946–971.

44. **Chermnykh O. V.** Functional representations of lattice-ordered semirings. III. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical News], 2018, V. 15. Pp. 677–684.

45. **Chermnykh V. V., Chermnykh O. V.** Functional representations of lattice-ordered semirings. III. *Trydy IMM UrO RAN* [Proceedings of IMM UB RAS], 2020, V. 26. No. 3. Pp. 235–248.

46. **Polin S. V.** Minimal varieties of semirings. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1980, V. 27. No. 4. Pp. 527–537.

47. **Pastijn F.** Varieties Generated by Ordered Bands. II. *Order.*, 2005, V. 22. Pp. 129−143.

48. **Guterman A. E.** *Frobeniusovy endomorfizmy prostranstva matrits: dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk* [Frobenius endomorphisms of the matrix space: dissertation for the degree of Doctor of Physics and Mathematics], M.: MSU, 2009. 321 p.

49. **Shitov Ya. N.** *Lineynaya algebra nad polukoltsami: dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk* [Linear algebra over semirings: dissertation for the degree of Doctor of Physics and Mathematics], M.: MSU, 2015. 302 p.

50. **Krivulin N. K.** On the solution of generalized linear vector equations in idempotent algebra. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1* [Bulletin of Saint Petersburg University. Series 1], 2006. No. 1. Pp. 23–36.

51. **Krivulin N. K., Romanova E. Yu.** Approximate factorization of positive matrices using tropical optimization methods. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10* [Bulletin of Saint Petersburg University. Series 10], 2020, V. 16. No. 4. Pp. 357–374.

52. **Vorob'ev N. N.** Extreme algebra of positive matrices. *Elektronische Informatiosverarbeitung und Kybernetik* [Electronic information processing and cybernetics], 1967, V. 3. Pp. 39–71.

53. **Joswig M.** *Essentials of Tropical Combinatorics. Graduate Studies in Mathematics.* V. 219, 2021. 398 p.

54. **Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N.** *Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its application in optimal control], M.: Nauka, 1994.

55. **Gondran M., Minoux M.** *Graphs, Dioids and Semirings. New Models and Algorithms.* New York: Springer, 2008. 400 p.

56. **Kolokoltsov V. N., Maslov V. P.** *Idempotent Analysis and its Applications.* Mathematics and its Applications, V. 401, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

57. **Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz G. B.** Idempotent functional analysis: an algebraic approach. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, V. 69. No. 5. Pp. 758–797.

58. **Gillman L., Jerison M.** *Rings of continuous functions.* New York, 1976. 300 p.

59. **Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A.** Semirings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1998, V. 4. No. 2. Pp. 493–510.

60. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V.** *Elementy funktsionalnoy algebry: monografiya. V 2 tomah* [Elements of functional algebra: monography. In 2 volumes] [edited by Vechtomov], Kirov, OOO «Raduga-PRESS», 2016, V. 1, 384 p.; V. 2. 316 p.

61. **Vechtomov E. M., Mikhalev A. V., Sidorov V. V.** Semirings of continuous functions *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2016, V. 21. No. 2. Pp. 53–131.

62. **Vechtomov E. M., Chuprakov D. V.** The principal kernels of semifields of continuous positive functions. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, V. 14. No. 4. Pp. 87–107.

63. **Vechtomov E. M., Chuprakov D. V.** Extension of congruences on semirings of continuous functions. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2009, V. 85. No. 6. Pp. 803–816.

64. **Bestuzhev A. S., Vechtomov E. M.** Cyclic semirings with commutative addition. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mehanika. Informatika* [Bulletin of the Syktyvkar University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2015, V. 20. Pp. 8–39.

65. **Vechtomov E. M., Chuprakov D. V.** Finite cyclic semirings with semilattice addition given by the two-generated ideal of natural numbers. *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshev collection], 2020, V. 21. No. 1. Pp. 82–100.

66. **Vechtomov E. M., Orlova (Lubyagina) I. V.** Cyclic semirings with idempotent noncommutative addition. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2012, V. 17. No. 1. Pp. 33–52.

67. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** Cyclic semirings with idempotent commutative addition. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2015, V. 20. No. 6. Pp. 17–41.

68. **Bestuzhev A. S., Vechtomov E. M., Orlova I.V.** Structure of cyclic semirings. *Sbornik materialov IX nauchnoy konferentsii EKOMOD-2016 "Matematicheskoe modelirovanie razvivayuscheysya ekonomiki, ekologii i tehnologii"* [Proceedings of the IX Scientific Conference ECOMOD-2016 "Mathematical modeling of developing

economy, ecology and technology"], Kirov: Izd. VyatGU, 2016. Pp. 21–30.

69. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings with three elements. *Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Bulletin of Vyatka State University], 2021. No. 2. Pp. 13−23.

70. **Zhao X., Ren M., Crvenkovic S., Shao Y., Dapic** P. The variety generated by an ai-semiring of order three. *Ural Mathematical Journal*, 2020, V. 6. No. 2. Pp. 117–132.

Для цитирования: Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Основные направления развития теории полуколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 4−40. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_4

For citation: Vechtomov E. M., Chermnykh V. V. Main directions of the development of the semiring theory. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021. No. 4 (41), pp. 4−40. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_4

Вятский государственный университет
Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина

Поступила 01.11.2021