ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

4(41) выпуск **21**

Вестник Сыктывкарского университета Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	Серия 1: *Математика Механика Информатика*	12+ ISSN 1992-2752 Выпуск 4 (41) 2021

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2021. — 4 (41). 2021. — 96 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук». Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям: 01.00.00 — Физико-математические науки; 05.13.00 — Информатика, вычислительная техника и управление; 13.00.02 — Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)
(См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into «the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree» on the following scientific specialities: 01.00.00 — Physical and mathematical Sciences; 05.13.00 — computer Science, computer engineering and management; 13.00.02 — Theory and methods of teaching and education (by areas and levels of education) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

Адрес редакции
Вестника Сыктывкарского университета
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Свободная цена

© ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2021.

Главный редактор:
д.п.н., ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина» Сотникова О. А.

Ответственный редактор:
Ермоленко А. В., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

Редакционная коллегия:
Асланов Р. М., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан),
Беляева Н. А., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Вечтомов Е. М., д.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),
Головач П. А., к.ф.-м.н., доцент (Университет Бергена, Норвегия),
Калинин С. И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),
Колпак Е. П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),
Котов Л. Н., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Малоземов В. Н., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),
Одинец В. П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Попов Н. И., д.п.н., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Певный А. Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Петров Н. Н., д.ф.-м.н., профессор (УдмГУ),
Петраков А. П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Рудикова Л. В., к.ф.-м.н., доцент (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь),
Тихомиров А. Н., д.ф.-м.н., профессор (Коми НЦ УрО РАН),
Чермных В. В., д.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

Техническая редакция:
Гудырева Л. В., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Котелина Н. О., к.ф-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Устюгов В. А., к.ф-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

Содержание

Математика

Вечтомов Е. М., Чермных В. В. *Основные направления развития теории полуколец* 4

Прикладная математика и механика

Андрюкова В. Ю. *Вариационный подход к вычислению критических нагрузок в случае пространственной деформации криволинейных стержней* 41

Информатика

Ермоленко А. В., Мельников В. А. *Решение проблемы абстрагирования от платформозависимого кода* 50

Методические материалы

Дорофеев С. Н., Есетов Е. Н., Наземнова Н. В. *Аналогия как основа обучения школьников* 70

Наставник-ученик

Ермоленко А. В., Беляев Е. А., Туркова О. И. *Об одной контактной задаче для двух пластин* 83

Erratum

Рогозин С. В. *Замечание к статье «С. В. Рогозин, Л. П. Примачук, М. В. Дубатовская. О решении задачи r-линейного сопряжения с рациональными коэффициентами // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. Выпуск 2 (39), С. 27–43, 2021»* 90

Персоналии **92**

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 512.55 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_4**

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ПОЛУКОЛЕЦ

Е. М. Вечтомов, В. В. Чермных

В настоящей статье выделены и проанализированы три основных направления становления и развития теории полуколец. Рассмотрены кольце-модульное направление, обобщающее и расширяющее теорию колец и модулей на полукольца и полумодули над ними; универсально-алгебраическое направление, базирующееся на универсальной алгебре и теории полугрупп; направление, связанное с исследованием специальных классов полуколец и нацеленное на применения полуколец внутри математики, в компьютерных науках, в приложениях математики. Первые два направления содержат изучение общей теории полуколец, построение структурных теорий для отдельных важных и интересных классов абстрактных полуколец. Третье направление включает в себя, в частности, описание конечных полуколец с теми или иными условиями.

Ключевые слова: полукольцо, полутело, полумодуль, кольцо, дистрибутивная решетка, развитие теории полуколец.

Введение

Класс полуколец содержит класс всех (ассоциативных) колец и класс всех дистрибутивных решеток, ряд известных числовых систем.

Как указано в [1] термин полукольцо впервые появился в работе Г. Вандивера [2], но неявно полукольца использовались еще Р. Дедекиндом [3] при исследованиях решетки идеалов колец, Д. Гильбертом [4], при рассмотрении вопросов аксиоматики числовых систем.

Систематическое изучение полуколец началось в 50-е гг. XX века в работах А. Алмейда Косты, С. Берна, Г. Зассенхауса, К. Исеки,

© Вечтомов Е. М., Чермных В. В., 2021.

М. Хендриксона, В. Словиковского, В. Завадовского и др. Так, рассматривались идеалы полуколец, а среди них выделялись и исследовались полустрогие идеалы, гомоморфизмы (следовательно, формулировались и теоремы о гомоморфизмах), фактор-полукольца, конгруэнции на полукольцах. Отметим, что Берном и Зассенхаусом получен полукольцевой аналог классической теоремы Веддерберна - Артина для полупервичных колец.

При наличии некоторых отдельных интересных и важных теоретических результатов в этот период большая их часть представляла собой переносы кольцевых и общеалгебраических понятий на полукольца.

Появлялись новые примеры полуколец, причем оказывалось, что зачастую полукольца возникают как модели к давно известным математическим объектам. К примеру, это можно сказать о *полукольцах Лукасевича.* Ян Лукасевич — польский математик, одним из первых рассмотревший многозначную логику. Его трехзначная логика представляла систему, в которой высказывание могло принимать значения 0 (ложь), 1 (истина) или 1/2 (вероятно или нейтрально). Если мы рассмотрим единичный отрезок $\mathbb{I}$ с аддитивной операцией $\vee$ — максимум, и мультипликативной операцией $a \otimes b = \max\{0, a+b-1\}$, то получим полукольцо, а с трехзначной логикой Лукасевича связано трехэлементное полукольцо $\langle L_3, \vee, \otimes \rangle$. К настоящему времени развитие этого направления привело к изучению MV-алгебр и MV-полуколец.

Многочисленные полукольца возникают при рассмотрении различных *t-норм* и *t-конорм* — ассоциативных коммутативных операций на $\mathbb{I}$. Такие полукольца появились и используются в нечеткой логике — разделе математики, являющемся обобщением классической логики и теории множеств и базирующемся на понятии нечеткого множества, впервые введенного Лотфи Заде в 1965 г.

В отдельных книгах и монографиях встречались упоминания о полукольцах, говорилось о перспективах их развития (L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*; 1963, А. Г. Курош, *Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года* (1974 г. издания)). Таким образом, 50–80 годы стали периодом становления теории полуколец, и полукольцо все еще оставалось достаточно экзотическим объектом.

Ситуация стала меняться с 90-х гг. прошлого века. Постепенно накопленный материал по полукольцам нашел отражение в монографии Г. Вайнерта и У. Хебиша [5] и особенно — в первой монографии Дж. Голана [6] и в ее расширенном варианте [1]. В настоящее время определение

полукольца, которое использовал Голан, наиболее употребительно (см. ниже определение 1). Большую роль сыграли обзоры К. Глазека по полукольцам, их приложениям и близким вопросам [7], [8]. В настоящее время теория полуколец является активно развивающимся разделом современной математики.

Отметим вклад в теорию полуколец кировской алгебраической школы под руководством профессора Е. М. Вечтомова. Полукольцевые исследования начались с кандидатской диссертации В. В. Чермных «Пучковые представления полуколец» (1994 г.), а о возможности применения пучков для исследования полуколец впервые было сказано К. И. Бейдаром в 1990 г. на семинаре «Кольца и модули» (МГУ, руководитель А. В. Михалев). В 1994 г. состоялась успешная защита Е. М. Вечтомовым докторской диссертации «Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле». Постепенно интересы Вечтомова стали смещаться с колец на полукольца, и уже в 1996 г. под его руководством была защищена диссертация В. И. Варанкиной «Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций». Всего под руководством Е. М. Вечтомова защищено 16 кандидатских диссертаций по теории полуколец (В. В. Чермных, В. И. Варанкина, И. А. Семенова, М. Н. Подлевских, А. В. Ряттель, В. В. Широков, О. В. Старостина, А. В. Черанева, М. А. Лукин, Д. В. Чупраков, В. В. Сидоров, Е. Н. Лубягина, А. А. Петров, Н. В. Шалагинова, И. В. Орлова, О. В. Чермных). В 2007 г. В. В. Чермных защитил докторскую диссертацию «Функциональные представления полуколец и полумодулей», позже его ученик Р. В. Марков — кандидатскую диссертацию «Пирсовские слои и цепи полуколец». Готовятся к защитам докторская диссертация В. В. Сидорова (научный консультант Е. М. Вечтомов) и кандидатская М. В. Бабенко (научный руководитель В. В. Чермных). Тематика диссертаций — это теория полуколец непрерывных функций и исследование абстрактных полуколец с дополнительными условиями. Теория полуколец непрерывных функций благодаря работе проф. Вечтомова и его учеников к сегодняшнему дню является хорошо разработанным и в то же время с ясными перспективами направлением в теории полуколец. Отметим исследования полутел, в том числе и их функциональные представления, хорошие продвижения получены в описании упорядоченных полутел. Начато изучение решеточно упорядоченных полуколец, в частности, получены существенные результаты по представлениям решеточно упорядоченных полуколец сечениями. Среди новых и

перспективных отметим интересные результаты о конечных полукольцах с дополнительными условиями. Положено начало исследованиям полуколец многочленов и формальных степенных рядов [9].

О результатах указанных и некоторых других разделов теории полуколец и говорится в настоящей статье. Делается попытка выделить основные направления в теории полуколец, наметить перспективы ее развития.

Исходные понятия и примеры

Начнем с определений основополагающих понятий.

Определение 1 (в широком смысле [2]). Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle S, + \rangle$ — аддитивно записанная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — мультипликативно записанная полугруппа, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения $+$ с обеих сторон: $a(b+c) = ab + ac, (a+b)c = ac + bc$ для любых $a, b, c \in S$.

Будем рассматривать полукольца с коммутативным сложением, если иное не оговорено.

Элемент 0 полукольца S называется *нулем*, если $0 + s = s + 0 = s$ и $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$ для любого $s \in S$. Элемент 1 полукольца S называется *единицей*, если $s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$ для всех $s \in S$. Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*.

Определение 2 (в узком смысле [1]). *Полукольцо* — это полукольцо в широком смысле, в котором сложение коммутативно и существуют нуль 0 и единица 1. Если $1 = 0$, то полукольцо одноэлементно.

Определение 3. Полукольцо называется *полутелом*, если его мультипликативная полугруппа является группой. *Полуполе* — это коммутативное полутело. Полутело с присоединенным нулем будем называть *полутелом с нулем*.

Полукольцо с нулем 0 назовем *антикольцом*, если оно удовлетворяет квазитождеству $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$. Полукольцо с 0 и $1 \neq 0$ называется *полукольцом с делением*, если любой его ненулевой элемент обратим. Отметим, что полукольца с делением исчерпываются телами и полутелами с нулем.

Приведем примеры числовых полуколец.

Пример 1. Множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел с обычными операциями сложения и умножения является коммутативным полукольцом с единицей и без нуля; кольцом разностей полуколец $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$ служит кольцо $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Полуполем частных полукольца $\mathbb{N}$ будет полуполе всех положительных рациональных чисел.

Пример 2. Алгебраическая структура $\langle \mathbb{R}^+, +, \cdot \rangle$ всех неотрицательных действительных чисел будет полуполем с нулем, кольцом разностей которого служит поле $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Пример 3. Рассматривая на множестве $\mathbb{P}$ всех положительных действительных чисел операции $\vee$ (max) и умножение $\cdot$, получим полуполе $\langle \mathbb{P}, \vee, \cdot \rangle$ с идемпотентным сложением (верно тождество $x \vee x = x$).

Пример 4. Пусть $S = \{0, 1\}$ — двухэлементное полукольцо с нулем 0 и единицей 1. В S умножение определяется однозначно, $0 + 0 = 0$ и $0 + 1 = 1 + 0 = 1$. Если $1 + 1 = 0$, то полукольцо S изоморфно двухэлементному полю $\mathbb{Z}_2$; если $1 + 1 = 1$, то S изоморфно двухэлементной цепи $\mathbb{B}$.

Для иллюстрации рассмотрим пример «тропического» полуполя, на базе которого строится идемпотентный анализ (так же как на базе поля $\mathbb{R}$ действительных чисел зиждется классический математический анализ).

Пример 5. Пусть $S = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, + \rangle$ — линейно упорядоченное полуполе с нулем $-\infty$ относительно операции сложения $\vee$ (max) и операции умножения $+$. Элемент $-\infty$ будет также наименьшим, сложение идемпотентно ($x \vee x = x$), а по умножению ($+$) S является коммутативной группой с добавленным нулем $-\infty$. Относительно интервальной (естественной) топологии S становится топологическим аддитивно идемпотентным полуполем. Заметим, что S изоморфно (топологоалгебраически) как топологическому аддитивно идемпотентному полуполю с нулем $\langle \mathbb{R}^+, \vee, \cdot \rangle$ всех неотрицательных действительных чисел со сложением $\vee$ и обычным умножением чисел, так и полуполю $\langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \wedge, + \rangle$. Поэтому тропическое полуполе $\langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, + \rangle$ называется еще *минимаксным*.

Для получения новых полуколец к полукольцам применяются известные алгебраические конструкции.

Примеры 6. Для любого фиксированного полукольца S с нулем 0 и единицей 1 строятся:

i) полукольцо $M_n(S)$ всех квадратных матриц размера $n \times n$ с коэффициентами из S ($n \in \mathbb{N}$);

ii) полукольцо $S[x]$ всех многочленов с коэффициентами из S от одной переменной x, коммутирующей с элементами из S;

iii) полукольцо $S[[x]]$ всех формальных степенных рядов с коэффициентами из S от одной переменной x, коммутирующей с элементами из S.

Заметим, что полукольца $M_n(S), S[x], S[[x]]$ также обладают нулем и единицей и содержат подполукольцо, канонически изоморфное исходному полукольцу коэффициентов S. Изучение взаимосвязей свойств полуколец $M_n(S), S[x], S[[x]]$ со свойствами полукольца S является одной из важных тем теории полуколец. Например, мультипликативная сократимость справа полукольца $S[x]$ влечет аддитивную сократимость полукольца S.

Далее при изложении теории полуколец даются исходные полукольцевые определения как общеалгебраического, так и специального характера. К общеалгебраическим относятся понятия подполукольца, идеала, конгруэнции, фактор-полукольца, гомоморфизма, прямого произведения полуколец, решеток идеалов, конгруэнций, подполуколец. Вводятся понятия подпрямо неразложимого полукольца и конгруэнц-простого полукольца.

Для полуколец формулируются и доказываются универсально-алгебраические утверждения: теоремы о гомоморфизме и изоморфизме, теорема Биркгофа о подпрямом произведении.

Затем определяются более специальные и специфические полукольцевые понятия, такие как поглощающий элемент (по сложению и по умножению), идемпотентность (аддитивная и мультипликативная), сократимость (аддитивная и мультипликативная), конгруэнция Берна по идеалу и т. д.

Конгруэнция Берна на полукольце S с нулем по его идеалу J — это такое бинарное отношение $\rho(J)$ на S, что для любых $s, t \in S$ имеем:

$$s\rho(J)t \Leftrightarrow \exists a, b \in J(s + a = t + b).$$

Легко видеть, что $\rho(J)$ есть конгруэнция на полукольце S, причем $J \subseteq [0]_{\rho(J)}$. Идеал J образует класс нуля некоторой конгруэнции (равносильно конгруэнции $\rho(J)$) на S тогда и только тогда, когда J — *полустрогий* идеал, т. е. $a \in J$ и $a + b \in J$ влекут $b \in J$ при любых $a, b \in S$. При этом конгруэнция Берна $\rho(J)$ будет наименьшей среди конгруэнций σ на полукольце S с тем же классом нуля, что и $\rho(J)$: $[0]_\sigma = [0]_{\rho(J)}$.

Конгруэнции на любом кольце S суть в точности конгруэнции Берна по различным идеалам J в S, т. е. отношения сравнимости по J: $s\rho(J)t \Leftrightarrow s - t \in J$.

Для произвольного полукольца S с нулем 0 обозначим через

$$r(S) = \{s \in S : \exists t \in S\,(s + t = 0)\}$$

множество всех элементов из S, имеющих противоположный элемент. Ясно, что $r(S)$ — строгий идеал полукольца S, являющийся кольцом. Идеал J полукольца S называется *строгим*, когда $a + b \in J$ влечет $a \in J$ для любых $a, b \in S$. Строгие идеалы в полукольцах являются полустрогими, но, вообще говоря, не наоборот; так, в кольцах все идеалы полустрогие, а строгими будут только сами кольца (как несобственные идеалы). В дистрибутивных решетках все идеалы строгие.

Основные направления в теории полуколец

В развитии теории полуколец можно выделить следующие основные направления:

1. *Кольце-модульное направление* как обобщение и расширение теории колец и модулей на полукольца и полумодули над ними. Рассматриваются структурные свойства полуколец с нулем и единицей. Исследуются полукольца с различными дополнительными условиями, гомологические свойства полуколец и т. д.

2. *Универсально-алгебраическое направление*, базирующееся на теории полугрупп и универсальной алгебре. Изучаются полукольца в широком понимании, в том числе и с некоммутативным сложением. Важную роль играют свободные полукольца, расширения полуколец, многообразия и квазимногообразия полуколец, решетки идеалов и конгруэнций полуколец.

3. *Изучение полуколец специального вида.* Исследуются полукольца непрерывных функций, сечений, соответствий; матричные полукольца в рамках линейной алгебры над полукольцами; тропические полукольца с применением в теории оптимального управления; полукольца путей в графах и т. п.

Первые два направления охватывают изучение абстрактных полуколец, построение структурных теорий для отдельных важных и интересных классов полуколец. Третье направление, включая теорию конечных полуколец, служит основой для полукольцевых приложений в компьютерных науках, теории кодирования и криптографии, оптимальном управлении, лингвистике, экономике.

Рассмотрим подробнее каждое из основных направлений.

Кольце-модульное направление

Перечислим некоторые актуальные темы и сюжетные линии.

Расширения полуколец

Затронем один из фрагментов общей теории полуколец.

Полукольцо S с нулем 0 назовем *расширением полукольца R посредством полукольца T*, если на S существует конгруэнция ρ, для которой класс нуля $[0]_\rho$ изоморфен R и фактор-полукольцо S/ρ изоморфно T.

На полукольце S с нулем 0 существуют три конгруэнции, имеющие $r(S)$ классом нуля.

Во-первых, конгруэнция Берна $\rho(r(S))$, фактор-полукольцо по которой является антикольцом [10, с. 25].

Во-вторых, «разностная» конгруэнция σ: $s\sigma t \Leftrightarrow \exists x, y \in S\,(s + x = t \,\&\, t + y = s)$, фактор-полукольцо по которой упорядочиваемо [10, с. 30].

В-третьих, наименьшая конгруэнция на S, фактор-полукольцо по которой аддитивно идемпотентно [11, предложение 2].

Очевидно, что упорядочиваемые полукольца суть антикольца, а аддитивно идемпотентные полукольца упорядочиваемы.

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Любое полукольцо S с нулем является расширением однозначно определенного (с точностью до изоморфизма) кольца $r(S)$ посредством аддитивно идемпотентного полукольца.*

Заметим, что в данной теореме аддитивно идемпотентное полукольцо определено, вообще говоря, неоднозначно.

Теорема [12, предложение 4.1.1]. *Любое полукольцо S с нулем, для которого кольцо $r(S)$ обладает единицей, однозначно представимо в виде прямой суммы кольца и антикольца.*

Редукция к базовым классам полуколец

В структурной теории полуколец роль «кирпичиков», из которых могут строиться произвольные полукольца, играют следующие типы полуколец:

i) *кольца* как полукольца, аддитивная полугруппа которых является коммутативной группой;

ii) *дистрибутивные решетки* как полукольца с тождествами коммутативности $x + y = y + x$ и $xy = yx$, идемпотентности $xx = x$ и поглощения $x + xy = x$;

iii) *полутела*. Полутела изучались в работах [5; 13–15], [16, Дополнение].

Попарные пересечения классов колец, дистрибутивных решеток и полутел совпадают с классом одноэлементных полуколец, определяемым тождеством $x = y$.

Одна из актуальных задач общей теории полуколец заключается в сведении изучения полуколец к названным классам полуколец посредством различных алгебраических и теоретико-множественных конструкций. С другой стороны, исследовались полукольца, представляющие собой некий симбиоз:

1) колец и дистрибутивных решеток;

2) колец и полутел;

3) дистрибутивных решеток и полутел.

Приведем примеры классов полуколец указанных переплетений.

1) Многообразие M полуколец, порожденное булевыми кольцами и дистрибутивными решетками. В многообразии всех полуколец многообразие M определяется тождествами $xy = yx, xx = x, x + 2xy = x$, и каждое полукольцо из M является подпрямым произведением двухэлементных полей и двухэлементных цепей (см. [17, предложение 6.3.2]).

2) Дизъюнктные полукольцевые объединения S кольца R и полутела U рассматривались в работах [18], [19]. Решены задачи существования и единственности полуколец S для заданных R и U, описано строение их идеалов и конгруэнций.

3) К таким полукольцам принадлежат абелево-регулярные положительные полукольца [20, глава 2], [21–23]. Полукольцо S с нулем 0 и единицей 1 было названо *абелево-регулярным положительным полукольцом* (arp-полукольцом), если S — *регулярное*, т. е. для любого $a \in S$ найдется такой $b \in S$, что $aba = a$, его мультипликативные идемпотенты коммутируют с любыми элементами из S, *положительное*, т. е. все элементы вида $s + 1$ обратимы в S. Впервые коммутативные arp-полукольца появились в [24, замечание 3] под названием регулярные.

В произвольном arp-полукольце S выделяются ограниченная дистрибутивная решетка $L(S)$ всех мультипликативных идемпотентов и полутело $U(S)$ всех обратимых элементов. Рассматривается также естественный решеточный гомоморфизм $\psi_S : L(S) \to ConU(S)$ решетки $L(S)$ в решетку конгруэнций полутела $U(S)$. Оказывается, что любое arp-полукольцо S однозначно, с точностью до изоморфизма, восстанавливается по своей индуцированной тройке $\langle L(S), U(S), \psi_S \rangle$. arp-Полукольцо S называется *булевым arp-полукольцом*, если решетка $L(S)$ булева. Теория arp-полуколец подробно изложена в главе 2 монографии [20]. Класс обобщенных arp-полуколец изучен в [22].

Выполнение кольце-модульных теорем в классе полуколец

Вызывают большой интерес исследования, связанные с выполнением кольце-модульных теорем в классе полуколец. Зачастую справедливость той или иной теоремы теории колец и модулей для полукольца S делает S близким к кольцу или даже кольцом, что дает характеризации колец в терминах полуколец. Приведем несколько подобных результатов, в которых S — произвольное полукольцо с 0 и 1.

Теорема [25]. *Полукольцо многочленов $S[x]$ нетерово (нетерово справа) тогда и только тогда, когда S есть нетерово (соответственно, нетерово справа) кольцо.*

Полукольцо S называется *нетеровым* (*нетеровым справа*), если каждый его идеал (правый идеал) конечно порожден. Напомним, что классическая теорема Гильберта о базисе утверждает, что над нетеровым справа кольцом кольцо $S[x]$ нетерово справа.

Теорема [26, предложение 2]. *Полное матричное полукольцо $M_n(S)$ регулярно при некотором (любом) $n \geq 3$ тогда и только тогда, когда S есть регулярное кольцо.*

Существуют регулярные полукольца, не являющиеся кольцами. Заметим, что полукольцо $M_2(S)$ регулярно $\Leftrightarrow$ S есть прямая сумма регулярного кольца и идемпотентного булева arp-полукольца [26, предложение 5]. Хорошо известно, что для регулярных колец кольца матриц $M_n(S)$ регулярны.

Теорема [27, теорема 3]. *Для полукольца S выполняется критерий Бэра, и любой (правый) S-полумодуль изоморфно вкладывается в некоторый инъективный S-полумодуль в том и только в том случае, когда S — кольцо.*

Утверждение достаточности в этой теореме суть две известные кольце-модульные теоремы.

Вопросам гомологической характеризации полуколец посвящена обзорная статья С. Н. Ильина [28].

Исследования полуколец многочленов

Выше нами было указано, что полукольца многочленов имеют важное значение с теоретической точки зрения, а особенно в связи с разнообразными приложениями. Удивительным при этом оказывается тот факт, что серьезных исследований полуколец многочленов крайне мало. Подтверждение этим словам является и почти полное неупоминание многочленов в монографии Голана.

Интересными в свете сказанного выглядят полученные М. В. Бабенко новые результаты о полукольцах косых многочленов. Пусть S — полукольцо, φ — эндоморфизм полукольца S, $R = S[x, \varphi]$ — множество всех многочленов от переменной x и с коэффициентами из S, записываемых слева от переменной x. Сложение $+$ многочленов определяется обычным образом, а умножение — исходя из правила $xa = \varphi(a)x$. С такими операциями $S[x, \varphi]$ становится полукольцом, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*.

Выше уже говорилось, что явный перенос теоремы Гильберта о базисе на полукольца не верен. Однако в работе Л. Дейла [29] были определены монические идеалы полукольца многочленов $S[x]$ над коммутативным полукольцом S; именно идеал J полукольца $S[x]$ называется *моническим*, если для любого многочлена из J любой его одночлен лежит в J. Дейлом было доказано, что *если коммутативное полукольцо S нетерово, то полукольцо $S[x]$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей монических идеалов*. Отметим, что в полукольце конечно порожденность всех левых (правых) идеалов равносильна условию обрыва возрастающих цепей левых (правых) идеалов [1, prop. 6.16].

Определим аналогичным образом монические односторонние идеалы для произвольного полукольца многочленов, в частности для полукольца косых многочленов, и договоримся их называть левыми и правыми m-идеалами.

Теорема. *Пусть φ — автоморфизм полукольца S. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *S — нетерово слева (справа) полукольцо;*

2) *$S[x, \varphi]$ не содержит бесконечной строго возрастающей цепи левых (правых) m-идеалов.*

Описания левых и правых m-идеалов полукольца $S[x, \varphi]$ основываются на их коэффициентных множествах и принципиально не отличаются от случая полукольца $S[x]$. Интересным и важным является выяснение строения главных m-идеалов.

Заметим, что в произвольном полукольце $R = S[x, \varphi]$ косых многочленов имеются тривиальные главные левые m-идеалы — нулевой, несобственный и порожденный одночленом x^k. Вопрос о существовании главного левого m-идеала, порожденного неодночленом, оказался весьма непростым.

Через $\mathrm{ann}_l(A) = \{s \in S : sA = 0\}$ обозначим *левый аннулятор множества* $A \subseteq S$. Полукольцо S называется *риккартовым слева*, ес-

ли для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\mathrm{ann}_l(a) = Se$; *левым полукольцом Безу*, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом. Эндоморфизм φ полукольца S называется *жестким*, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in S$.

Теорема [30, предложение 1]. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, φ — инъективный жесткий эндоморфизм полукольца S, $\varphi(d)$ — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x, \varphi]$. Тогда:*

1) *если для любого $i = 0, \ldots, k-1$ выполнено*

$$f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i),$$

то $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R;

2) *если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, что $L = Rf$ и $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(S\varphi^i(f_0) + S\varphi^{i-1}(f_1) + \ldots + Sf_i)$ для всех $i = 0, \ldots, k-1$.*

Конструкция построения главного m-идеала с нетривиальным образующим многочленом, применяемая в доказательстве этой теоремы, может быть перенесена на произвольное полукольцо многочленов при условии, что полукольцо коэффициентов обладает нетривиальной алгеброй центральных дополняемых идемпотентов.

Решеточно упорядоченные полукольца

В монографии Голана [1, глава 21] под решеточно упорядоченным полукольцом понимается полукольцо S с дополнительными решеточными операциями $\vee$ и $\wedge$ и для любых $a, b \in S$ выполняются условия $a + b = a \vee b$ и $ab \leq a \wedge b$. Такое определение является достаточно узким, под него попадают только аддитивно идемпотентные полукольца. Наиболее общее определение решеточно упорядоченного полукольца мы получаем при почти дословном переносе с понятия l-кольца. Сейчас мы остановимся на некотором промежуточном варианте, так называемых drl-полукольцах.

Определение [31]. Алгебра $(S, +, \cdot, -, \vee, \wedge, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются следующие аксиомы:

1) $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо;

2) $(S, \vee, \wedge)$ — решетка с порядком $\leq$;

3) $x - y$ — наименьший элемент z, такой, что $y + z \geq x$;

4) $x+y\vee z=(x+y)\vee(x+z), x+y\wedge z=(x+y)\wedge(x+z)$ для любых $x,y,z\in S$;

5) $x(y-z)=xy-xz, (x-y)z=xz-yz$ для любых $x,y,z\in S$;

6) $(x-y)\vee 0+y\leq x\vee y$ для любых $x,y\in S$;

7) $xy\geq 0$ для любых $0\leq x,y\in S$.

Это определение было дано в 1981 г. Ранго Рао на основе понятия drl-полугруппы (dually residuated lattice ordered semigroup), введенного в обиход К. Свами в 1965 г. [32].

Идеал drl-полукольца S, являющийся выпуклым множеством относительно решеточного порядка в S, называется *l-идеалом.* Произвольная конгруэнция ρ на drl-полукольце S — это в точности отношение Берна по l-идеалу J, причем J является классом нуля ρ.

Рассмотрим два важных l-идеала: $L(S)=\{a\in S: 0-a=0\}$ — l-идеал drl-полукольца S, являющийся положительно упорядоченным drl-полукольцом с наименьшим элементом 0 и $R(S)=\{0-a: a\in S\}$ — всех аддитивно обратимых элементов из S. Их значение проявляется в следующих теоремах о разложениях drl-полукольца.

Теорема [33, теорема 4.1]. *Любое drl-полукольцо является прямой суммой l-кольца и drl-полукольца с наименьшим элементом: $S=R(S)\oplus L(S)$.*

Теорема [33, теорема 4.2]. *drl-Полукольцо S есть прямая сумма l-кольца и drl-полукольца с наименьшим и наибольшим элементами тогда и только тогда, когда выполняется условие $(\exists i\in S)(\forall a\in S)(a+(i-a)=i+i)$.*

Решетка L называется *брауэровой*, если для любых ее элементов a,b множество всех таких $x\in L$, что $b\vee x\geq a$, имеет наименьший элемент.

Теорема [33, теорема 4.3]. *drl-Полукольцо S есть прямая сумма l-кольца и брауэровой решетки в точности тогда, когда для любых $a,b,c\in S$ выполняется условие $(a+b)-(c+c)=(a-c)+(b-c)$.*

Теорема [33, теорема 4.4]. *Пусть S — drl-полукольцо, удовлетворяющее условиям $(a+b)-(c+c)=(a-c)+(b-c)$ и $(\exists i\in S)(\forall a\in S)(a+(i-a)=i+i)$. Тогда равносильны утверждения:*

1) *S есть прямая сумма l-кольца и булевой алгебры;*

2) *$i-(i-a)=a$ для любого $a\in S$;*

3) *$(i-a)\wedge a=((i-a)\wedge a+(i-a)\wedge a)-(i-a)\wedge a$ для любого $a\in S$.*

Известно, что *аддитивно сократимые* полукольца (т. е. полукольца с квазитождеством $a+c=b+c\Rightarrow a=b$), и только они, вкладываются

в кольца, в свои кольца разностей. В случае drl-полуколец ситуация аналогичная.

Теорема [33, предложения 5.2 и 5.4]. *Кольцо разностей R аддитивно сократимого drl-полукольца S является l-кольцом; решетки l-идеалов $\mathrm{Id}\, R$ и $\mathrm{Id}\, S$ изоморфны.*

Теорема [33, предложения 6.1 и 6.2]. *Любое drl-полутело является линейно упорядоченным; каждое drl-полутело либо идемпотентно, либо содержит drl-полуполе, изоморфное $\mathbb{Q}^+$.*

Метод функциональных представлений в теории полуколец

Пучок, изначально — пучок абелевых групп, был открыт Ж. Лере в 1945 г. и со временем стал важным инструментом алгебраической топологии. Кроме многочисленных применений пучков (теория категорий, логика, нестандартный анализ и пр.) отметим метод функциональных (пучковых) представлений алгебр. Пучок в теории представлений можно считать обобщением конструкции алгебры непрерывных функций, а в некоторых случаях, при факторных представлениях, — разложением представляемой алгебры в подпрямое произведение.

За 60–90-е гг. прошлого столетия накопилось большое число результатов по представлениям колец, дистрибутивных решеток, почти-колец, универсальных алгебр [34–37]. Это стало предпосылкой для развития теории пучковых представлений полуколец. Были построены конкретные пучки полуколец и полумодулей, получены представления полуколец и полумодулей их сечениями. Исследованы компактные представления, полнота представлений полуколец, другие вопросы общей теории представлений [16; 23; 38; 39]. Найдены представления некоторых классов полутел [14; 16, Дополнение].

Среди результатов последних лет, связанных с этой тематикой, отметим полученные характеризации полуколец свойствами пирсовских слоев (Р. В. Марков, М. В. Бабенко, В. В. Чермных) и развитие теории функциональных представлений drl-полуколец (О. В. Чермных, В. В. Чермных).

Множество BS всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S образует булево кольцо (относительно полукольцевого умножения и с «подправленной» операцией сложения). Для любого максимального идеала M из BS определяем конгруэнцию на полукольце S:

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, \rho_M) \Leftrightarrow ae = ba \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M.$$

Фактор-полукольца вида S/ρ_M называются *пирсовскими слоями* полукольца S.

Теорема [40, предложение 9]. *Для полукольца S равносильны следующие условия:*

1) *S — регулярное слабо симметрическое полукольцо, каждый идемпотент которого является центральным дополняемым идемпотентом;*

2) *все пирсовские слои полукольца S являются полукольцами с делением.*

Результаты подобного типа были получены в [40; 41] для заменяемых полуколец, полуколец без нильпотентных элементов, регулярных полуколец с некоторыми дополнительными условиями, риккартовых, бирегулярных полуколец.

Исследования пирсовских слоев полуколец было продолжено в работах М. В. Бабенко и В. В. Чермных [30; 42] в классе полуколец многочленов, и особенно для полукольца косых многочленов. Своеобразие полученных результатов, на наш взгляд, заключается в том, что зачастую удается получить характеризацию полукольца многочленов в терминах как пирсовских слоев полукольца многочленов, так и пирсовских слоев полукольца коэффициентов. Как демонстрацию высказанного приведем один из типичных наших результатов.

Теорема. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S, $\varphi(e) = e$ для любого $e \in BS$. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *$R = S[x, \varphi]$ — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов*;

2) *каждый пирсовский слой полукольца R является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(f) \cap BR$ является главным идеалом кольца BR для любого $f \in R$*;

3) *каждый пирсовский слой полукольца S является полукольцом без делителей нуля и $\mathrm{ann}_l(a) \cap BS$ является главным идеалом кольца BS для любого $a \in S$*;

4) *S — риккартово слева или справа полукольцо без нильпотентных элементов.*

Пусть S — drl-полукольцо. Собственный l-идеал P drl-полукольца S называется *неприводимым*, если $A \cap B \subseteq P$ влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ для любых l-идеалов A, B.

На множестве $\mathrm{Irr}S$ всех неприводимых l-идеалов из S введем *стоуновскую* топологию. Открытыми множествами являются множества вида $D(A) = \{P \in \mathrm{Irr}S : A \nsubseteq P\}$, A — l-идеал.

Пусть $P \in \mathrm{Irr}S$ и U — открытое в $\mathrm{Irr}S$ подмножество. Положим: $0_U = \cap\{Q \in \mathrm{Irr}S : Q \in U\}$, $0_P = \cup\{0_V : V$ — открыто в $\mathrm{Irr}S$ и $P \in V\}$.

Тогда получаем пучок drl-полуколец $(\Pi(S), \mathrm{Irr}S)$, где $\Pi(S) = \dot{\cup}(S/0_P)$ по всем $P \in \mathrm{Irr}S$.

Элемент произвольного drl-полукольца S, не лежащий ни в одном собственном l-идеале из S, называется *формальной единицей.*

Теорема [43, теорема 1]. *Для пучка* $(\Pi(S), \mathrm{Irr}\, S)$ *справедливы следующие утверждения:*

1) S изоморфно drl-подполукольцу $\hat{S}$ drl-полукольца всех глобальных сечений пучка Π*, и drl-полукольцо всех глобальных сечений с компактными носителями лежит в $\hat{S}$;*

2) если S содержит формальную единицу, то S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка Π.

f-Полукольцом назовем drl-полукольцо, являющееся подпрямым произведением линейно упорядоченных drl-полуколец.

Симметрической разностью называется элемент

$$x * y = (x - y) \vee (y - x) = x \vee y - x \wedge y.$$

Элементы $a, b \in S$ называются *ортогональными*, если $|a| \wedge |b| = 0$, где $|a| = a * 0$. Для любого подмножества A drl-полукольца S обозначим через A^* множество всех элементов из S ортогональных каждому элементу из A.

Для неприводимого l-идеала P положим $0(P) = \{a \in S : a^* \nsubseteq P\}$. Получаем пучок f-полуколец: $(L(S), \mathrm{Irr}\, S) = (\dot{\cup}S/0(P), \mathrm{Irr}\, S)$.

Назовем f-полукольцо S *гельфандовым*, если для любых различных максимальных l-идеалов M и N из S найдутся такие элементы $a \in M \backslash N$ и $b \in N \setminus M$, что $|a| \wedge |b| = 0$.

Теорема [43, теорема 2]. *Гельфандово f-полукольцо S с единицей* 1 *изоморфно f-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(L(S), \mathrm{Max}\, S)$*; каждый слой пучка является f-полукольцом с единственным максимальным l-идеалом, а базисное пространство — компакт.*

Изоморфные представления сечениями пучка $(L(S), \mathrm{Irr}\, S)$ получены также для f-полуколец: риккартовых, бирегулярных и строго регулярных [43, теоремы 3, 4, 5].

Собственный l-идеал P drl-полукольца S называется *первичным*, если для любых l-идеалов I, J из S включение $IJ \subseteq P$ влечет $I \subseteq P$ или $J \subseteq P$.

Пусть $\operatorname{Spec} S$ — *первичный спектр* drl-полукольца — пространство всех первичных l-идеалов из S со стоуновской топологией. Для открытого $U \subseteq \operatorname{Spec} S$ положим $O_U = \cap\{P \in \operatorname{Spec} S : P \in U\}$ и для $P \in \operatorname{Spec} S$ $O_P = \cup\{O_U : U$ — открытая окрестность точки $P\}$. Тогда получаем еще одну конструкцию пучка $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$ drl-полуколец со слоями S/O_P для каждого $P \in \operatorname{Spec} S$.

drl-Полукольцо называется *l-полупервичным*, если пересечение всех его первичных l-идеалов равно нулю.

Теорема [44, теорема 1]. *Произвольное l-полупервичное drl-полукольцо S с формальной единицей изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(\Lambda(S), \operatorname{Spec} S)$.

Пусть сейчас S — произвольное drl-полукольцо. Назовем l-идеал A *дополняемым*, если $A + B = S$, $A \cap B = 0$ для некоторого l-идеала B.

Множество всех дополняемых l-идеалов drl-полукольца S обозначим через βS. Поскольку решетка $\operatorname{Id} S$ всех l-идеалов drl-полукольца S дистрибутивна, то βS будет булевой решеткой, но не обязательно подрешеткой решетки $\operatorname{Id} S$.

Пространство $\operatorname{Max} \beta S$ булевой решетки βS является нульмерным компактом, т. е. хаусдорфовым компактным пространством с базой из открыто-замкнутых множеств.

Пусть $M \in \operatorname{Max} \beta S$. Обозначим $0_M = \cup\{A \in \beta S : A \in M\}$. Получаем еще один пучок drl-полуколец со слоями $S/0_M$, $M \in \operatorname{Max} \beta S\}$, который обозначим через $(\Psi(S), \operatorname{Max} \beta S)$.

Теорема [44, теорема 2]. *Произвольное drl-полукольцо S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка* $(\Psi(S), \operatorname{Max} \beta S)$ *неприводимых drl-полуколец.*

Наконец, в [45] определяются компактные пучки drl-полуколец и изучаются их свойства. В частности, описано строение неприводимых и максимальных l-идеалов drl-полукольца сечений компактного пучка. Получено описание компактного пучка f-полуколец в терминах непрерывного отображения его неприводимого (и максимального) спектра на компакт [45, теорема 1]. В работе также содержится доказательство того, что f-полукольцо является гельфандовым тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу всех глобальных сечений компактного

пучка f-полуколец с единственным максимальным идеалом [45, теорема 2].

Универсально-алгебраическое направление

Характерным результатом данного направления служит описание минимальных многообразий полуколец, полученное С. В. Полиным [46].

Проиллюстрируем это направление на примере мультипликативно идемпотентных полуколец [12; 17]. Полукольцо с идемпотентным умножением (с тождеством $xx = x$) называется *мультипликативно идемпотентным.* Мультипликативно идемпотентными полукольцами являются булевы кольца и дистрибутивные решетки. Полукольцо, являющееся одновременно мультипликативно идемпотентным и аддитивно идемпотентным (с тождеством $x+x = x$), называется просто *идемпотентным.*

Перечислим все двухэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца: поле $\mathbb{Z}_2$; дистрибутивная решетка $\mathbb{B}$; идемпотентное монополукольцо $\mathbf{D} = \{a, 1\}$; мультипликативно идемпотентное полукольцо $\mathbf{T} = \{\infty, 1\}$ с константным сложением $x + y = \infty$; идемпотентное *полукольцо левых нулей* $\mathbf{L} = \{a, b\}$, т. е. полукольцо с тождеством $xy = x$; идемпотентное *полукольцо правых нулей* $\mathbf{R} = \{a, b\}$, т. е. полукольцо с тождеством $xy = y$.

Собственный идеал J полукольца S называется: *простым*, если $\forall a, b \in S(ab \in J \Rightarrow (a \in J$ или $b \in J))$; *максимальным*, если $J \subset I$ влечет $I = S$ для любого идеала I в S.

Напомним, что дистрибутивная решетка с $1 \neq 0$, каждый элемент a которой имеет дополнение b: $a + b = 1$ и $ab = 0$, называется *булевой.* Дистрибутивная решетка S с нулем 0, в которой интервалы $[0, a] = \{s \in S : s \leq a\}$ являются булевыми решетками для любых $a \in S$, называется *обобщенной булевой* решеткой.

Сформулируем ряд утверждений о структурных свойствах мультипликативно идемпотентных полуколец.

Теорема [17, теорема 1.2.1]. *Произвольное полукольцо S коммутативно и мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда простые идеалы в S разделяют его элемент, т. е. для любых двух неравных элементов полукольца S в нем существует простой идеал, содержащий ровно один из этих элементов.*

Следствие (теорема Биркгофа). *Всякая дистрибутивная решетка S изоморфна некоторой решетке множеств (множеств простых идеалов в S).*

Теорема [17, предложение 3.3.2]. *Любое конечнопорожденное мультипликативно идемпотентное полукольцо конечно.*

Теорема [17, теорема 4.1.1]. *Любое конечное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем разлагается в прямую сумму булева кольца и мультипликативно идемпотентного антикольца.*

В главе 5 монографии [17] изучались свойства решетки $L(M)$ всевозможных подмногообразий многообразия M всех мультипликативно идемпотентных полуколец. Доказано, что решетка $L(M)$ счетная, с псевдодополнениями, 0-дистрибутивная и немодулярная. В решетке $L(M)$ найдены все 64 псевдодополнения подмногообразий в M: относительно отношения включения они образуют булеву подрешетку в $L(M)$.

Теорема [17, следствие 6.2.2]. *Многообразие $M(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T})$ полуколец, порожденное полукольцами $\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T}$, задается одним тождеством $x + 2xy + yz = x + 2xz + yz$.*

Теорема [17, теорема 6.2.2]. *Решетка подмногообразий многообразия $M(\mathbf{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T})$ является 16-элементной булевой решеткой.*

В параграфе 6.3 [17] описаны все 16 подмногообразий многообразия $M(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbf{D}, \mathbf{T})$.

Теорема [47]. *Решетка подмногообразий многообразия всех идемпотентных полуколец является 78-элементной дистрибутивной решеткой.*

Сформулируем два новых результата, полученных Е. М. Вечтомовым и А. А. Петровым.

Теорема. *Любое конгруэнц-простое мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем изоморфно $\mathbb{B}$ или $\mathbb{Z}_2$.*

Теорема. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем обладает свойством максимальности простых идеалов тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенной булевой решетки.*

Изучение полуколец специального вида

Коснемся нескольких важных тем.

Линейная алгебра над полукольцами

Теории матриц с коэффициентами из различных полуколец посвящены докторские диссертации А. Э. Гутермана [48] и Я. Н. Шитова [49], статьи Н. К. Кривулина [50; 51]. Исследовались разнообразные ранги матриц над полукольцами, линейные и полукольцевые гомоморфизмы

полуколец матриц. Эта тематика активно развивается, имеет многочисленные приложения.

Идемпотентная математика

Большое влияние на направления развития теории полуколец оказывают потребности решения практических задач — полукольца успешно применяются в дискретной математике, компьютерной алгебре, идемпотентном анализе, теории оптимального управления и других разделах математики и ее приложениях.

Как пример отметим тропическую (идемпотентную) математику. Это быстро развивающаяся область математики, которая связана с изучением полуколец с идемпотентным сложением. Название «тропическая» появилось в честь бразильского математика венгерского происхождения Имре Симона, исследовавшего тропическое полукольцо в связи с вопросами информатики и теории оптимизации.

Первоначально тропическая математика развивалась в тесной связи с прикладными вопросами. Так, некоторые задачи оптимизации при формулировке их на языке идемпотентных полуколец становятся более удобными (например, с линейными ограничениями и целевой функцией), и одно из важных направлений исследований тропической математики ориентировано на разработку эффективных методов решения как для известных, так и новых оптимизационных задач. Одной из первых работ по идемпотентной математике, по крайней мере в нашей стране, была статья Н. Н. Воробьева 1967 года [52], в которой рассматривались начала матричной и линейной алгебры над идемпотентными полукольцами. Развитие идей тропической математики привело к интересным теоретическим результатам. Отметим построение начал идемпотентной линейной алгебры, исследование аналогов основных понятий «евклидовой» геометрии, тропической алгебраической геометрии [53].

Основной вклад в развитие тропической математики (как теоретических, так и прикладных направлений) принадлежит академику В. П. Маслову и его школе [54–56]. Созданный ими идемпотентный анализ и идемпотентный функциональный анализ базируются на квантовании (и деквантовании) Маслова — это логарифмические преобразования, восходящие еще к работам Э. Шредингера. Интересной, а для некоторых и проясняющей природу квантования Маслова, выглядит следующая аналогия: «. . .наряду с традиционной математикой (над полями) возникает ее «тень» — идемпотентная математика. Эта тень соотно-

сится с традиционной математикой примерно так же, как классическая физика с квантовой теорией» [57].

Полукольца непрерывных функций

Они образуют класс полуколец, имеющих функционально-топологическую природу.

Классическим объектом функциональной алгебры служит кольцо $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ всех непрерывных действительнозначных функций на топологическом пространстве X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций [58]. Кольцо $C(X)$ является кольцом разностей как полукольца $C^+(X) = C(X, \mathbb{R}^+)$ всех непрерывных неотрицательных функций на X, так и полуполя $U(X) = C(X, \mathbb{P})$ всех непрерывных положительных функций на X.

Если в полукольцах $C^+(X)$ и $U(X)$ вместо обычной операции сложения взять операцию $\vee$ (max двух функций), сохранив операцию умножения, то получим аддитивно идемпотентное полукольцо $C^\vee(X) = C(X, \mathbb{R}^\vee)$ и аддитивно идемпотентное полуполе $U^\vee(X) = C(X, \mathbb{P}^\vee)$. Полукольца $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ будут положительными полукольцами, т. е. в них элементы вида $f + 1$ и $f \vee 1$ обратимы.

Начало систематическому исследованию полуколец $C^+(X)$ и полуполей $U(X)$ положила статья 1998 г. [59]. Теории полуколец непрерывных функций посвящены двухтомная монография [60], обзорная работа [61], статьи [62; 63]. Изучение различных видов полуколец непрерывных функций продолжается и расширяется.

В книге [60] поставлены открытые вопросы для решения и дальнейшего развития теории полуколец непрерывных функций; см. Задачи 9.31—9.32, 14.1 (эта задача уже решена В. В. Сидоровым), 14.97, 14.98, 16.14, 18.14—18.16, 19.5, 22.27, 41.2 и Заключение.

Полукольца с циклическим умножением

Рассматриваются циклические полукольца как с коммутативным, так и с некоммутативным сложением.

Полукольцо S называется (мультипликативно) *циклическим*, если его мультипликативная полугруппа является циклической $S = (a) = \{1, a, \ldots, a^m, \ldots\}$. Для конечного циклического $(k + n)$-элементного полукольца $S = (a)$ имеем

$$S : 1, a, \ldots, a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+n-1}, \text{ где } a^{k+n} = a^k$$

при $k \geq 0, n \geq 0, k + n \geq 2$.

Такие циклические полугруппа и полукольцо $S = (a)$ имеют *тип* (k, n) и образующую a. При $n = 1$ элемент a^k будет поглощающим по умножению, а при $n \geq 2$ получаем цикл $\{a^k, a^{k+1}, \ldots, a^{k+n-1}\}$, являющийся полуполем с некоммутативным сложением. Если $k = 0$, то S — циклическое полуполе с некоммутативным сложением. Поэтому циклические полукольца с коммутативным сложением имеют тип $(k, 1)$.

С точностью до изоморфизма существуют четыре бесконечных циклических полукольца. На бесконечной мультипликативной циклической полугруппе $S = (a) : 1 < a < \ldots < a^m \ldots$ зададим четыре операции сложения: max и min относительно линейного порядка $\leq$; левое $(x + y = x)$ и правое $(x + y = y)$. Получаем четыре циклических полукольца, первые два из которых с идемпотентным коммутативным сложением, последние два — с идемпотентным некоммутативным сложением.

Проблема описания конечных циклических полуколец — это задача нахождения всевозможных операций сложения на мультипликативной циклической полугруппе S типа (k, n), превращающих S в полукольцо. Эта задача оказалась совсем непростой.

Классификация конечных циклических полуколец с неидемпотентным коммутативным сложением предложена в статье [64]. Новый метод изучения конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением предложен в статье [65].

Циклические полукольца с некоммутативным сложением исследовались в работах [66; 67] в зависимости от условий идемпотентности или неидемпотентности операции сложения. См. также обзор [68].

Мини-полукольца

Полукольца с небольшим числом элементов играют заметную роль в теории полуколец как наглядные примеры, иллюстрирующие многие специфические полукольцевые понятия и показывающие структурное разнообразие класса полуколец.

С точностью до изоморфизма существует 10 двухэлементных полуколец, задаваемых таблицами Кэли операций сложения и умножения на двухэлементном множестве $\{a, b\}$. Существуют 43 трехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца [69] и 61 трехэлементное аддитивно идемпотентное полукольцо [70]. Для перечисления мини-полуколец использовались компьютерные программы.

Наряду с конечными циклическими полукольцами мини-полукольца с различными дополнительными условиями могут найти применение в криптографии и теории кодирования.

Список литературы

1. **Golan J. S.** Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

2. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which cancelation law of addition does not hold // *Bull. Amer. Math. Soc. 1934. V. 40. Pp. 914–920.*

3. **Dedekind R.** Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen // *Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlessungen Uber Zahlentheorie, 4 Anfl., Druck und Verlag, Braunschweig. 1894.*

4. **Hilbert D.** Über den Zahlbegriff // *Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 1899. V. 8. Pp. 180–184.*

5. **Hebisch U., Weinert H. J.** Semirings: theory and applications in computer science. Series in Algebra. Vol. V. World Scientific. Singapore, 1998. 361 p.

6. **Golan J. S.** The theory of semirings with applications in mathemayics and theoretical computer science // *Pitman monographs and syrveys in pure and applied mathematics. 1992 (1991). V. 54.*

7. **Glazek K.** A Short Guide Through the Literature on Semirings // *Preprint No. 39. University of Wroclaw, Math. Inst., Wroclaw. 1985.*

8. **Glazek K.** A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science. Technical University Press. 2002.

9. **Масляев Д. А., Чермных В. В.** Полукольца косых многочленов Лорана // *Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 521–533.*

10. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца : учебное пособие. Киров: Изд-во ВГПУ. 2000, 44 с.

11. **Лукин М. А.** Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах // *Проблемы современного математического образования в*

педвузах и школах России: Интерактивные формы обучения математике студентов и школьников : материалы V Всероссийской научно-методической конференции. Киров: Изд-во ВятГУ, 2012. С. 312–316.

12. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Мультипликативно идемпотентные полукольца // *Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18. Вып. 4. С. 41–70.*

13. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** К теории полутел //*Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 2. С. 161–162.*

14. **Вечтомов Е. М., Черанева А. В.** Полутела и их свойства // *Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 3–54.*

15. **Полин С. В.** Простые полуполя и полутела // *Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 1. С. 90–101.*

16. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец : монография. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

17. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 144 с.

18. **Вечтомов Е. М., Лукин М. А.** Полукольца, являющиеся объединениями кольца и полутела // *Успехи математических наук. 2008. Т. 63. Вып. 6. С. 159–160.*

19. **Лукин М. А.** О полукольцевом объединении кольца и полутела // *Известия вузов. Математика. 2008. № 12. С. 76–80.*

20. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.** Элементы теории полуколец : монография. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2012. 228 с.

21. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Структура абелево-регулярных положительных полуколец // *Успехи математических наук. 2007. Т. 62. Вып. 1. С. 199–200.*

22. **Вечтомов Е. М., Старостина О. В.** Обобщенные абелево-регулярные положительные полукольца // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2007. Вып. 7. С. 3–16.*

23. **Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Vechtomov E. M.** Abelian-regular positive semirings // *Journal of Mathematical Science [New York]. 1999. V. 97. Pp. 4162–4176.*

24. **Вечтомов Е. М.** Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // *Математические заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 15–24.*

25. **Богдалов И. Ф.** Обратимость теоремы Гильберта о базисе в классе полуколец // *Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России : тезисы докладов Межрегиональной научной конференции. Киров: Изд-во ВятГУ, 1998. С. 171–172.*

26. **Ильин С. Н.** Критерий регулярности полных матричных полуколец // *Математические заметки. 2001. Т. 70. Вып. 3. С. 366–374.*

27. **Ильин С. Н.** О применимости двух теорем теории колец и модулей // *Математические заметки. 2008. Т. 83. Вып. 4. С. 563–574.*

28. **Ильин С. Н.** О гомологической классификации полуколец // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.*

29. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings // *Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. Pp. 45–50.*

30. **Бабенко М.В., Чермных В. В.** О полукольцах косых многочленов над полукольцом Безу // *Математические заметки. 2022. Т. 111* (в печати).

31. **Rao P. R.** Lattice ordered semirings // *Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1981. V. 9. Pp. 119–149.*

32. **Swamy K. L. N.** Duallity residuated lattice ordered semigroups // *Math. Ann. 1965. V. 159. Pp. 105–114.*

33. **Чермных О. В.** О *drl*-полугруппах и *drl*-полукольцах // *Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 4. С. 167–179.*

34. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of noncommutative rings // *Comm. Algebra. 1976. V. 39. Pp. 512–526.*

35. **Grothendieck A., Dieudonne J.** Éléments de Géométrie Algébrique1. — I.H.E.S., Publ. Math. 4. — Paris, 1960.

36. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings // *Mem. Amer. Math. Soc. 1967. V.70. Pp. 1–112.*

37. **Simmons H.** Compact representations — the lattice theory of compact ringed spaces // *J. Algebra. 1989. V. 126, Pp. 493–531.*

38. **Чермных В. В.** Пучковые представления полуколец // *Успехи математических наук. 1993. Т. 48. № 5. С. 185–186.*

39. **Чермных В. В.** Функциональные представления полуколец // *Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. № 3. С. 111–227.*

40. **Марков Р. В., Чермных В. В.** О пирсовских слоях полуколец // *Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19, № 2. С. 171–186.*

41. **Марков Р. В., Чермных В. В.** Полукольца, близкие к регулярным, и их пирсовские слои // *Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 213–221.*

42. **Бабенко М. В., Чермных В. В.** Пирсовские слои полуколец косых многочленов // *Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 48–60.*

43. **Чермных В. В., Чермных О. В.** Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец // *Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 946–971.*

44. **Чермных О. В.** Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. II // *Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 677–684.*

45. **Чермных В. В., Чермных О. В.** Функциональные представления решеточно упорядоченных полуколец. III // *Труды ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 3. С. 235–248.*

46. **Полин С. В.** Минимальные многообразия полуколец // *Математические заметки. 1980. Т. 27. № 4. С. 527–537.*

47. **Pastijn F.** Varieties Generated by Ordered Bands. II // *Order. 2005. V. 22. Pp. 129-143.*

48. **Гутерман А. Э.** Фробениусовы эндоморфизмы пространства матриц : дис. ... д-ра физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2009. 321 с.

49. **Шитов Я. Н.** Линейная алгебра над полукольцами : дис. ... д-ра физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2015. 302 с.

50. **Кривулин Н. К.** О решении обобщенных линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. 2006. № 1. С. 23–36.*

51. **Кривулин Н. К., Романова Е. Ю.** Приближенная факторизация положительных матриц с помощью методов тропической оптимизации // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. 2020. Т. 16. № 4. С. 357–374.*

52. **Воробьев Н. Н.** Экстремальная алгебра положительных матриц // *Elektronische Informatiosverarbeitung und Kybernetik. 1967. V. 3. P. 39–71.*

53. **Joswig M.** Essentials of Tropical Combinatorics. Graduate Studies in Mathematics. V. 219. 2021. 398 p.

54. **Маслов В. П., Колокольцов В. Н.** Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.

55. **Gondran M., Minoux M.** Graphs, Dioids and Semirings. New Models and Algorithms. New York: Springer, 2008. 400 p.

56. **Kolokoltsov V. N., Maslov V. P.** Idempotent Analysis and its Applications. Mathematics and its Applications. Vol. 401. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

57. **Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.** Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // *Математические заметки. 2001. Т. 69. № 5. С. 758–797.*

58. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. New York, 1976. 300 p.

59. **Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.** Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // *Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.*

60. **Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.** Элементы функциональной алгебры : монография : в 2 т. [под ред. Е. М. Вечтомова]. Киров: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2016. Т. 1. 384 с.; Т. 2. 316 с.

61. **Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Сидоров В. В.** Полукольца непрерывных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 53–131.*

62. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций // *Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 4. С. 87–107.*

63. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций // *Математические заметки. 2009. Т. 85. Вып. 6. С. 803–816.*

64. **Бестужев А. С., Вечтомов Е. М.** Циклические полукольца с коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 20. С. 8–39.*

65. **Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В.** Конечные циклические полукольца с полурешеточным сложением, заданным двухпорожденным идеалом натуральных чисел // *Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 1. С. 82–100.*

66. **Вечтомов Е. М., Орлова (Лубягина) И. В.** Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // *Фун-*

даментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.

67. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 17–41.*

68. **Бестужев А. С., Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Строение циклических полуколец // *Сборник материалов IX науч. конф. ЭКОМОД-2016 «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий» [Электронный ресурс]. Киров: Изд-во ВятГУ, 2016. С. 21–30.*

69. **Вечтомов Е. М., Петров А. А.** Трехэлементные мультипликативно идемпотентные полукольца // *Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 2. С. 13—23.*

70. **Zhao X., Ren M., Crvenkovic S., Shao Y., Dapic** P. The variety generated by an ai-semiring of order three // *Ural Mathematical Journal. 2020. V. 6. Issue 2. Pp. 117–132.*

Summary

Vechtomov E. M., Chermnykh V. V. Main directions of the development of the semiring theory

The article highlights and analyzes the main directions of formation and development of Semiring Theory. The first ring-module direction summarizes and extends the theory of rings and modules onto semirings and semimodules over them. The next one is a universal algebraic direction that is based on Universal Algebra and Group Theory. The third direction is connected with study of special classes of semirings and is aimed at using semirings within Mathematics, in Computer Sciences and in applications of Mathematics. The first two directions contain investigating of the general theory of semirings, building structural theories for certain important and interesting classes of abstract semirings. The third direction includes describing of finite semirings with certain conditions.

Keywords: semiring, semifield, semimodule, ring, distributive lattice, development of Theory of Semirings.

References

1. **Golan J. S.** *Semirings and their Applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 38 p.

2. **Vandiver H. S.** Note on a simple type of algebra in which cancelation law of addition does not hold. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1934, V. 40. Pp. 914–920.

3. **Dedekind R.** Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen *Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlessungen Uber Zahlentheorie*, 4 Anfl., Druck und Verlag, Braunschweig, 1894.

4. **Hilbert D.** Über den Zahlbegriff. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 1899, V. 8. Pp. 180–184.

5. **Hebisch U., Weinert H. J.** *Semirings: theory and applications in computer science.* Series in Algebra. Vol. V. World Scientific, Singapore, 1998. 361 p.

6. **Golan J. S.** The theory of semirings with applications in mathemayics and theoretical computer science. *Pitman monographs and syrveys in pure and applied mathematics*, V. 54, 1992 (1991).

7. **Glazek K.** A Short Guide Through the Literature on Semirings. *Preprint No. 39. University of Wroclaw*, Math. Inst., Wroclaw, 1985.

8. **Glazek K.** *A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science.* Technical University Press, 2002.

9. **Maslyaev D. A., Chermnykh V. V.** Skew Laurent polynomial semiring. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical News], 2020, V. 17. Pp. 521–533.

10. **Vechtomov E. M.** *Vvedenie v polukoltsa: uchebnoe posobie* [Introduction to semirings: A Tutorial], Kirov, Izd. Vyatskogo gospeduniversiteta, 2000. 44 p.

11. **Lukin M. A.** On universal congruence on semirings. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: interaktivnye formy obucheniya matematike studentov i*

shkol'nikov. Materialy V Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsyi [Problems of Modern Mathematics Education in Pedagogical Universities and Schools of Russia: Interactive Forms of Teaching Mathematics to Students and Schoolchildren : Proceedings of the V All-Russian Scientific and Methodical Conference], Kirov, Izd. VyatGGU, 2012. Pp. 312–316.

12. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2013, V. 18. No. 4. Pp. 41–70.

13. **Vechtomov E. M., Cheraneva A. V.** On the theory of semidivision rings). *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 2008, V. 63. No. 2. Pp. 161–162.

14. **Vechtomov E. M., Cheraneva A. V.** Semifields and their properties. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, V. 14. No. 5. Pp. 3–54.

15. **Polin S. V.** Simple semisfields and semifields. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1974, V. 15. No. 1. Pp. 90–101.

16. **Chermnykh V. V.** *Funktsional'nye predstavleniya polukolets: monografiya* [Functional representations of semirings: monography], Kirov, Izd. VyatGGU, 2010. 224 p.

17. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** *Polukoltsa s idempotentnym umnozheniem: monografiya* [Semirings with idempotent multiplication: monography], Kirov, OOO «Raduga-PRESS», 2015. 144 p.

18. **Vechtomov E. M., Lukin M. A.** Semirings which are the unions of a ring and a semifield. *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 2008, V. 63. No. 6. Pp. 159–160.

19. **Lukin M. A.** Semiring joins of a ring and semifield. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Proceedings of Higher Education Institutions. Mathematics], 2008. No. 12. Pp. 76–80.

20. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnykh V. V.** *Elementy teorii polukolets* [Elements of semiring theory], Kirov, OOO «Raduga-PRESS», 2012. 228 p.

21. **Vechtomov E. M., Starostina O. V.** Structure of abelian regular positive semirings). *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 2007. V. 62. No. 1. Pp. 199–200.

22. **Vechtomov E. M., Starostina O. V.** Generalized abelian regular positive semirings). *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1. Matematuka. Mehanika. Informatika* [Bulletin of the Syktyvkar University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2007, Vol. 7. Pp. 3–16.

23. **Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Vechtomov E. M.** Abelian-regular positive semirings. *Journal of Mathematical Science [New York]*, 1999, V. 97. Pp. 4162–4176.

24. **Vechtomov E. M.** Annihilator characterizations of Boolean rings and Boolean lattices. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1993, V. 53. No. 2. Pp. 15–24.

25. **Bogdalov I. F.** Invertibility of the Hilbert basis theorem in the class of semirings. *Problemy sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya v pedvuzah i shkolah Rossii: Tezisy dokladov Mezhregional'noy nauchnoy konferentsyi* [Problems of Modern Mathematics Education in Pedagogical Universities and Schools of Russia : Abstracts of the Interregional Scientific Conference], Kirov, Izd. Vyatskogo gospeduniversiteta, 1998. Pp. 171–172.

26. **Il'in S. N.** Regularity Criterion for Complete Matrix Semirings. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, V. 70. No. 3. Pp. 366–374.

27. **Il'in S. N.** On the applicability to semirings of two theorems from the theory of rings and modules. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2008, V. 83. No. 4. Pp. 563–574.

28. **Il'in S. N.** On the homological classification of semirings. *Itogi nauki i tehniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results of Science and Technology. Modern Mathematics and its Applications. Thematic reviews], 2018, V. 158. Pp. 3–22.

29. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, V. 56. Pp. 45–50.

30. **Babenko M. V., Chermnykh V. V.** On skew polynomial semirings on Bezout semiring. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2022, V. 111.

31. **Rao P. R.** Lattice ordered semirings. *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.*, 1981, V. 9. Pp. 119–149.

32. **Swamy K. L. N.** Duallity residuated lattice ordered semigroups. *Math. Ann.*, 1965, V. 159. Pp. 105–114.

33. **Chermnykh O. V.** On *drl*-semigroups and *drl*-semirings) *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshev collection], 2016, V. 17. No. 4. Pp. 167–179.

34. **Burgess W. D., Stephenson W.** Pierce sheaves of noncommutative rings. *Comm. Algebra*, 1976, V. 39. Pp. 512–526.

35. **Grothendieck A., Dieudonne J.** *Éléments de Géométrie Algébrique 1.* I.H.E.S., Publ. Math. 4. — Paris, 1960.

36. **Pierce R. S.** Modules over commutative regular rings. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1967, V. 70. Pp. 1–112.

37. **Simmons H.** Compact representations — the lattice theory of compact ringed spaces. *J. Algebra*, 1989, V. 126. Pp. 493–531.

38. **Chermnykh V. V.** Sheaf representations of semirings. *Uspehi matematicheskih nauk* [Advances in mathematical sciences], 1993, V. 48. No. 5. Pp. 185–186.

39. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2012, V. 17. No. 3. Pp. 111–227.

40. **Markov R. V., Chermnykh V. V.** On Pierce stalks of semirings. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2014, V. 19. No. 2. Pp. 171–186.

41. **Markov R. V., Chermnykh V. V.** Semirings close to regular and their Pierce stalks) *Trydy IMM UrO RAN* [Proceedings of IMM UB RAS], 2015, V. 21. No. 3. Pp. 213–221.

42. **Babenko M. V., Chermnykh V. V.** Pierce stalks of semirings of skew polynomials. *Trydy IMM UrO RAN* [Proceedings of IMM UB RAS], 2021, V. 27. No. 4. Pp. 48–60.

43. **Chermnykh V. V., Chermnykh O. V.** Functional representations of lattice-ordered semirings. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical News], 2017, V. 145. Pp. 946–971.

44. **Chermnykh O. V.** Functional representations of lattice-ordered semirings. III. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical News], 2018, V. 15. Pp. 677–684.

45. **Chermnykh V. V., Chermnykh O. V.** Functional representations of lattice-ordered semirings. III. *Trydy IMM UrO RAN* [Proceedings of IMM UB RAS], 2020, V. 26. No. 3. Pp. 235–248.

46. **Polin S. V.** Minimal varieties of semirings. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1980, V. 27. No. 4. Pp. 527–537.

47. **Pastijn F.** Varieties Generated by Ordered Bands. II. *Order.*, 2005, V. 22. Pp. 129−143.

48. **Guterman A. E.** *Frobeniusovy endomorfizmy prostranstva matrits: dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk* [Frobenius endomorphisms of the matrix space: dissertation for the degree of Doctor of Physics and Mathematics], M.: MSU, 2009. 321 p.

49. **Shitov Ya. N.** *Lineynaya algebra nad polukoltsami: dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskih nauk* [Linear algebra over semirings: dissertation for the degree of Doctor of Physics and Mathematics], M.: MSU, 2015. 302 p.

50. **Krivulin N. K.** On the solution of generalized linear vector equations in idempotent algebra. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1* [Bulletin of Saint Petersburg University. Series 1], 2006. No. 1. Pp. 23–36.

51. **Krivulin N. K., Romanova E. Yu.** Approximate factorization of positive matrices using tropical optimization methods. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10* [Bulletin of Saint Petersburg University. Series 10], 2020, V. 16. No. 4. Pp. 357–374.

52. **Vorob'ev N. N.** Extreme algebra of positive matrices. *Elektronische Informatiosverarbeitung und Kybernetik* [Electronic information processing and cybernetics], 1967, V. 3. Pp. 39–71.

53. **Joswig M.** *Essentials of Tropical Combinatorics. Graduate Studies in Mathematics.* V. 219, 2021. 398 p.

54. **Maslov V. P., Kolokol'tsov V. N.** *Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii* [Idempotent analysis and its application in optimal control], M.: Nauka, 1994.

55. **Gondran M., Minoux M.** *Graphs, Dioids and Semirings. New Models and Algorithms.* New York: Springer, 2008. 400 p.

56. **Kolokoltsov V. N., Maslov V. P.** *Idempotent Analysis and its Applications.* Mathematics and its Applications, V. 401, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

57. **Litvinov G. L., Maslov V. P., Shpiz G. B.** Idempotent functional analysis: an algebraic approach. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2001, V. 69. No. 5. Pp. 758–797.

58. **Gillman L., Jerison M.** *Rings of continuous functions.* New York, 1976. 300 p.

59. **Varankina V. I., Vechtomov E. M., Semenova I. A.** Semirings of continuous non-negative functions: divisibility, ideals, congruences. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1998, V. 4. No. 2. Pp. 493–510.

60. **Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V.** *Elementy funktsionalnoy algebry: monografiya. V 2 tomah* [Elements of functional algebra: monography. In 2 volumes] [edited by Vechtomov], Kirov, OOO «Raduga-PRESS», 2016, V. 1, 384 p.; V. 2. 316 p.

61. **Vechtomov E. M., Mikhalev A. V., Sidorov V. V.** Semirings of continuous functions *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2016, V. 21. No. 2. Pp. 53–131.

62. **Vechtomov E. M., Chuprakov D. V.** The principal kernels of semifields of continuous positive functions. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, V. 14. No. 4. Pp. 87–107.

63. **Vechtomov E. M., Chuprakov D. V.** Extension of congruences on semirings of continuous functions. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2009, V. 85. No. 6. Pp. 803–816.

64. **Bestuzhev A. S., Vechtomov E. M.** Cyclic semirings with commutative addition. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mehanika. Informatika* [Bulletin of the Syktyvkar University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Informatics], 2015, V. 20. Pp. 8–39.

65. **Vechtomov E. M., Chuprakov D. V.** Finite cyclic semirings with semilattice addition given by the two-generated ideal of natural numbers. *Chebyshevskiy sbornik* [Chebyshev collection], 2020, V. 21. No. 1. Pp. 82–100.

66. **Vechtomov E. M., Orlova (Lubyagina) I. V.** Cyclic semirings with idempotent noncommutative addition. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2012, V. 17. No. 1. Pp. 33–52.

67. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** Cyclic semirings with idempotent commutative addition. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2015, V. 20. No. 6. Pp. 17–41.

68. **Bestuzhev A. S., Vechtomov E. M., Orlova I.V.** Structure of cyclic semirings. *Sbornik materialov IX nauchnoy konferentsii EKOMOD-2016 "Matematicheskoe modelirovanie razvivayuscheysya ekonomiki, ekologii i tehnologii"* [Proceedings of the IX Scientific Conference ECOMOD-2016 "Mathematical modeling of developing

economy, ecology and technology"], Kirov: Izd. VyatGU, 2016. Pp. 21–30.

69. **Vechtomov E. M., Petrov A. A.** Multiplicatively idempotent semirings with three elements. *Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Mathematical Bulletin of Vyatka State University], 2021. No. 2. Pp. 13−23.

70. **Zhao X., Ren M., Crvenkovic S., Shao Y., Dapic** P. The variety generated by an ai-semiring of order three. *Ural Mathematical Journal*, 2020, V. 6. No. 2. Pp. 117–132.

Для цитирования: Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Основные направления развития теории полуколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 4−40. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_4

For citation: Vechtomov E. M., Chermnykh V. V. Main directions of the development of the semiring theory. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021. No. 4 (41), pp. 4−40. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_4

Вятский государственный университет
Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина

Поступила 01.11.2021

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 539.3 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_41**

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Андрюкова В. Ю.

Приведен подробный вывод формул упругой энергии и работы внешних сил для колец, нагруженных центральными силами. Представлены выражения для вычисления критической нагрузки в случае плоской деформации кольца, а также в сучае пространственной формы потери устойчивости.

Ключевые слова: криволинейный стержень, критическая нагрузка, устойчивость, уравнения Эйлера, работа внешних сил, упругая энергия.

Предположим, что криволинейный тонкий упругий стержень находится в равновесии под действием каких-либо сил. Пусть M – некоторая точка на оси стержня. Пусть X, Y, Z – три взаимно перпендикулярные оси в точке M, ось Z направлена по касательной к линии деформированного стержня, X, Y по главным осям инерции поперечного сечения. Выберем на оси стержня точку M_0, которая в результате деформации переходит в точку M. Соответствующие три взаимно перпендикулярные оси обозначим через (X_0, Y_0, Z_0), в результате поворота при деформации они переходят в оси (X, Y, Z). Обозначим s – длину дуги стержня, отсчитываемой от некоторой точки. Косинусы углов между осями (X_0, Y_0, Z_0) и (X, Y, Z) [1] запишем в матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\gamma & \cos\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \sin\alpha & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

© Андрюкова В. Ю., 2021.

Проекции перемещения в точке M_0 на оси (X_0, Y_0, Z_0) обозначим через (w, v, u). Предположим, что точки M_0 и M движутся вдоль стержня со скоростью, равной 1, системы осей (X, Y, Z) и (X_0, Y_0, Z_0) вращаются вокруг точек M_0 и M с угловыми скоростями Ω_0 и Ω. Проекции угловой скорости Ω на оси (X, Y, Z) обозначим (p, q, r), а проекции угловой скорости Ω_0 на оси (X_0, Y_0, Z_0) — (p_0, q_0, r_0). Пусть $\delta p = p - p_0$, $\delta q = q - q_0$, $\delta r = r - r_0$. Будем считать деформации малыми так, что можно положить

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1,$$

$$\sin\alpha = \alpha, \sin\beta = \beta, \sin\gamma = \gamma.$$

Тогда величины δp, δq, δr, углы α, β, γ и перемещения w, v, u связаны уравнениями [2]

$$\begin{cases} \delta p = \dfrac{d\alpha}{ds} - r_0\beta + q_0\gamma, \\ \delta q = \dfrac{d\beta}{ds} - p_0\beta + r_0\gamma, \\ \delta r = \dfrac{d\gamma}{ds} - q_0\beta + p_0\gamma, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{dw}{ds} + q_0 u - r_0 v, \\ -\alpha = \dfrac{dv}{ds} + r_0 w - p_0 u, \\ 0 = \dfrac{du}{ds} + p_0 v - q_0 w. \end{cases} \tag{2}$$

В результате деформации упругая энергия стержня может быть вычислена по формуле [2]

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l (A\delta p^2 + B\delta q^2 + C\delta r^2)ds, \tag{3}$$

где l – длина стержня, A, B – главные жесткости стержня при изгибе, C – жесткость при кручении.

Пусть теперь ось стержня в недеформированном состоянии есть окружность радиуса R и одна из главных осей сечения направлена к центру окружности, ось Y_0 перпендикулярна к плоскости кольца. В нашем случае в формулах (1) – (2) $p_0 = 0$, $q_0 = \frac{1}{R}$, $r_0 = 0$. Вводя вместо дуги S центральный угол ϑ так, что $S = R\vartheta$, получим формулы

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{R}\Big(\dfrac{dw}{d\vartheta} + u\Big), \\ \alpha = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dv}{d\vartheta}, \\ w = \dfrac{du}{d\vartheta}. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \delta p = -\dfrac{1}{R^2}v'' + \dfrac{1}{R}\gamma, \\ \delta q = \dfrac{1}{R^2}(w'' + u'), \\ \delta r = \dfrac{1}{R}\gamma' + \dfrac{1}{R^2}v'. \end{cases} \tag{5}$$

Выражение для упругой энергии в формуле (3) примет вид

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{B}{R^3}(w'' + u')^2 + \frac{A}{R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{R^2}(\gamma' + \frac{1}{R}v'')^2\right)d\vartheta. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение неподвижную систему координат (ξ, η, ζ) так, что проекции перемещений w, v, u на эти оси определяются формулами

$$\begin{cases} \xi = (w - R)\cos\vartheta - u\sin\vartheta, \\ \eta = (w - R)\sin\vartheta + u\cos\vartheta, \\ \zeta = v. \end{cases} \tag{7}$$

Дифференцируя последние равенства, получим

$$\begin{cases} \xi' = (w' + u)\cos\vartheta + (u' - w - R)\sin\vartheta, \\ \eta' = -(w' + u)\sin\vartheta + (u' - w - R)\cos\vartheta, \\ \zeta' = v'. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = (w' + u)^2 + 2Ru' - 2Rw + (u' - w)^2 + v'^2 + R^2 = R^2$$

или

$$(w' + u)^2 + 2Ru' - 2Rw + (u' - w)^2 + v'^2 = 0. \tag{8}$$

Последнее представляет собой условие несжимаемости оси кольца. В линейном приближении условие несжимаемости примет вид $u' = w$, что совпадает с третьим уравнением системы (2).

Предположим, что кольцо нагружено центральными силами P, равномерно распределенными по кольцу. В этом случае работа внешних сил может быть вычислена по формуле

$$W = -PR\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}-R\right)d\vartheta. \tag{9}$$

Обозначим подынтегральную функцию

$$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}-R = \sqrt{(w-R)^2+u^2+v^2}-R =$$

$$= R\sqrt{1+\frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}}-R.$$

Введем в рассмотрение функцию $\phi(t)$ и, разлагая ее в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка, получим

$$\phi(t) = \sqrt{1+t} \approx \phi(0)+\phi^{'}(0)t+\frac{1}{2}\phi^{''}(0)t^2 = 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2,$$

где

$$t = \frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}.$$

Тогда подынтегральная функция примет вид

$$\rho = R(1+1/2t-1/4t^2)-R =$$

$$= \frac{R}{2}\left(\frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}\right)-\frac{R}{4}\left(\frac{w^2}{R^2}-\frac{2w}{R}+\frac{u^2}{R^2}+\frac{v^2}{R^2}\right)^2.$$

Оставляя в последнем равенстве только квадратичные слагаемые, получим

$$\rho = -w+\frac{u^2}{2R}+\frac{v^2}{2R}-\frac{w^2}{2R}.$$

Далее из (8)

$$2Rw = (w'+u)^2+2Ru'+(u'-w)^2+v'^2,$$

с учетом условия несжимаемости $u' = w$

$$2Rw = (w'+u)^2+2Ru'+v'^2 = w'^2+2w'u+u^2+2Ru'+v'^2.$$

Интегрируя последнее равенство и учитывая условия периодичности перемещений $w(2\pi) - w(0) = 0$ и $u(2\pi) - u(0) = 0$, находим:

$$2R\int_0^{2\pi} w d\vartheta = 2R\int_0^{2\pi} u' d\vartheta + \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta +$$

$$+2\int_0^{2\pi} w' u^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

Учитывая, что

$$2\int_0^{2\pi} w' u d\vartheta = 2uw\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} w u' d\vartheta = -2\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta,$$

$$\int_0^{2\pi} u' d\vartheta = u\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

имеем

$$2R\int_0^{2\pi} w d\vartheta = \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta - 2\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta.$$

С учетом этого формула (9) примет вид

$$W = -PR\int_0^{2\pi} \rho d\vartheta = PR\Big(-\int_0^{2\pi} w d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta -$$

$$-\frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} 2w^2 d\vartheta\Big) = PR\Big(-\frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta - \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta - \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} u^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta\Big) =$$

$$= PR\Big(-\frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta - \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} w'^2 d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{R}\int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \frac{1}{2R}\int_0^{2\pi} v^2 d\vartheta\Big). \qquad (10)$$

Окончательно получаем выражение для работы внешних сил в квадратичном приближении:

$$W = -\frac{P}{2}\int_0^{2\pi} (2w^2 - w'^2 - v'^2 + v^2) d\vartheta. \qquad (11)$$

В положении равновесия полная энергия системы принимает минимальное значение. При расчете на устойчивость кольца требуется найти минимальное значение силы P, при которой вариационная задача

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{B}{R^3}(w''+u')^2 + \frac{A}{R}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + \frac{C}{R}(\gamma' + \frac{1}{R}v')^2\right)d\vartheta -$$

$$-\frac{P}{2}\int_0^{2\pi}(w'^2 - 2w^2 + v'^2 - v^2)d\vartheta \to \min_{u,v,w,\gamma} \tag{12}$$

имеет нетривиальное решение.

Заметим, что система дифференциальных уравнений Эйлера для функционала (12) распадается на две независимые подсистемы [3]:

$$\frac{B}{R^3}(w^{IV} + 2w'' + w) + P(w'' + 2w) = 0. \tag{13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{A}{R^3}v^{(4)} + \dfrac{C}{R^3}v'' + \dfrac{C+A}{R^2}\gamma'' - P(v''-v) = 0, \\ \dfrac{A+C}{R}v'' + C\gamma'' - A\gamma = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Уравнение (13) описывает плоскую деформацию кольца. Для вывода формулы вычисления критической нагрузки в [2] представляют периодическую функцию v в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin(k\vartheta + \phi)$$

и, подставляя в уравнение (13), получают

$$\frac{B}{R^3}(k^4 - 2k^2 + 1) - P(k^2 - 2) = 0.$$

Откуда

$$P = \frac{B}{R^3}\frac{(k^2-1)^2}{(k^2-2)}.$$

Критическая нагрузка в случае $k = 2$ равна

$$P_1 = \frac{4.5B}{R^3}. \tag{15}$$

Система уравнений (14) соответствует пространственной форме потери устойчивости кольца. Представив функции v и γ в виде тригонометрического ряда и вычислив их производные

$$v = \sum_{k=0}^{n} a_k(\sin k\vartheta + \phi), \quad v'' = -\sum_{k=0}^{n} a_k k^2 \sin(k\vartheta + \phi),$$

$$v^{(4)} = \sum_{k=0}^{n} a_k k^4 \sin(k\vartheta + \phi),$$

$$\gamma = \sum_{n=0}^{m} b_n \sin(n\vartheta + \phi), \quad \gamma'' = -\sum_{n=0}^{m} b_n n^2 \sin(n\vartheta + \phi),$$

получим систему уравнений для определения критической силы P:

$$\begin{cases} -\dfrac{A}{R^3} a_k k^4 - \dfrac{C}{R^3} k^2 a_k - \dfrac{C+A}{R^2} k^2 b_k + P(k^2 a_k - a_k) = 0, \\ \dfrac{A+C}{R} k^2 a_k + C k^2 b_k + A b_k = 0. \end{cases} \tag{16}$$

В данном случае критическое давление определяется формулой [2]

$$P_2 = \frac{k^2(k^2-1)AC}{R^3(k^2C + A)}. \tag{17}$$

В случае $k = 2$

$$P_2 = \frac{12AC}{R^3(4C + A)}. \tag{18}$$

Далее будем считать, что поперечное сечение кольца есть прямоугольник, одна сторона которого перпендикулярна плоскости кольца, ее длину обозначим через a, другая сторона параллельна этой плоскости, ее длину обозначим b. Тогда

$$B = \frac{ab^3}{12} E, \quad A = \frac{a^3 b}{12} E.$$

Жесткость на кручение можно найти в справочнике [4].

В качестве заключения заметим, что при малых b критическая сила определяется (15) и наблюдается плоская форма потери устойчивости, если же a мало, то наоборот, $P_2 < P_1$, имеем пространственную форму потери устойчивости кольца. Полученные формулы (15), (18) совпада-

ют с аналогичными формулами работы [2], полученными из геометрических соображений.

Список литературы

1. **Перельмутер А. В., Сливкер В. И.** Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. Т. 1. 686 с.

2. **Николаи Е. Л.** Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.

3. **Andryukova V., Tarasov V.** Nonsmooth problem of stability for elastic rings. Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. CNSA-2017. 22-27 may 2017, Part I. Saint-Petersburg. Publisher: BBM. Pp. 213–218.

4. **Биргер И. А** Прочность. Устойчивость. Колебания // Справочник : в 3 т. / под общ. ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1988. 831 с.

Summary

Andryukova V. Yu. Variational approach to calculating critical loads in the case of spatial deformation of curved rods

A detailed derivation of the formulas of elastic energy and work of external forces for rings loaded with central forces is given. xpressions for calculating the critical load are presented in the case of plane deformation of the ring, as well as in the case of the spatial form of buckling.
Keywords: curvilinear bar, critical load, stability, Euler equations, work of external forces, elastic energy.

References

1. Perel'muter A. V., Slivker V. I. *Ustoychivost' ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennyye problemy* [Stability of the structures equilibrium and related problems]. Vol. 2. Moscow, Izdatel'stvo SKAD SOFT, 2010. 672 p.

2. **Nikolai Ye. L.** *Trudy po mekhanike* [Writings on mechanics]. Moscow, Gostekhizdat, 1955. 584 p.

3. **Andryukova V., Tarasov V.** Nonsmooth problem of stability for elastic rings. *Abstracts of the International Conference "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics" Dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov.* CNSA-2017. 22-27 may 2017, Part I. Saint-Petersburg. Publisher: BBM. Pp. 213–218.

4. **Birger I. A.** *Prochnost'. Ustoychivost'. Kolebaniya* [Strength. Stability. Oscillations]. M.: Mashinostroenie, 1988. 831 p.

Для цитирования: Андрюкова В. Ю. Вариационный подход к вычислению критических нагрузок // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 41–49. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_41

For citation: Andryukova V. Yu. Variational approach to calculating critical loads in the case of spatial deformation of curved rods. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 4 (41), pp. 41–49. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_41

ФИЦ Коми НЦ УрО РАН
Физико-математический институт

Поступила 20.10.2021

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 004.057.5 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_50**

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ АБСТРАГИРОВАНИЯ ОТ ПЛАТФОРМОЗАВИСИМОГО КОДА ДЛЯ ПРИЛОЖЕНИЙ IOS И ANDROID НА ПРИМЕРЕ ДВИЖКА SADLION ENGINE

А. В. Ермоленко, В. А. Мельников

В работе рассматриваются существующие решения для кроссплатформенной мобильной разработки, сравниваются их особенности, достоинства и недостатка. Описано решение различных проблем, возникающих при разработке собственного кроссплатформенного движка для разработки под iOS и Android. Рассмотрено построение системы отображения визуального интерфейса на экране пользователя с использованием GPU. Описаны архитектурные решения, применяемые для написания выскопроизводительной логики поведения приложения на языке программирования C++. Рассматриваются жизненные циклы приложений для платформ iOS и Android и предлагается способ абстрагирования от нативного жизненного цикла, для обобщения кода приложения на обеих платформах. Описана реализация межязыкового взаимодействия между Java и C++ посредством JNI на платформе Android и Objective-C и C++, приведены архитектурные решения для построения слоя абстракции, скрывающего такие низкоуровневые взаимодействия в ядре движка.

Ключевые слова: кроссплатформенная разработка, C++, Android, iOS.

На сегодняшний день пользователи запускают приложения на множестве различных платформ, например Windows, Linux, OS X, iOS,

© Ермоленко А. В., Мельников В. А., 2021.

Android, приложение также может работать в веб-браузере и на специальных игровых устройствах, таких как Nintendo Switch, Xbox, Play Station. Для максимально возможного охвата рынка приложение должно работать на наибольшем количестве платформ, разработка при этом не должна усложняться наличием двух и более кодовых баз, которые необходимо одновременно развивать и поддерживать. В дальнейшем игровое направление рассматриваться не будет, и акцент будет сделан именно на разработке приложений.

Автор статьи является основателем и руководителем студии разработки мобильных приложений и игр SadLion Studio, основанной в сентябре 2018 г. (ИП Мельников В. А., ранее ООО «СыкГеймЛаб»), и данная статья является обобщением опыта, полученного при разработке как собственных приложений, так и приложений, выполненных на заказ.

Для разработки кроссплатформенных приложений широко используются готовые движки и фреймворки, например Apache Cordova с использованием языка JavaScript [1] или Xamarin C# [2]. Данные технологии позволяют практически полностью абстрагироваться от работы с нативным кодом и сконцентрироваться именно на разработке приложений, хотя Xamarin C# позволяет вести разработку с использованием библиотек, близких к нативным. Также однозначно в данном подходе стоит отметить, что при увеличении объёма кода скорость сборки JavaScript приложения фактически не изменится, так как он является интерпретируемым. C#, в отличие от JavaScript, является компилируемым языком, но код, написанный на нём, компилируется значительно быстрее кода на C++.

Описанный подход будет работать для простых приложений с небольшим количеством экранов, но при увеличении объёма кода приложения и усложнении его функциональности будут возникать проблемы, связанные с производительностью приложения, например низкая частота кадров анимаций. Подобные проблемы возникали при разработке проекта Big Coloring Book[1] (разработан SadLion Studio) при использовании Xamarin Forms. При отображении на экране списков изображений и блока текстовых тегов с возможностью прокрутки частота

[1]Приложение в магазине Google Play.
URL: https://play.google.com/store/apps/details?id=sadlion.games.bigcoloringbook (дата обращения: 01.12.2021).
Приложение в магазине App Store. URL: https://apps.apple.com/us/app/big-coloring-book/id1475630136 (дата обращения: 01.12.2021).

кадров опускалась ниже 30 кадров в секунду. В статье [3] описывался движок SadLion Engine (SLE), написанный полностью на C++ и использующий для разработки логики C++. Данный движок используется для разработки в SadLion Studio.

При разработке кроссплатформенного движка необходимо решить следующие задачи:

- взаимодействие с нативными функциями и поддержка различной основной архитектуры приложений;
- реализация рендеринга интерфейса и написание логики элементов, расположенных на экране.

Интересное решение поставленных задач приведено в фреймворках Flutter [4], Xamarin Forms [2] и React Native [5]. Так, взаимодействие с нативными функциями во Flutter происходит с помощью отправки сообщений и асинхронного вызова процедур, такой способ напоминает удалённый вызов процедур (RPC). Плюсом такого подхода является то, что Flutter обходит необходимость работы с Java Native Interface [6] (JNI, интерфейс для взаимодействия кода на языках, компилируемых в машинный код, с кодом на Java) в Java на платформе Android, с другой стороны, такое взаимодействие будет медленнее, чем прямой вызов функции, поскольку для реализации ввода-вывода потребуются переключения из контекста пользователя в контекст ядра ОС, например, Unix-сокетов, на основе которых можно такой подход реализовать [7; 8]. Xamarin C# для Android использует схему работы с JNI, а для iOS C# компилируется в машинный код архитектуры ARM и представляет собой обычную библиотеку. React Native использует механизм мостов (bridges) для вызова нативных функций, но запрос для вызова представляет собой JSON-объект. Сериализация и десериализация JSON — довольно трудоёмкий процесс по сравнению с остальными описанными методами.

Архитектуры приложений на iOS и Android отличаются довольно сильно, поэтому каждый фреймворк из описанных выше предоставляет собственную архитектуру приложения. Интерес в данном пункте представляет фреймворк Xamarin, при использовании Xamarin.Forms, используется структура приложения, общая для Android и IOS, за исключением нативных особенностей платформ. Также разработчики могут использовать Xamarin Native, который сильнее разделяет код, и основная разработка ведётся в среде, похожей на нативную [2].

Относительно рендеринга интерфейса особенный интерес представляет фреймворк Flutter. Рендеринг в нём выполняется полностью на GPU, и он не использует стандартные виджеты, но предоставляет собственную библиотеку, соответствующую требованиям стандартного дизайна [4]. Остальные фреймворки, используют нативные элементы интерфейса [2; 5].

Для написания логики поведения элементов каждый из фреймворков предоставляет свой язык программирования, Xamarin — C# [2], React Native — JavaScript [5], Flutter — Dart [4]. Dart компилируется в машинный код для обеих платформ, C# использует виртуальную машину MonoVM на Android и компилируется в машинный код на iOS, JavaScript исполняется в виртуальной машине во всех случаях.

Целью работы является демонстрация архитектурных решений и алгоритмических, применимых для разработки собственного кроссплатформенного фреймворка, использующего не виджеты, а компоненты, на основе которых можно строить виджеты для различных дизайнов, иногда отличающихся от классических для операционных систем, например от Material Design[2].

Дополнительно выдвигаются высокие требования к фреймворку в части отладки с использованием среды Android Studio и XCode, которые поддерживают отладчик LLDB, профилировщики памяти, нагрузки на процессор и энергопотребления. Языком для написания логики был выбран C++, поскольку дизайн языка и его библиотек позволяет писать большие и сложные программные продукты без деградации производительности.

1. Кроссплатформенный рендеринг и написание логики элементов, расположенных на экране

Большинство приложений имеет графический интерфейс. В случае нативных приложений используются компоненты интерфейсов, предоставляемые самой платформой. Данные компоненты соответствуют стилевым рекомендациям самих платформ, так, в случае Android используется стиль Material Design [9; 10], а для iOS — Cupertino [11].

Кроссплатформенный движок может надстраиваться над нативными компонентами интерфейса и инкапсулировать их, но в таком случае возникает сильная связь с особенностями платформы и контроль пове-

[2]Сайт посвящённый Material Design. URL: https://material.io/ (дата обращения: 01.12.2021).

дения приложения будет затрудняться. SLE не использует стандартные компоненты операционных систем, а предоставляет возможность рендеринга собственных виджетов на основе компонентной системы [12]. Обычно фреймворки предоставляют библиотеки готовых виджетов для разработки пользовательского интерфейса. В целях сохранения архитектурной гибкости, производительности и абстрагирования от определённого визуального стиля SLE предлагает использовать компонентную систему для конструирования виджетов самим разработчиком.

Также при разработке кроссплатформенного движка следует учитывать то, что на сегодняшний день различные операционные системы имеют различные API рендеринга, в случае Android — это OpenGL ES [13] и Vulkan [14], а в случае iOS — Metal [15]. Для абстрагирования от вопросов рендеринга и вычислений векторной графики движок SLE использует библиотеку Skia[3], применяемую в браузерном движке Chromium и кроссплатформенном фреймворке Flutter [4].

Важным отличием SLE от Flutter является то, что минимальной единицей интерфейса является компонент, а не виджет. Также Flutter использует язык Dart, а SLE использует C++, что даёт большую эффективность, так как с ростом приложения увеличивается объём кода и производительность начинает резко снижаться, а язык C++ позволяет избежать деградации производительности в долгосрочной перспективе, поскольку C++ является компилируемым языком и использует все возможности оптимизации кода во время компиляции в отличие от JIT-компилируемых и интерпретируемых языков. Покажем эффективность использования памяти Flutter и SLE на примере задач из проекта Big Coloring Book, большое количество визуальных данных требует чисел с плавающей точкой, но не требует слишком большой точности, поэтому для их хранения можно использовать тип float одинарной точности, которого нет в Dart. Уже на этом моменте SLE получает выигрыш в использовании памяти в два раза.

Также Dart имеет более сложную модель памяти и объектов, что не является Zero Cost Abstraction [16]. Компилятор и библиотеки C++ же стремятся изначально к максимальной оптимизации и реализации с учётом принципа «платим только за то, что используем».

SLE позиционируется как движок для написания высокопроизводительных приложений, поэтому для написание всей логики элементов приложения используется современный C++. Данный язык изначаль-

[3]Сайт библиотеки Skia. URL: https://skia.org/ (дата обращения: 01.12.2021).

но создавался для написания высокопроизводительного и безопасного кода при правильном его использовании [17].

С точки зрения SLE, любая логика, реализуемая пользователем, представима в виде компонента и может быть использована повторно. Например, прокручиваемые списки не содержат логики прокрутки, она вынесена в компонент Scroll, и этот же компонент может быть использован для прокрутки частей страницы с большими блоками элементов.

Для присоединения компонент используется абстрактный объект-контейнер, ничего о своих компонентах не знающий. Эти объекты соединяются в деревья. Одно дерево представляет собой одну форму пользовательского интерфейса. Рендеринг происходит от корня интерфейсов, а обработка событий интерфейса, например нажатие на экран, происходит от самого правого листа дерева (последний лист при поиске в глубину).

Так как абстрактные объекты ничего о своих компонентах не знают, они не могут вызывать их функции, для передачи событий в их обработчики компоненты реализуют абстрактные интерфейсы, и объект-контейнер уже может проверить, соответствует ли компонент из списка этому интерфейсу. Если компонент проходит проверку на соответствие, то обработка события передаётся в реализацию функции-обработчика в данном компоненте.

2. Инициализация движка и жизненный цикл приложения Android

Приложения на каждой платформе имеют свой собственный жизненный цикл[4], не похожий друг на друга. Жизненный цикл Android реализуется классами-наследниками Activity[5], различные экраны представляются с помощью различных Activity.

Использование движка предполагает абстрагирование от нативного цикла исполнения приложения, движок должен предоставлять свой жизненный цикл, общий для всех платформ, а за общим циклом уже скрывается нативный. Инициализацию движка и контроль его жизнен-

[4]Жизненный цикл процессов и приложений в Android. URL: https://developer.android.com/guide/components/activities/process-lifecycle (дата обращения: 01.12.2021).

[5]Жизненный цикл Activity в Android. URL: https://developer.android.com/guide/components/activities/activity-lifecycle (дата обращения: 01.12.2021).

ного цикла приходится интегрировать внутрь нативного жизненного цикла приложения.

Для начала рассмотрим, как происходит инициализация движка в Android с использованием языка программирования Java. Код в листинге 1 приведён в упрощённом варианте, опускающем излишние подробности, связанные с проектом Big Coloring Book.

Листинг 1. Фрагмент кода инициализации движка в Android

```
static {
  System.loadLibrary("native-lib");
}
@Override
protected void onCreate(Bundle savedInstanceState) {
  super.onCreate(savedInstanceState);
  this.requestWindowFeature(Window.FEATURE_NO_TITLE);
  getSupportActionBar().hide();
  ClearFiles();
  setContentView(R.layout.activity_main);
  AdView adView = (AdView)findViewById(R.id.adView);
  ...
  startSLEngine(keyboardManager, billingManager, path,
    nativeHelper, socialManager, admobManager,
    firebaseHelper);
  ...
}
```

Вне тела функции происходит загрузка динамической библиотеки с логикой приложения на C++. Основная инициализация движка происходит в функции onCreate [9; 10]. В начале функции идёт основной код, инициализирующий единственное Activity приложения. Далее создаются объекты классов, использующиеся для доступа к нативным функциям Android. Последней вызывается функция `startSLEngine`. Эта функция выполняет основную инициализацию классов движка, и реализована она в C++. Рассмотрим её объявление в Java в листинге 2.

Листинг 2. Объявление функции инициализации движка в Java

```
public native void startSLEngine(Object keyboardManager,
  Object billingManager, String appPath,  Object
     nativeHelper,
  Object playGamesPlugin, Object admobPlugin,
  Object firebaseHelperPlugin);
```

Отметим ключевое слово `native`, оно указывает на то, что эта функция реализована где-то в динамической библиотеке, в следующем разделе будет подробно рассмотрена, как эта функция определена и реализована в C++.

3. Межъязыковое взаимодействие в Java

Следующая проблема, которая возникает при разработке подобного движка — это межъязыковое взаимодействие. В случае с Android C++ и Java код не могут взаимодействовать напрямую никаким образом, так как Java код выполняется виртуальной машиной Java [18], а C++ код — операционной системой. Java библиотеки не являются динамическими библиотеками (*.so для Linux/Unix, *.dll для Windows), и их нельзя вызывать из C++. C++ код можно вызывать из Java кода только при правильном именовании функций, соответствующем документации Oracle по Java Native Interface (JNI). Вызов Java функций аналогично осуществляется с использованием JNI, но ещё более затруднён тем, что в C++ надо сохранять и освобождать глобальные ссылки вручную. Получение доступа к методам осуществляется через сложно читаемую сигнатуру, и в итоге довольно легко допустить утечки памяти, плюс такой код сам по себе довольно трудно отлаживается [7].

Рассмотрим определение функции `startSLEngine` в C++.

Листинг 3. Объявление функции инициализации движка в C++

```
extern "C" JNIEXPORT void JNICALL
Java_sadlion_games_bigcoloringbook_
                            MainActivity_startSLEngine(
    JNIEnv* env,
    jobject obj,
    jobject keyboardManager,
    jobject billingManager,
    jstring appPath,
    jobject nativeHelper,
    jobject playGamesPlugin,
    jobject admobPlugin,
    jobject firebaseHelperPlugin) {
    const char *pchars = env->GetStringUTFChars(appPath,
        NULL);
    string rootPath = pchars;
    env->ReleaseStringUTFChars(appPath, pchars);

    jclass activityClass = env->GetObjectClass(obj);
```

```
    jmethodID method = env->GetMethodID(
        activityClass,
        "getAssetManager",
        "()Ljava/lang/Object;");
    jobject assetManagerObj = env->CallObjectMethod(obj,
        method);
    AAssetManager *aassetManager =
       AAssetManager_fromJava(
        env,
        assetManagerObj);

    engine = new EngineContext(
        env, aassetManager,
        rootPath, keyboardManager,
        billingManager, nativeHelper);
    app = new BigColoringBookApp(engine);
    ...
    app->InitApp(rootPath);
}
```

Особый акцент следует сделать на именовании функции. К имени, объявленном на стороне Java, здесь добавлен префикс с именем пакета, в котором функция будет вызываться. Такое именование функций позволяет инкапсулировать C++ функции в определённых Java-классах. JNICALL разворачивается в ключевые слова, зависящие от операционной системы, помогающие выполнять обнаружение символа функции в файлах *.so/*.dll.

Вначале функции происходит получение объектов, нужных в Android для работы на стороне C++. Через JNI получается класс объекта, находится нужный метод объекта и затем он вызывается [6], таким образом, движок получает менеджер ресурсов операционной системы. Разработчик же использует уже абстракции движка, скрывающие реализацию взаимодействия с менеджером ресурсов. Далее происходит инициализация движка, плагинов и самого приложения. С помощью плагинов, можно расширять функционал движка по взаимодействию с различными сервисами, например сервис мобильной рекламы Admob.

Рассмотрим более подробно объявление, получение и вызов методов через JNI.

```
jmethodID jShowGooglePlay;
```

`jmethodID` является типом, который хранит в себе данные о необходимом методе, для создании переменной этого типа необходимо выполнить следующий код:

```
jShowGooglePlay = env->GetMethodID(
  jNativeHelperClass,
  "ShowGooglePlay",
  "(Ljava/lang/String;)V");
```

Рассмотрим эту строку более подробно. `jNativeHelperClass` указывает класс, в котором находится метод. Получить класс объекта и сохранить его в глобальной ссылке (это не позволит сборщику мусора удалить объект).

```
  jclass objClass = env->GetObjectClass(jnativeHelper);
  this->jNativeHelperClass =
    (jclass)env->NewGlobalRef((jobject)objClass);
```

`jnativeHelper` представляет объект, созданный в onCreate в Java.

Далее в JNI передаётся строка `"ShowGooglePlay"`. Она сообщает системе имя искомого метода.

Последняя строка `"(Ljava/lang/String;)V"` является сигнатурой искомого метода. Она имеет довольно сложный вид и состоит фактически из двух частей. Первая часть `(Ljava/lang/String;)` сообщает, какие аргументы принимает метод, вторая часть `V` — что возвращает искомый метод. Подробно с сигнатурами можно ознакомиться в документации по JNI [6].

Рассмотрим теперь вызов описанной функции:

Листинг 4. Вызов Java функции из C++

```
NativeHelper::ShowGooglePlay(string id)
{
#ifdef ANDROID_ENGINE
    JNIEnv *env;
    int rc = jvm->GetEnv((void **)&env, JNI_VERSION_1_6)
       ;
    bool attached = false;
    if (rc == JNI_EDETACHED) {
        throw "NativeHelper::ShowGooglePlay: thread is
           not attached";
    } else {
        attached = true;
    }
```

```
    if (attached) {
        jstring jid = env->NewStringUTF(id.data());
        env->CallVoidMethod(jnativeHelper,
           jShowGooglePlay, jid);
        env->DeleteLocalRef(jid);
    }
#endif
}
```

Сначала функция из JVM получает переменную среды и затем проверяет, что поток присоединён к виртуальной машине, если поток неприсоединён, то продолжать не имеет смысла. Далее переменная переводится из объекта C++ в Java-объект, после этого происходит вызов функции и стирается ссылка на использованный объект.

4. Инициализация движка и жизненный цикл приложения iOS

В случае iOS код жизненного цикла разделён между несколькими классами-наследниками: `UIView` для экранов, `UIViewController` для управления экранами, `UIApplicationDelegate` для логики и обработки событий [11]. Таким образом инициализация всего приложения разделена между несколькими классами, в которых она происходит. Рассмотрим примеры кода инициализации.

Листинг 5. Инициализация UIView

```
- (id)initWithFrame:(CGRect)frame {
    nfingers = 0;
    clickX = clickY = 0.0f;
    mayBeClick = mayBeSwipe = false;
    swipeDx = swipeDy = 0.0f;
    lastX = lastY = 0.0f;
    prevScale = 1.0f;
    touchChron = make_shared<Chronograph>();
    ...
    if ((self = [super initWithFrame:frame])) {
        self.textStore = [NSMutableString string];
        [self.textStore appendString:@""];
    }
    return self;
}
```

В данном случае приведена функция инициализации для класса-наследника `UIView`. В ней инициализируются связанные с экраном системы, например: обработка жестов, обработка виртуальной клавиатуры. Рассмотрим далее инициализацию класса наследника `UIViewController`.

Листинг 6. Инициализация UIViewController

```
- (void)viewDidLoad {
    [super viewDidLoad];
    _supportedInterfaceOrientations =
       UIInterfaceOrientationPortrait;
        mView = (MTKView*)[KeyInputView new];
    ...
    AppDelegate *appDelegate = (AppDelegate*)[[
       UIApplication sharedApplication] delegate];
        mView.enableSetNeedsDisplay = NO;
        mView.device = MTLCreateSystemDefaultDevice();

    [appDelegate initWithMTKView: mView];
        mView.delegate = (id<MTKViewDelegate>)
           appDelegate;
        mView.clearColor = MTLClearColorMake(0.0, 1.0,
           0.0, 1.0);
    ...
}
```

Данный код инициализирует системы, управляющие экранами, например ограничение расположения экранов с помощью «безопасной зоны», определяющей зону устройства, где только экран и нет никаких других элементов вроде «челок». Также в данной функции создаётся основной экран приложения с поддержкой системы рендеринга Metal [15]. Последняя часть инициализации расположена в классе-наследнике `UIApplicationDelegate`. Далее приведён последний фрагмент инициализации.

Листинг 7. Инициализация UIApplicationDelegate

```
- (BOOL)application:(UIApplication *)application
    didFinishLaunchingWithOptions:(NSDictionary *)
       launchOptions {
    productIds = [NSMutableArray new];
    products = [NSMutableDictionary<NSString*, SKProduct
       *> new];
```

```
        [[SKPaymentQueue defaultQueue]
           addTransactionObserver: self];

    _currentCredential = nil;

    [UNUserNotificationCenter currentNotificationCenter
       ].delegate = self;
    UNAuthorizationOptions authOptions =
       UNAuthorizationOptionAlert |
       UNAuthorizationOptionSound |
       UNAuthorizationOptionAlert;
        [[UNUserNotificationCenter
           currentNotificationCenter]
           requestAuthorizationWithOptions:authOptions
           completionHandler:^(BOOL granted, NSError *
           _Nullable error) {
            if (error) {
                NSLog(@"Fail to register for push");
            }
        }];

    [application registerForRemoteNotifications];
    return YES;
}
```

В данной функции происходит инициализация систем, связанных с уведомлениями и обработкой нативных событий, например совершение платежей в магазине приложения или обработка пуш-уведомлений.

5. Межъязыковое взаимодействие в Objective-C

В случае с iOS проблема межязыкового взаимодействия ощущается не так сильно, если использовать Objective-C++ для разработки нативной части так, как классы и функции C++ можно использовать сразу в коде на Objective-C++, так и, наоборот, создавая своеобразный микс из кода [11]. Следующий отрывок наглядно показывает, как выглядит взаимодействие двух указанных языков.

Листинг 8. Межъязыковое взаимодействие в Objective-C

```
[cropController
    dismissViewControllerAnimated:TRUE completion:^{
        NSData* pngData = UIImagePNGRepresentation(image
           );
```

```
        auto nativeHelper = app->GetEngineContext()->
           GetNativeHelper();
        nativeHelper->
           DoPickupImageFromGalleryAndCropCallback(
            (unsigned char*)pngData.bytes,
            pngData.length);
    }];
```

6. Платформозависимый код

Последняя трудность, связанная с написанием кода при разработке движка, — написание платформозависимого кода. Абстракция нативного кода, с которой работает пользователь, одновременно содержит в себе код для всех платформ, разделённый условной компиляцией, он может выглядеть немного пугающе, и исходные файлы становятся значительно больше. Пример кроссплатформенного кода можно увидеть ниже.

Листинг 9. Платформозависимый код

```
int
NativeHelper::GetTimezone()
{
#ifdef ANDROID_ENGINE
    JNIEnv *env;
    int rc = jvm->GetEnv((void **) &env, JNI_VERSION_1_6
       );
    if (rc == JNI_EDETACHED) {
        throw "NativeHelper::GetTimezone: thread is not
           attached";
    }
    return env->CallIntMethod(jnativeHelper,
       jGetTimezone);
#elif IOS_ENGINE
    return (int)[[NSTimeZone localTimeZone]
       secondsFromGMT];
#else
    throw "not implemented";
    return -100;
#endif
}
```

7. Заключение

В результате работы SLE получил поддержку двух платформ: Android и iOS. Опыт работы с прочими кроссплатформенными фреймворками показал, что высокоуровневые фреймворки хороши при прототипировании приложения, но в долгосрочной перспективе использование SLE решает ряд проблем:

1. Архитектурное устройство на основе компонентной системы позволяет создавать приложение с дизайном любой сложности и не зависеть от компонентов операционной системы или компонентов, предоставляемых кроссплатформенным фреймворком.

2. Абстрагирование логики приложения от платформенных особенностей позволяет разрабатывать приложения сразу для нескольких платформ, имея при этом только одну кодовую базу.

3. Использование C++ позволяет быстро расширять взаимодействие с нативным функционалом платформы, сохраняя при этом производительность приложения.

4. Опыт разработки SLE показал, что для достижения высокого качества и частоты кадров как на современных, так и устаревших устройствах для отрисовки интерфейсов необходимо использовать GPU, а для работы с векторной графикой — библиотеку Skia.

5. Использование стандартных средств разработки: Android Studio и XCode, значительно облегчает отладку взаимодействия нативного кода и SLE.

Список литературы

1. Bosnic S., Papp I. The development of hybrid mobile applications with Apache Cordova // *24th Telecommunications Forum.* 2016. Pp. 1–4.

2. Tomozei C. Assessment of the evolution in quality for Xamarin Android Multimedia Applications // *19th International Conference on Informatics in Economy. Education, Research and Business Technologies.* 2020. Pp. 47–52.

3. Мельников В. А. Процесс разработки движка для 2D игр и интерфейсов Sad Lion Engine // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 21–37.

4. Fisz K., Kopniak P., Galan D. A multi-criteria comparison of mobile applications built with the use of Android and Flutter Software Development Kits // *Journal of Computer Sciences Institute.* Vol. 19. 2021. Pp. 107−113.

5. Dabit N. React Native in action. Shelter Island: Manning Publishing. 2019. 320 p.

6. Java Native Interface Specification [Online] //textitOracle. Available: https://docs.oracle.com/javase/7/docs/technotes/guides/jni/spec/jniTOC.html (Accessed: 22.10.2020).

7. Rago S., Stevens W. Advanced programming in the UNIX environment, 3rd ed. Edition. Upper Saddle River, NJ, Boston, Indianopolis, San Francisco, New York, Toronto, Montreal, London, Munich, Paris, madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico City: Addison-Wesley, 2013. 1032 p.

8. Corbet J., Kroah-Hartman G., McKellar J., Rubini A. Linux device drivers, 4th ed. Beijing, Cambridge, Farnham, K?ln, Sebastopol, Taipei, Tokyo, 2017. 600 p.

9. Thornsby J. Android UI design. Birmingham: Packt Publishing, 2016. 356 p.

10. Anugerah M. A., Sekar G. S. Designing Android User Interface for University Mobile Library // *International Conference on Computing, Engineering, and Design (ICCED).* 2021. Pp. 224−229.

11. Neuburg M. Programming iOS 13: Dive Deep into Views, View Controllers, and Frameworks. Sebastopol: O'Reilly. New York: Oracle, 2020. 1208 p.

12. Nystrom R. Game programming patterns, San Bernardino: Genever Benning, 2018. 345 p.

13. Ginsburg D., Purnomo B. OpenGL ES 3.0 Programming Guide 2nd Edition. Upper Saddle River, NJ, Boston, Indianopolis, San Francisco, New York, Toronto, Montreal, London, Munich, Paris, madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico City: Addison-Wesley, 2014. 560 p.

14. Sellers G. Vulkan Programming Guide. The Official Guide to Learning. Vulkan, Boston, Columbus, Indianapolis, New York, San Francisco, Amsterdam, Cape Town Dubai, London, Madrid, Milan, Munich, Paris, Montreal, Toronto, Delhi, Mexico City San Paulo, Sydney, Hong Kong, Seoul, Singapore, Taipei, Tokyo: Addison-Wesley, 2017. 480 p.

15. Clayton J. Metal programming guide. Addison-Wesley, 2018. 352 p.

16. Stroustrup B. The C++ programming languege 4th edition. Uppder Saddle River, Boston, Indianopolis, San Francisco, New York, Toronto, Montral, London, Munich, Paris, Madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico city: Addison-Wesley, 2013. 1345 p.

17. Stroustrup B. Programming: Principles and Practice using C++. 2nd Edition. New Jearsey: Pearson Education, 2015. 1312 p.

18. Shieldt H. Java: The Complete Reference, Eleventh Edition 11th Edition. 2019. 1248 p.

Summary

Yermolenko A. V., Melnikov V. A. Solving the problem of abstraction from platform-specific code for iOS and Android applications using the example of SadLion Engine

The paper examines existing solutions for cross-platform mobile development, compares their features, advantages and disadvantages. It describes the solution to various problems arising in the development of your own cross-platform engine for development for iOS and Android. The construction of a system for displaying a visual interface on a user screen using a GPU is considered. The architectural solutions used to write high-performance logic of application behavior in the C ++ programming language are described. The life cycles of applications for the iOS and Android platforms are considered and a way to abstract from the native life cycle is proposed to generalize the application code on both platforms.

The implementation of interlanguage interaction between Java and C ++ using JNI on the Android platform and Objective-C and C ++ is described, architectural solutions are given for building an abstraction layer that hides such low-level interactions in the engine core.

Keywords: cross-platform development, C ++, Android, iOS.

References

1. Bosnic S., Papp I. The development of hybrid mobile applications with Apache Cordova. *24th Telecommunications Forum.* 2016. Pp. 1–4.

2. Tomozei C. Assessment of the evolution in quality for Xamarin Android Multimedia Applications. *19th International Conference on Informatics in Economy. Education, Research and Business Technologies.* 2020. Pp. 47–52.

3. Melnikov V. A. Development Process of game engine core for 2D games and interfaces Sad Lion Engine. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33). Pp. 21–37.

4. Fisz K., Kopniak P., Galan D. A multi-criteria comparison of mobile applications built with the use of Android and Flutter Software Development Kits. *Journal of Computer Sciences Institute.* Vol. 19. 2021. Pp. 107–113.

5. Dabit N. *React Native in action.* Shelter Island: Manning Publishing. 2019. 320 p.

6. Java Native Interface Specification [Online]. *Oracle.* Available: https://docs.oracle.com/javase/7/docs/technotes/guides/jni/spec/jniTOC.html (Accessed: 22.10.2020).

7. Rago S., Stevens W. *Advanced programming in the UNIX environment, 3rd ed.* Upper Saddle River, NJ, Boston, Indianopolis, San Francisco, New York, Toronto, Montreal, London, Munich, Paris, madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico City: Addison-Wesley, 2013. 1032 p.

8. Corbet J., Kroah-Hartman G., McKellar J., Rubini A. *Linux device drivers, 4th ed.* Beijing, Cambridge, Farnham, Koln, Sebastopol, Taipei, Tokyo. 2017. 600 p.

9. Thornsby J. *Android UI design.* Birmingham: Packt Publishing. 2016. 356 p.

10. Anugerah M. A., Sekar G. S. Designing Android User Interface for University Mobile Library. *International Conference on Computing, Engineering, and Design (ICCED).* 2021. Pp. 224−229.

11. Neuburg M. *Programming iOS 13: Dive Deep into Views, View Controllers, and Frameworks.* Sebastopol: O'Reilly. 2020. 1208 p. New York: Oracle.

12. Nystrom R. *Game programming patterns.* San Bernardino: Genever Benning, 2018. 345 p.

13. Ginsburg D., Purnomo B. *OpenGL ES 3.0 Programming Guide 2nd Edition.* Upper Saddle River, NJ, Boston, Indianopolis, San Francisco, New York, Toronto, Montreal, London, Munich, Paris, madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico City: Addison-Wesley, 2014. 560 p.

14. Sellers G. *Vulkan Programming Guide. The Official Guide to Learning Vulkan.* Boston, Columbus, Indianapolis, New York, San Francisco, Amsterdam, Cape Town Dubai, London, Madrid, Milan, Munich, Paris, Montreal, Toronto, Delhi, Mexico City San Paulo, Sydney, Hong Kong, Seoul, Singapore, Taipei, Tokyo: Addison-Wesley, 2017. 480 p.

15. Clayton J. *Metal programming guide.* Addison-Wesley. 2018. 352 p.

16. Stroustrup B. *The C++ programming languege 4th edition.* Uppder Saddle River, Boston, Indianopolis, San Francisco, New York, Toronto, Montral, London, Munich, Paris, Madrid, Capetown, Sydney, Tokyo, Singapore, Mexico city: Addison-Wesley. 2013. 1345 p.

17. Stroustrup B. *Programming: Principles and Practice using C++. 2nd Edition.* New Jearsey: Pearson Education. 2015. 1312 p.

18. Shieldt H. *Java: The Complete Reference, Eleventh Edition 11th Edition.* 2019. 1248 p.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Мельников В. А. Решение проблемы абстрагирования от платформозависимого кода // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 50–69. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_50

For citation: Yermolenko A. V., Melnikov V. A. Solving the problem of abstraction from platform-specific code for iOS and Android applications using the example of SadLion Engine. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 4 (41), pp. 50–69. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_50

Сыктывкарский государственный
университет им. Питирима Сорокина

Поступила 29.11.2021

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 372.851 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_70**

АНАЛОГИЯ КАК ОСНОВА ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С. Н. Дорофеев, Е. Н. Есетов, Н. В. Наземнова

В данной статье изучаются способы и методы, способствующие повышению качества обучения школьников основам векторной алгебры и приемам их применения к решению геометрических задач. С этой целью выделены и систематизированы необходимые знания основ векторной алгебры, которые учащиеся должны усвоить в процессе изучения темы «Основы векторной алгебры». В работе обоснован тот факт, что в эффективности процесса обучения старшеклассников применению основ векторной алгебры к решению геометрических задач важную роль играет такой метод познания, как аналогия. Приведены циклы взаимосвязанных задач, которые способствуют повышению качества обучения школьников применению векторного метода.

Ключевые слова: векторный метод, обучение решению геометрических задач, аналогия.

Введение

В современной методологии познания окружающего мира ученые активно используют такие методы, как анализ и синтез, конкретизация и обобщение, аналогия, индукция и дедукция, наблюдение и сравнение, математические методы статистической обработки данных. Как видим, аналогия выступает одним из важных методов познания мира. Суть этого метода состоит в том, что из истинного заключения А, сделанного на основе вполне обоснованных фактов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, исследователь

© Дорофеев С. Н., Есетов Е. Н., Наземнова Н. В., 2021.

может сделать возможно истинное заключение $\widetilde{A}$ из вполне обоснованных фактов, перенесенных в схожую ситуацию [1; 2]. Аналогию не следует путать с индукцией. Индукция — это метод доказательства того или иного утверждения. Заключение, сделанное по индукции и доказанное методом индукции, всегда истинно. Здесь важно заметить, что некоторые утверждения, сделанные по аналогии и обоснованные методом индукции, тоже обретают статус истинного положения. Учащихся необходимо учить различать, в каком случае мы получаем утверждение по аналогии, а в каком по индукции. В данной статье мы раскрываем некоторые способы обучения школьников аналогии как методу решения геометрических задач с помощью векторов.

Обзор литературы

Обучающиеся современной общеобразовательной школы с основами векторного метода знакомятся впервые в курсе геометрии VIII класса [3] или IX класса [4]. Их знания о векторах в основной школе ограничиваются определениями таких понятий, как вектор, который в школьном учебнике Л. С. Атанасяна и др. определяется через направленный отрезок, вводится понятие длины и направления вектора [3; 5]. На основе этих понятий определяются равные и коллинеарные векторы, сонаправленные и противоположно направленные векторы, вводится понятие угла между векторами, устанавливается, что угол между векторами может принимать значения от 0° до 180°. При определении угла между векторами важно обратить внимание школьников на тот факт, что угол между сонаправленными векторами равен 0°, а угол между противоположно направленными векторами — 180°. Курс геометрии в основной школе удовлетворяет всем потребностям физики, которая к этому времени активно использует как само понятие вектора, так и сумму векторов, произведение вектора на число[2; 6; 7]. Методическая особенность определения вектора заключается в его интерпретациях как скорости или силы. Опираясь на такие понятия, как длина вектора и угол между векторами, вводится понятие скалярного произведения двух векторов, которое играет важную роль не только для геометрии как метод решения задач на вычисление угла между прямыми, расстояния между плоскими геометрическими фигурами, но и как метод исследования математических моделей, описывающих реальные состояния физических процессов. Прежде всего следует учитывать, что посредством скалярного произведения векторов описывается работа, связанная с перемещением материальной точки под действием заданной силы и в заданном

направлении. Этот факт позволяет нам материализовать само понятие скалярного произведения [2; 8]. Это не есть чисто теоретическое воображение, а некоторый математический объект, позволяющий нам посредством его изучать окружающий материальный мир.

В X классе при переходе от планиметрии к стереометрии положение векторного метода в геометрии существенным образом меняется. При соблюдении полной преемственности с курсом геометрии основной школы учащиеся повторяют знакомый им материал о векторах из курса VII–IX классов, но уже применительно к векторам в пространстве [3]. Затем они приступают к изучению новых фундаментальных (с точки зрения теории и ее применения) положений о векторах, связанных главным образом с вопросами, стоящими перед курсом стереометрии. Предполагается, что материал о векторах изученный в VII–IX классах, полностью усвоен учащимися. В связи с этим в X–XI классах, приступая к изучению вопросов векторной алгебры, повторение ряда основных понятий и определений следует провести в ускоренном режиме.

Курс геометрии X–XI классов предусматривает изучение следующих важных вопросов, касающихся векторов: 1) коллинеарные и компланарные векторы; 2) разложение вектора по трем некомпланарным векторам в пространстве; 3) скалярное умножение векторов в пространстве; вычисление длины вектора и угла между векторами; 4) координатный метод в пространстве, задание векторов координатами. Новые сведения о векторах не только расширяют знания учащихся о векторном методе познания окружающего мира (что само по себе имеет важное значение), но эффективно привлекаются и при построении самого курса стереометрии, доказательстве многих теорем и решении различных планиметрических и стереометрических задач.

Вполне естественно вначале показать в процессе обучения школьников решению планиметрических задач эффективное применение векторов. Затем наряду с решением планиметрических задач необходимо иллюстрировать обучающимся применимость векторов к решению как простых, так и более сложных стереометрических задач. Эффективнее при этом использовать именно те пространственные задачи, которые строятся по аналогии с планиметрическими. Здесь важно учитывать, что пространственным аналогом правильного треугольника служит правильный тетраэдр, пространственным аналогом квадрата — куб, пространственным аналогом параллелограмма — параллелепипед и т. д. Поэтому вопрос о формировании умений и навыков решения

задач с помощью векторов связан с разработкой методики обучения школьников решению планиметрических задач. Если в этой области достигнут успех, то трудности, вызванные переходом к задачам стереометрическим, легко преодолимы, они носят преимущественно технический характер.

Приступая в X–XI классах к обучению школьников решению геометрических задач с применением векторов, необходимо в первую очередь сосредоточить их внимание на рассмотрении различных возможных подходов к решению именно планиметрических задач [3; 5]. При этом мы не будем стремиться вводить новые термины и понятия, не предусмотренные программой, такие, например, как линейная зависимость и независимость векторов, линейная комбинация векторов, ортонормированный базис, проекция вектора на ось и другие. Конечно, если бы программой было предусмотрено изучение этих исключительно важных для векторного метода понятий, то многие формулировки, обоснования и приемы решения задач могли бы быть более компактными и лаконичными.

Обсуждения

Прежде чем обсудить вопрос о векторном решении конкретных планиметрических или стереометрических задач, необходимо в сознании обучающихся четко упорядочить весь арсенал сведений, которыми они располагают в VIII–XI классах. Для этого все основные понятия и факты векторной алгебры мы структурируем в определенной последовательности, на них будем опираться и посредством их мы будем комментировать решения анализируемых задач. Первые шестнадцать пунктов охватывают материал, изучаемый школьниками в основной школе; последующие шесть включают сведения, изучаемые школьниками в IX–XI классах.

1. *Определение вектора, длина и направление (ненулевого) вектора, задание вектора упорядоченной парой точек или направленным отрезком.*

2. *Нулевой вектор* $\overrightarrow{0}$*, противоположные векторы, сонаправленные и противоположно направленные векторы. Коллинеарность векторов.*

3. *Откладывание вектора от данной точки.*

4. *Сумма двух векторов.*

5. *Правило треугольника.*

6. *Коммутативность сложения векторов.* Какими бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, выполняется равенство

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

7. *Ассоциативность сложения векторов.* Какими бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, выполняется равенство

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}).$$

Методически важно обратить внимание школьников на то значимое обстоятельство, что благодаря закону ассоциативности и коммутативности сложения векторов мы имеем право в зависимости от конкретной ситуации складывать векторы в произвольном порядке независимо от их расположения [9;10].

8. *Закон поглощения нулевого вектора.*

9. *Разность двух векторов.*

10. *Сумма трех и более векторов.*

11. *Длина суммы и длина разности двух векторов.*

12. *Умножение вектора на число.*

13. *Ассоциативность умножения вектора на число.* Какими бы ни были числа k и l и каким бы ни был вектор $\overrightarrow{a}$, выполняется равенство

$$k(l\overrightarrow{a}) = (kl)\overrightarrow{a}.$$

14. *Дистрибутивность относительно сложения чисел.* Какими бы ни были числа k и l и каким бы ни был вектор $\overrightarrow{a}$, имеет место равенство

$$(k + l)\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{a}.$$

15. *Дистрибутивность относительно сложения векторов.* Какими бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и каким бы ни было число k, выполняется равенство

$$k(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}.$$

16. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам на плоскости. Если $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — неколлинеарные векторы, а $\overrightarrow{c}$ — произвольный третий вектор, то найдутся такие числа k и l, что выполняется равенство
$$\overrightarrow{c} = k\overrightarrow{a} + l\overrightarrow{b}.$$

17. *Скалярное произведение двух векторов.*

18. *Коммутативность скалярного умножения.*

19. *Сочетательность скалярного умножения.*

20. *Дистрибутивность скалярного умножения.*

21. *Скалярный квадрат суммы трех векторов.* Каковы бы ни были векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, выполняется равенство
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}.$$

Рассмотрим теперь примеры некоторых задач, допускающих оптимальное решение посредством векторного метода, используя при этом только операции сложения векторов и умножения вектора на число. Заметим, что четкого разграничения между задачей на доказательство и теоремой указать невозможно. В некоторых учебных пособиях теорема может быть сформулирована как задача на доказательство, в то время как встречаемая в других учебных пособиях задача на доказательство может быть сформулирована как теорема. Поэтому первые приложения векторов проиллюстрируем на доказательстве трех известных теорем.

1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

Решение. В трапеции $ABCD$ проведем среднюю линию, соединяющую середину M боковой стороны AD с серединой N боковой стороны CB. Согласно правилу многоугольника имеем:
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN},$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

Сложив почленно эти два равенства и учитывая, что $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{0}$, получим $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. Но векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$

сонаправлены, поэтому и вектор $\overrightarrow{MN}$ сонаправлен с ними. Это значит, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.

Далее, из сонаправленности всех трех векторов следует, что

$$2|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|,$$

откуда

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Этим доказано, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований. Ценность этой задачи заключается в том, что векторный способ ее решения позволяет сделать предположение о том, что вектор, соединяющий середины боковых сторон, равен полусумме векторов, определяемых боковыми сторонами. Этот факт в совокупности с тем, что средняя линия равна полусумме ее оснований, позволяет учащимся с незначительной помощью учителя заключить, что точка пересечения отрезка, соединяющего боковые стороны трапеции, и ее средней линии задает центр тяжести трапеции [11].

Наши наблюдения за процессом усвоения учащимися векторного метода решения геометрических задач, а именно задачи 1, свидетельствуют о том, что у учащихся формируется достаточно устойчивое представление о возможности постановки более общей задачи, которую можно сформулировать как на плоскости, так и в пространстве:

2. В четырехугольнике $ABCD$ отмечены середины M и N сторон AB и CD. Доказать, что $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Методическая значимость подобных заданий заключается в том, что посредством аналогичных рассуждений школьники, как правило, легко заключают, что и вектор, определяемый серединами двух других противоположных сторон этого четырехугольника, тоже равен полусумме векторов, определяемых этими сторонами. Значит, точка пересечения этих отрезков служит центром равновесия четырехугольника. Поскольку четырехугольник ABCD, как уже было отмечено выше, может быть пространственным, значит, все полученные выше факты по аналогии могут быть перенесены и на пространственный четырехугольник, но, как известно, пространственный четырехугольник задает тетраэдр, следовательно, данная задача позволяет учащимся X−XI классов сделать вывод о том, что центр тяжести тетраэдра находится в точке пересе-

чения отрезков, соединяющих его противоположные ребра. В этом направлении методически значимой будет следующая задача:

3. Доказать что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

В процессе поиска решения этой задачи учащихся можно нацелить на тот факт, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке, например M. Тогда многие из них самостоятельно или с незначительной помощью учителя составят равенства:

$$2\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MA},$$

$$2\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = l\overrightarrow{MB}.$$

Однако следующий этап решения задачи требует от учителя проявления некоторой методической смекалки. Как учащихся сориентировать на то, что следует произвести вычитание из первого равенства второе? Поскольку посредством вычитания получается значимое для решения данной задачи равенство

$$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MA} - l\overrightarrow{MB}.$$

Далее учителю необходимо сосредоточить внимание обучающихся на том факте, что разложение вектора по двум неколлинеарным векторам единственно. А это значит, что, воспользовавшись единственностью разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, легко можно найти значения коэффициентов $k = -1, -l = 1$. Следовательно, $\overrightarrow{MA_1} = -\overrightarrow{MA}$, $\quad 2\overrightarrow{MB_1} = -\overrightarrow{MB}$, откуда учащиеся получают, что

$$2|\overrightarrow{MA_1}| = |\overrightarrow{MA}|, \qquad 2|\overrightarrow{MB_1}| = |\overrightarrow{MB}|,$$

или

$$|MA| : |MA_1| = |MB| : |MB_1| = 2 : 1.$$

Далее учащимся необходимо напомнить, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, или $\overrightarrow{MC} = -(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$. Но $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC_1}$, где C_1 — середина стороны $\overrightarrow{AB}$, поэтому $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MC_1}$. Откуда следует, что $|MC| : |MC_1| = 2 : 1$ и точки C, M и C_1 принадлежат одной прямой. Это значит, что медиана CC_1 проходит через точку M. Важно обратить внимание учащихся на то, что если медиана CC_1 проходит через точку , то и другие медианы тоже проходят через эту точку и делятся

ею в отношении 2:1. Особая ценность этой задачи заключается в том, что точка пересечения медиан треугольника совпадает с его центром тяжести.

Обращаем внимание школьников на то, что все векторы, которые рассматривались в этой задаче, были отложены от точки M. Это значительно облегчило решение задачи, так как векторные равенства получаются предельно простыми.

Стереометрическим аналогом данной задачи служит задача следующего содержания:

Доказать, что медианы тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.

Используя аналогичные рассуждения, учащиеся, проводя более сложные вычислительные преобразования под строгим контролем учителя над каждым этапом решения задачи, обычно приходят к заключению, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1. Важно обратить внимание школьников на возможность формулирования по аналогии вывода о том, что точка пересечения медиан тетраэдра совпадает с его центром тяжести. Таким образом, учащиеся самостоятельно или с незначительной помощью учителя могут сделать заключение о том, что центр тяжести тетраэдра совпадает с точкой пересечения его средних линий, которая, в свою очередь, совпадает с точкой пересечения медиан тетраэдра. Это значит, что на основе аналогии мы получили два подхода к применению векторного метода к решению задач, связанных с нахождением центра тяжести тетраэдра. Этот факт определяет методическую ценность системы, состоящей из задач 3 и 4.

Следует отметить, что задача 3 служит основой для построения ее стереометрического аналога:

Доказать, что для любых четырех точек ABC пространства выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = 1/3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC})$, где — центр тяжести треугольника ABC.

Заключение

Таким образом, обучение старшеклассников основам векторной алгебры будет эффективным, если в процессе их усвоения мы будем чаще обращаться к векторным способам решения задач планиметрического и стереометрического содержания, взаимосвязанных между собой аналогией. Формирование у школьников умения устанавливать аналогию между схожими объектами в различных проблемных ситуациях способ-

ствует развитию у них как логического, так и аналитического мышления, повышению уровня восприятия абстрактного материала. Значимость этого подхода заключается еще и в том, что он обусловливает формирование в сознании обучающихся необходимости использования методов научного познания в изучении окружающего мира математическими методами и средствами.

Список литературы

1. **Болтянский В. Г.** Аналогия-общность аксиоматики // *Советская педагогика.* 1975. № 1. С. 83–93.

2. **Дорофеев С. Н.** Теория и практика формирования творческой активности будущих учителей математики в педагогическом вузе : дис. ... д-ра пед. наук. Пенза, 2000. 410 с.

3. **Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.** Геометрия. 7–9 классы. М.: Просвещение, 2020. 384 с.

4. **Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.** Геометрия. 9 класс. М.: Просвещение, 2015. 175 с.

5. **Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.** Геометрия. 7–9 классы М.: Просвещение, 2020. 255 с.

6. **Дорофеев С. Н., Журавлева О. Н., Рыбина Т. М., Сарванова Ж. А.** Формирование исследовательских компетенций учащихся на уроке математики // *Современные наукоемкие технологии.* 2018. № 10. С. 181–185.

7. **Утеева Р. А.** Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе : дис. ... д-ра пед. наук. М., 1998. 363 с.

8. **Кудрявцев Л. Д.** Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1977. 123 с.

9. **Дорофеев С. Н.** УДЕ как метод подготовки будущих бакалавров педагогического образования к профессиональной деятельности // *Гуманитарные науки и образование* / МордГПИ им. М. Е. Евсевьева. 2013. № 1. С. 14–17.

10. **Саранцев Г. И.** Как сделать обучение математике интересным. М.: Просвещение, 2011. 160 с.

11. **Dorofeev S., Pavlov I., Shichiyakh R., Prikhodko A.** Differentiated Training as a Form of Organization of Education and Cognitive Activity of Future Masters of Pedagogical Education // *Applied Lingvistics Research Jounal*, 2021, 5(3), Pp. 216–222.

Summary

Dorofeev S. N., Esetov E. N., Nazemnova N. V. Analogy as the basis for teaching students the vector method of geometric problem solving

This article examines the ways and the methods that contribute to improving the quality of teaching students the basics of vector algebra and methods of their application to solving geometric problems. For this purpose, the necessary knowledge of the basics of vector algebra, which students should learn in the process of studying the topic "Fundamentals of vector algebra", is highlighted and systematized.

The paper substantiates the fact that such a method of cognition as analogy plays an important role in the effectiveness of the process of teaching high school students to apply the basics of vector algebra to solving geometric problems. Some examples of interrelated tasks that contribute to improving the quality of teaching students the use of the vector method are given.

Keywords: Vector method, training in solving geometric problems, analogy.

References

1. **Boltyanskij V. G.** Analogy — commonality of axiomatics. *Sovetskaya pedagogika* [Soviet pedagogy], 1975. No. 1. Pp. 83–93.

2. **Dorofeev S. N.** *Teoriya i praktika formirovaniya tvorcheskoj aktivnosti budushhix uchitelej matematiki v pedagogicheskom vuze, dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora pedagogicheskix nauk* [The theory and practice of forming the creative activity of future teachers of mathematics in a pedagogical university], Penza, 2000. 410 p.

3. **Atanasyan L. S., Butuzov V. F., Kadomcev S. B. et al.** *Geometriya. 7–9 klassy* [Geometry. 7-9th grade]. M.: Prosveshhenie, 2020. 384 p.

4. **Aleksandrov A. D., Verner A. L., Ry'zhik V. I.** *Geometriya. 9 klass* [Geometry. 9th grade]. M.: Prosveshhenie, 2015. 175 p.

5. **Atanasyan L. S., Butuzov V. F., Kadomcev S. B. et al.** *Geometriya. 7–9 klassy* [Geometry. 7-9th grade]. M.: Prosveshhenie, 2020. 255 p.

6. **Dorofeev S. N., Zhuravleva O. N., Ry'bina T. M., Sarvanova Zh. A.** Formation of research competencies of students in the mathematics classroom. *Sovremenny'e naukoemkie texnologii* [Modern knowledge-intensive technologies]. 2018. No. 10. Pp. 181–185.

7. **Uteeva R. A.** *Teoreticheskie osnovy' organizacii uchebnoj deyatel'nosti uchashhixsya pri differencirovannom obuchenii matematike v srednej shkole. Dissertaciya doktora ped. nauk* [Theoretical foundations of the organization of students' learning activities in differentiated learning of mathematics in high school]. Moscow, 1998. 363 p.

8. **Kudryavcev L. D.** Mysli o sovremennoj matematike i ee izuchenii [Thoughts on Modern Mathematics and its Study]. M.: Nauka, 1977. 123 p.

9. **Dorofeev S. N.** UDE as a method of preparing future bachelors of teacher education for professional activities. *Gumanitarny'e nauki i obrazovanie.* MordGPI im. M. E. Evsev'eva [Humanities and Education / M. E. Evsevyev Mordovian State Pedagogical University]. No. 1, 2013. Pp. 14–17.

10. **Sarancev G. I.** *Kak sdelat' obuchenie matematike interesny'm* [How to make learning math interesting]. M.: Prosveshhenie. 2011. 160 p.

11. **Dorofeev S., Pavlov I., Shichiyakh R., Prikhodko A.** Differentiated Training as a Form of Organization of Education and Cognitive Activity of Future Masters of Pedagogical Education. *Applied Lingvistics Research Jounal*, 2021, 5(3), Pp. 216–222.

Для цитирования: Дорофеев С. Н., Есетов Е. Н., Наземнова Н. В. Аналогия как основа обучения школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 70–82. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_70

For citation: Dorofeev S. N., Esetov E. N., Nazemnova N. V. Analogy as the basis for teaching students the vector method of geometric problem solving. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, No. 4 (41), pp. 70–82. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_70

Тольяттинский государственный университет, Тольятти,
Пензенский государственный университет, Пенза

Поступила 11.08.2021

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 539.3 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_83**

Об одной контактной задаче для двух пластин

Ермоленко А. В., Беляев Е. А., Туркова О. И.

С использованием метода обобщенной реакции приводится численное решение контактной задачи для двух пластин – одна закреплена шарнирно, вторая имеет жесткое закрепление. Показано, что распределение контактных реакций существенно зависит от взаимного расположения пластин. При этом зоной контакта является или отрезок, или точка.

Ключевые слова: пластина, контактная задача, метод обобщенной реакции, численное решение.

Введение

В работе [1] приведено аналитическое решение контактной задачи для двух цилиндрически изгибаемых пластин (см. рис. 1), где «сверху» находится шарнирно закрепленная пластина, а «снизу» – жестко закрепленная пластина[1]. Однако предложенный в статье [1] подход к решению задачи, в которой, наоборот, «сверху» находится жестко закрепленная пластина, а «снизу» – шарнирно закрепленная пластина[2], не приводит к разумному результату. Поэтому для решения двух представленных задач применяется разработанный в Сыктывкарском университете численный метод обобщенной реакции [2], который хорошо зарекомендовал себя при решении задач с неопределенной областью контактного взаимодействия.

[1]Условно будем называть в данной работе ее *задача 1*.
[2]Будем называть ее *задача 2*.

© Ермоленко А. В., Беляев Е. А., Туркова О. И., 2021.

1. Численное решение задачи 1

Рассмотрим две цилиндрически изгибаемые пластины толщины h и ширины $2l$, которые расположены параллельно друг другу на расстоянии Δ. На верхнюю шарнирно закрепленную пластину действует нормальная нагрузка $q_n^+ \equiv q_0 = const$. Под действием нагрузки верхняя пластина изгибается и давит на нижнюю жестко закрепленную пластину, образуя область контакта $[x_0, 2l - x_0]$. Требуется определить прогибы пластин, зону контакта и возникающие контактные реакции $r(x)$ (см. рис. 1).

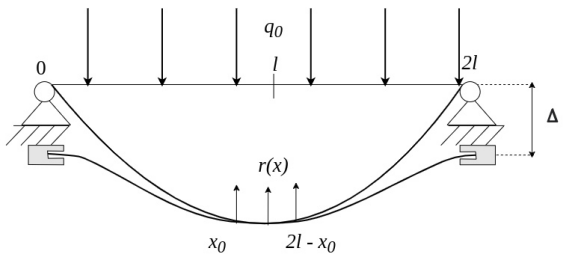

Рис. 1. Контактное взаимодействие двух цилиндрически изгибаемых пластин

Решение будем искать с использованием классической теории изгиба плоских пластин, разрешающее уравнение которой в случае цилиндрического изгиба записывается так [4]:

$$Dw^{IV} = q_n, \tag{1}$$

где w – прогиб пластины, $q_n = q_n^+ - q_n^-$, q_n^+, q_n^- – действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности пластины нагрузки, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Учитывая симметричность задачи, будем рассматривать пластины только на отрезке $[0, l]$. Условия симметрии примем в виде ($i = 1, 2$ – номер пластины)

$$w_i'(l) = 0, w_i'''(l) = 0. \tag{2}$$

При этом верхняя (с индексом «1») пластина при $x = 0$ удовлетворяет условиям шарнирного закрепления

$$w_1(0) = 0, w_1''(0) = 0, \tag{3}$$

а нижняя (с индексом «2») – условиям жесткого закрепления

$$w_2(0) = 0, w_2'(0) = 0. \tag{4}$$

Функции Грина для краевых задач {(1), (2), (3)} и {(1), (2), (4)} имеют соответственно следующий вид:

$$G_1(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + \frac{1}{2}(2l\xi - \xi^2)x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$G_2(x,\xi) = \frac{1}{6}(x-\xi)^3 H(x-\xi) + \frac{1}{4l}(2l\xi - \xi^2)x^2 - \frac{1}{6}x^3. \tag{5}$$

Здесь H – функция Хевисайда.

Используя найденные функции Грина и учитывая, что на верхнюю пластину действуют нагрузки $q_{1n}^+(x) \equiv q_0$ (активная) и $q_{1n}^-(x) \equiv r(x)$ (реактивная), а на нижнюю – только нагрузка $q_{2n}^+(x) \equiv r(x)$, решение задач {(1), (2), (3)} и {(1), (2), (4)} принимает вид

$$w_1 = \frac{1}{D}\int_0^l G_1(x,\xi)(q_0 - r(\xi))d\xi,\ w_2 = \frac{1}{D}\int_0^l G_2(x,\xi)r(\xi))d\xi. \tag{6}$$

При этом прогибы w_i и контактные реакции r связаны соотношением [2]

$$r = [r + \beta(w_1 - w_2 - \Delta]_+, \beta > 0, \tag{7}$$

где $\phi_+ = \frac{1}{2}(\phi + |\phi|)$.

Используя выражения (6), (7), строится следующая итерационная схема:

$$r^{(k+1)} = [r^{(k)} + \beta(w_1^{(k)} - w_2^{(k)} - \Delta]_+, \beta > 0, \tag{8}$$

где

$$w_1^{(k)} = \frac{1}{D}\int_0^l G_1(x,\xi)(q_0 - r^{(k)}(\xi))d\xi,\ w_2^{(k)} = \frac{1}{D}\int_0^l G_2(x,\xi)r^{(k)}(\xi))d\xi.$$

В качестве начальных условий полагаем $r^{(0)} = 0$.

Для реализации итерационной схемы (8) была написана программа на языке программирования python [3]. На рис. 2 приведен пример расчета двух пластин при следующих физических и геометрических па-

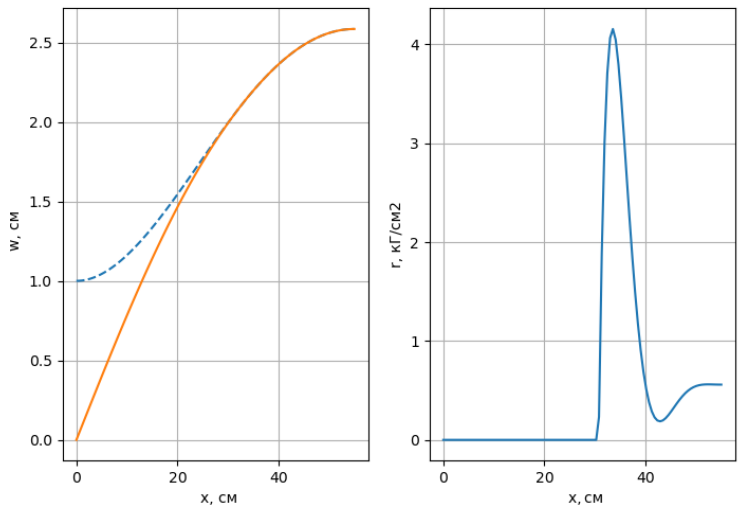

Рис. 2. Прогибы и контактные реакции (задача 1)

раметрах:

$$l = 55 \text{ см},\ h = 1 \text{ см},\ E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2,\ \nu = 0,3,\ q_0 = 5 \text{ кГ/см}^2. \quad (9)$$

На рис. 2 и 3 слева пунктирной линией показан прогиб «нижней» пластины с дополнительным перемещением Δ для лучшей визуализации результата.

Сделаем следующие замечания. Во-первых, при наличии контакта реакции имеют характерный вид, как на рис. 2, а именно в средней части реакция примерно равна действующей нагрузке, а на краю пиковые нагрузки. В работе [5] показано, что при расчете по классической теории данные пики описываются сосредоточенными силами. Во-вторых, если провести расчет по параметрам работы [1], то получаются точно такие же результаты.

2. Численное решение задачи 2

В данной задаче жестко закрепленная пластина расположена над шарнирно закрепленной пластиной. Для решения данной задачи методом обобщенной реакции достаточно в предыдущем разделе в формулах (5) поменять местами функции Грина с сохранением всех остальных выкладок.

На рис. 3 показан результат расчета задачи 2 при параметрах (9).

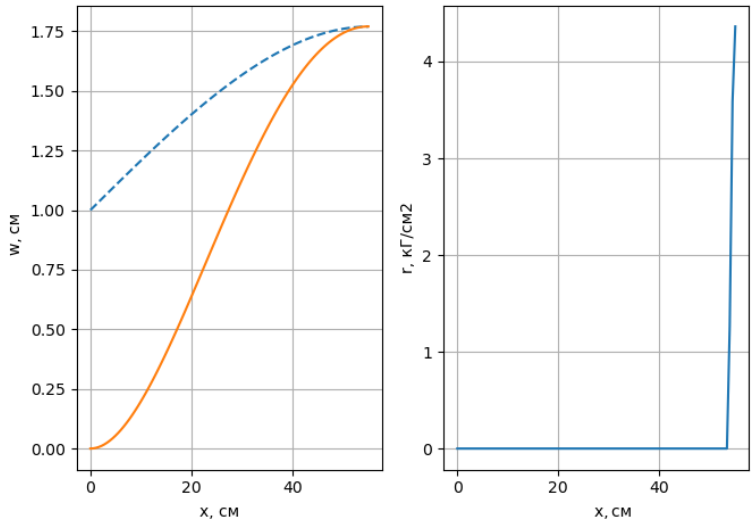

Рис. 3. Прогибы и контактные реакции (задача 2)

При этом следует отметить, что приведенный график контактных реакций является характерным при всех использованных параметрах. Это позволяет утверждать, что контакт в задаче 2 происходит только в одной точке.

Список литературы

1. **Ермоленко А. В., Ладанова С. В.** Контактная задача для двух пластин с разным закреплением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2020. Вып. 3 (36). С. 87–92.

2. **Ермоленко А.В.** Контактные задачи со свободной границей. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). 105 с.

3. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

4. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 1995. 251 с.

5. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.

Summary

Yermolenko A. V., Belyaev E. A., Turkova O. I. One contact problem for two plates

Using the generalized reaction method, a numerical solution of the contact problem for two plates is given. One plate is hinged, the other one is rigidly fixed. It is shown that the distribution of contact reactions significantly depends on the relative position of the plates. In this case, the contact zone is either a segment or a point.

Keywords: plate, contact problem, generalized reaction method, numerical solution.

References

1. **Yermolenko A. V., Ladanova S. V**. Contact problem for two plates with different fixing. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2020, 3 (36). Pp. 87-92.

2. **Ермоленко А. В.** *Kontaktnye zadachi so svobodnoj granicej* [Free Boundary Contact Problems]. Syktyvkar: Izd-vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2020. (CD-ROM). 105 p.

3. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33). Pp. 86–95.

4. **Mihajlovskii E. I., Toropov A. V.** *Matematicheskiye modeli teorii uprugosti* [Mathematical models of the theory of elasticity]. Syktyvkar: Sykt Publishing House. University, 1995. 251 p.

5. **Mikhailovskii E. I., Tarasov V. N.** On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary. *Jurnal prikladnoy matematiki i mekhaniki* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 1993, v. 57, No. 1. Pp. 128–136.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Беляев Е. А., Туркова О. И. Аналогия как основа обучения школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 83–89. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_83

For citation: Yermolenko A. V., Belyaev E. A., Turkova O. I. One contact problem for two plates . *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021. No. 4 (41), pp. 83–89. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_83

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 01.11.2021*

ERRATUM

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (41). 2021

УДК 512.643.8+
517.954+517.968 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_90**

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ «С. В. РОГОЗИН, Л. П. ПРИМАЧУК, М. В. ДУБАТОВСКАЯ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ R-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ // ВЕСТНИК СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. СЕРИЯ 1: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА. ВЫПУСК 2 (39), С. 27–43, 2021»

Рогозин С. В.

Утверждение на стр. 31 «Заметим, что X-(z) является рациональной матрицей, аналитической вне единичного круга (но не обязательно аналитической на бесконечности), поскольку. . . » является неточным.

Это утверждение следует опустить, поскольку на первом этапе факторизации матрицы преобразование осуществляется только на единичной окружности и не использует свойств аналитической продолжимости матрицы X-(z).

Summary

Rogosin S. V. Remark to the paper

An assertion on p. 31 “Note that X(z) is a rational matrix which is analytic outside of the unit disc (but not necessary analytic at infinity) since. . .” is imprecise. This assertion including the expression after it be omitted since on the first stage of factorization the corresponding transformation is performed only on the unit circle and does not involve any analyticity properties of the matrix X(z).

© Рогозин С. В., 2021.

Для цитирования: Рогозин С. В. Аналогия как основа обучения школьников // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 4 (41). С. 90–91. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_90

For citation: Rogosin S. V. Remark to the paper. *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021. No. 4 (41), pp. 90–91. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_4_90

Белорусский государственный
университет, Минск

Поступила 01.11.2021

ПЕРСОНАЛИИ

Андрюкова Вероника Юрьевна – м.н.с., ФМИ ФИЦ «Коми НЦ УрО РАН», e-mail: veran@list.ru

Беляев Евгений Анатольевич – аспирант, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Вечтомов Евгений Михайлович – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, e-mail: vecht@mail.ru

Ермоленко Андрей Васильевич – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Мельников Вадим Андреевич – аспирант, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Рогозин Сергей Васильевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: rogosin@bsu.by

Туркова Оксана Игоревна – аспирант, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Чермных Василий Владимирович – д.ф.-м.н., Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, главный научный сотрудник, e-mail: vv146@mail.ru

AUTHORS

Andryukova Veronika Yuryevna – Associate Professor, Komi Science Center, Ural RAS Department, e-mail: veran@list.ru

Belyaev Evgeniy Anatolievich – Postgraduate student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Chermnykh Vasily Vladimirovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, chief scientist, e-mail: vv146@mail.ru

Melnikov Vadim Andreevich – Postgraduate student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Rogozin Sergey Vasilyevich – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor at the Department of Analytical Economics and

Econometrics, Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: rogosin@bsu.by

Turkova Oksana Igorevna – Postgraduate student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Vechtomov Evgeny Mikhailovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University, e-mail: vecht@mail.ru

Yermolenko Andrei Vasilievich – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Applied Mathematics and Computer Science, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Contents

Mathematics

Vechtomov E. M., Chermnykh V. V. *Main directions of the development of the semiring theory* 4

Applied mathematics and mechanics

Andryukova V. Yu. *Variational approach to calculating critical loads in the case of spatial deformation of curved rods* 41

Computer sciences

Yermolenko A. V., Melnikov V. A. *Solving the problem of abstraction from platform-specific code for iOS and Android applications using the example of SadLion Engine* 50

Methodical materials

Dorofeev S. N., Esetov E. N., Nazemnova N. V. *Analogy as the basis for teaching students the vector method of geometric problem solving* 70

Tutor-follower

Yermolenko A. V., Belyaev E. A., Turkova O. I. *One contact problem for two plates* 83

Erratum

Rogosin S. V. *Remark to the paper* 90

Authors **92**

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 4 (41) 2021

Гл. редактор О. А. Сотникова
Отв. редактор А. В. Ермоленко

Редактор Е. М. Насирова
Компьютерный макет В. А. Устюгов
Корректор Л. Н. Руденко

Подписано в печать 14.12.2021. Дата выхода в свет 28.12.2021.
Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern.
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 10.
Тираж 28 экз. Заказ № 139.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru