МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (39). 2021

УДК 512.643.8+
517.954+517.968 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_27**

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ R-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

С. В. Рогозин, Л. П. Примачук, М. В. Дубатовская

Статья посвящена анализу разработанного авторами эффективного метода решения задачи R-линейного сопряжения. Предложенный метод использует обобщение алгоритма Г. Н. Чеботарева факторизации треугольных матриц-функций.

Ключевые слова: задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, рациональные коэффициенты, факторизация матриц-функций, частные индексы.

1. Введение

Рассматривается разрешимость так называемой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}, \qquad (1)$$

где $\varphi^+(t), \varphi^-(t)$ представляют собой граничные значения неизвестных функций, аналитических соответственно внутри и вне единичного круга $\mathbb{D}$. Эта задача упоминается в литературе как задача Маркушевича. А. И. Маркушевич рассмотрел частный случай такой задачи в 1946 году [1].

Задача (1) исследовалась многими авторами (см. [2], а также краткое описание более поздних результатов в [3, §20]). Интерес к данной

[1]Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.04) и гранта БРФФИ Ф20Р-083.

© Рогозин С. В., Примачук Л. П., Дубатовская М. В., 2021.

задаче вызван достаточно специфической теорией и многочисленными приложениями, в частности в теории композиционных материалов [4; 5].

Разрешимость задачи (1) связана, в частности (см. [6]), с необходимостью факторизации некоторой матрицы-функции второго порядка (см. [7–9]), поскольку задача (1) на единичной окружности эквивалентна векторно-матричной краевой задаче (задаче $\mathbb{C}$-линейного сопряжения)

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

Здесь

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \frac{1}{\overline{a(t)}} \begin{pmatrix} \overline{a(t)} f(t) - b(t)\overline{f(t)} \\ -\overline{f(t)} \end{pmatrix},$$

неизвестные вектор-функции $\Phi^\pm$ связаны с неизвестными функциями φ^+, φ^- следующими тождествами:

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+(z) \\ \overline{\varphi^-(\frac{1}{\overline{z}})} \end{pmatrix}, \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^-(z) \\ \overline{\varphi^+(\frac{1}{\overline{z}})} \end{pmatrix}.$$

Предлагаемый в работе метод представляет собой обобщение нового подхода, разработанного авторами в [10]. Суть этого подхода состоит в двукратном применении метода Г. Н. Чеботарева [11] для факторизации матричного коэффициента задачи (2). В принципе метод может быть применен к любой задаче (1) с произвольными гельдеровскими коэффициентами в эллиптическом случае, т. е. когда коэффициенты удовлетворяют условию $|a(t)| > |b(t)|$. В данной статье ограничиваемся рациональными коэффициентами, поскольку в этом случае предлагаемый алгоритм решения задачи становится конечным и сводится к некоторым последовательным преобразованиям матриц-функций.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу (1) с рациональными коэффициентами $a(t) \neq \neq 0, t \in \mathbb{T}$, $b(t)$, $f(t)$. Преобразуем краевое условие к виду, более удобному для применения метода, разработанного в [10].

Обозначим $æ = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ индекс Коши коэффициента $a(t)$ задачи (1) (равный разности числа нулей и полюсов этой функции внутри единичного круга). Факторизация скалярной функции $a(t)$ [12] означает представление ее в виде

$$a(t) = \chi^+(t) t^{æ} \chi^-(t), t \in \mathbb{T},$$

где $\chi^+(t), \chi^-(t)$ — это граничные значения функций, аналитических и не обращающихся в нуль в областях $D^+ = \mathbb{D}$ и $D^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ соответственно. После серии преобразований:

$$\varphi^+(z) = \frac{\varphi^+(z)}{\chi^+(z)},\ \varphi^-(z) = \varphi^-(z)\chi^-(z),$$

$$q(t) = \frac{b(t)}{\chi^+(t)\overline{\chi^-(t)}},\ h(t) = \frac{f(t)}{\chi^+(t)},$$
$$q(t) = q^+(t) + q^-(t),$$

приходим к следующей эквивалентной форме задачи (1):

$$\psi^+(t) = t^{æ}\psi^-(t) + p(t)\overline{\psi^-(t)} + h(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3}$$

где $\psi^+(t) = \varphi^+(t) - q^+(t)\overline{\varphi^-(t)}$, $\psi^-(t) = \varphi^-(t)$, а $p(t) = q^-(t)$, $h(t)$ — рациональные функции.

В приведенных выше обозначениях краевая задача (3) эквивалентна векторно-матричной задаче (или задаче $\mathbb{C}$-линейного сопряжения)

$$\Psi^+(t) = \begin{pmatrix} t^{æ} & 0 \\ 0 & t^{æ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - p(t)\overline{p(t)} & p(t) \\ -\overline{p(t)} & 1 \end{pmatrix} \Psi^-(t) + H(t),\ t \in \mathbb{T}, \tag{4}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} h(t) - t^{æ} p(t)\overline{h(t)} \\ -t^{æ}\overline{h(t)} \end{pmatrix}.$$

Уточним условия на рациональный коэффициент $p(t)$ задачи (3). Будем считать, что выполнено следующее

Предположение. Положим, что $p(t)$ — это рацинальная функция, аналитическая вне единичного круга:

$$p(t) = q^-(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} = a_0 \frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(t - a_j)}{t^k \prod\limits_{j=1}^{m}(t - b_j)}, \tag{5}$$

где все нули многочлена $Q(z)$ лежат внутри единичного круга

$$|b_j| < 1, \quad j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

а порядок $n = deg\, P$ многочлена $P(z)$ и порядок $m = deg\, Q$ многочлена $Q(z)$ удовлетворяют неравенству

$$n < m + k. \tag{8}$$

Решение задачи (4) определяется факторизацией матричного коэффициента с рациональными элементами

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - p(t)\overline{p}(t) & p(t) \\ -\overline{p}(t) & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. представлением этой матрицы-функции в виде

$$A(t) = A^{+}(t)\Lambda(t)A^{-}(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{9}$$

где $A^{+}(t), A^{-}(t)$ — граничные значения матриц, аналитических и невырожденных в областях D^{+}, D^{-} соответственно, а $\Lambda(t) = diag\{t^{æ_1}, t^{æ_2}\}$ с целыми показателями степени $æ_1, æ_2 \in \mathbb{Z}$ (называемыми частными индексами матрицы $A(t)$). Известно (см., например, [13]), что подобная факторизация рациональных матриц-функций всегда существует. Заметим также, что рассматриваемая матрица обладает следующим свойством: $\det A(t) \equiv 1$, потому частные индексы удовлетворяют соотношению

$$æ_1 + æ_2 = 0. \tag{10}$$

В данной работе предложен конструктивный алгоритм факторизации рациональных матриц. Этот алгоритм основывается на применении преобразований, обобщающих метод Г. Н. Чеботарева [11]. С помощью этих преобразований задача сводится сначала к задаче факторизации треугольной матрицы-функции, которая затем факторизуется с помощью метода, аналигичного методу Чеботарева.

Предлагаемый алгоритм является более простым по сравнению с известными алгоритмами факторизации рациональных матриц-функций (см., например, [8; 13]).

3. Факторизация матричного коэффициента

Для начального шага алгоритма введем формальное (матричное) аналитическое решение $X_0^{\pm}(z)$ однородной краевой задачи с матричным коэффициентом $A(t)$

$$X_0^+(t) = A(t)X_0^-(t), \quad t \in \mathbb{T}. \tag{11}$$

А именно положим, что $X_0^+(z) = E_2$ — это единичная 2×2 матрица,

$$X_0^-(z) = \begin{pmatrix} 1 & -p(z) \\ \overline{p(z)} & 1 - p(z)\overline{p(z)} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Заметим, что $X_0^-(z)$ является рациональной матрицей, аналитической вне единичного круга (но необязательно аналитической в бесконечно удаленной точке), поскольку

$$\overline{p(z)} = \overline{a_0}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(\overline{z} - \overline{a_j})}{\overline{z}^k \prod\limits_{j=1}^{m}(\overline{z} - \overline{b_j})} = \frac{1}{a_0}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(\frac{1}{z} - \frac{1}{a_j})}{\frac{1}{z^k}\prod\limits_{j=1}^{m}(\frac{1}{z} - \frac{1}{b_j})} =$$

$$= (-1)^{m+n}\frac{b_1 \cdots b_m}{a_0 \cdot a_1 \cdots a_n} z^{m-n}\frac{z^k \prod\limits_{j=1}^{n}(z - a_j)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(z - b_j)}.$$

3.1. Преобразование к треугольной матрице

Для преобразования матрицы $X^-(z)$ к треугольному виду представим рациональную функцию $\frac{1}{p(t)}$ в виде цепной дроби. Сначала поделим многочлен $Q(t)$ на многочлен $P(t)$. Получим

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{Q(t)}{P(t)} = S_0(t) + \frac{R_1(t)}{P(t)}, \tag{13}$$

где $S_0(t)$ — многочлен порядка $\mu_0 = m + k - n$, а $R_1(t)$ — многочлен порядка $\nu_1 < n < m + k$. Соотношение (13) эквивалентно следующему равенству

$$1 - S_0(t)p(t) = \frac{R_1(t)}{Q(t)}. \tag{14}$$

Далее поделим многочлен $P(t)$ на многочлен $R_1(t)$:

$$\frac{P(t)}{R_1(t)} = S_1(t) + \frac{R_2(t)}{R_1(t)}, \tag{15}$$

где $S_1(t)$ — многочлен порядка $\mu_1 = n - \nu_1$, а $R_2(t)$ — многочлен порядка $\nu_2 < \nu_1$. Соотношение (15) эквивалентно равенству

$$P(t) - S_1(t)R_1(t) = R_2(t). \tag{16}$$

Продолжая, получим

$$\frac{R_1(t)}{R_2(t)} = S_2(t) + \frac{R_3(t)}{R_2(t)}, \tag{17}$$

где $S_2(t)$ — многочлен порядка $\mu_2 = \nu_1 - \nu_2$, а $R_3(t)$ — многочлен порядка $\nu_3 < \nu_2$. Соотношение (17) эквивалентно равенству

$$R_1(t) - S_2(t)R_2(t) = R_3(t). \tag{18}$$

Поскольку порядки многочленов $R_j(t)$ убывают, то через конечное число шагов получим конечное разложение функции $\frac{1}{p(t)}$ в цепную дробь

$$\frac{1}{p(t)} = S_0(t) + \frac{1}{S_1(t) + \frac{1}{S_2(t) + \cdots \frac{1}{S_l(t)}}}. \tag{19}$$

Далее мы применим полученное соотношение (14) для преобразования матрицы $X_0^-(t)$ к треугольному виду. Умножим обе части (11) справа на полиномиальную матрицу

$$T_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_0(t) & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Тогда минусовая компонента $X_1^-(t)$ решения задачи (11) имеет вид

$$X_1^-(t) = X_0^-(t)T_1(t) = \begin{pmatrix} 1 - p(t)S_0(t) & -p(t) \\ F_1(t) & 1 - p(t)\overline{p(t)} \end{pmatrix} = \tag{21}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{R_1(t)}{Q(t)} & -\frac{P(t)}{Q(t)} \\ F_1(t) & 1 - p(t)\overline{p(t)} \end{pmatrix},$$

где $F_1(t)$ — некоторая рациональная функция. Далее умножим обе части равенства $X_0^+(t)T_1(t) = A(t)X_1^-(t)$ на полиномиальную матрицу

$$T_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & S_1(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Получим

$$X_2^-(t) = X_1^-(t)T_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_1(t)}{Q(t)} & \frac{R_1(t)S_1(t)-P(t)}{Q(t)} \\ F_1(t) & F_2(t) \end{pmatrix} = \tag{23}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{R_1(t)}{Q(t)} & -\frac{R_2(t)}{Q(t)} \\ F_1(t) & F_2(t) \end{pmatrix},$$

где $F_2(t)$ — рациональная функция. Продолжая, получим соотношение

$$X_{l+1}^+(t) = T_1(t)T_2(t)\cdots T_{l+1}(t) = A(t)X_{l+1}^-(t). \tag{24}$$

На последнем шаге деления многочленов в процессе представления $\frac{1}{p(t)}$ в виде цепной дроби возможны два случая:

(a) $R_{l-1}(t)$ делится на $R_l(t)$ нацело, т. е. $(R_{l+1}(t) \equiv 0)$, т. е.

$$\frac{R_{l-1}(t)}{R_l(t)} = S_l(t). \tag{25}$$

(b) остаток от деления $R_{l-1}(t)$ на $R_l(t)$ есть число $(R_{l+1}(t) \equiv C)$, т. е.

$$\frac{R_{l-1}(t)}{R_l(t)} = S_l(t) + \frac{C}{R_l(t)}. \tag{26}$$

Покажем далее, что в обоих случаях матрица $X_{l+1}^-(t)$ преобразуется к треугольному виду.

Рассмотрим случай **(a)**. Если число l нечетное, то матрица $X_{l+1}^-(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_l(t)}{Q(t)} & 0 \\ F_l(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix} =: \triangle(t). \tag{27}$$

Если число l четное, то матрица $X_{l+1}^-(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^-(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R_l(t)}{Q(t)} \\ F_{l+1}(t) & F_l(t) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

и для унификации ситуации умножим обе части (24) на матрицу

$$T_{l+2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_{l+2}^{-}(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_l(t)}{Q(t)} & 0 \\ -F_l(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Рассмотрим случай **(b)**. Если число l нечетное, то матрица $X_{l+1}^{-}(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^{-}(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_l(t)}{Q(t)} & -\frac{C}{Q(t)} \\ F_l(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Умножим обе части соотношения (24) на рациональную матрицу

$$T'_{l+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R_l(t)}{C} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $X_{l+2}^{-}(t) = X_{l+1}^{-}(t)T'_{l+2}$ приобретет при этом вид

$$X_{l+2}^{-}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{C}{Q(t)} \\ F_{l+2}(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где $F_{l+2}(t) = F_l(t) + \frac{R_l(t)}{C}F_{l+1}(t)$. Умножая $X_{l+2}^{+}(t) = A(t)X_{l+2}^{-}(t)$ на матрицу

$$T'_{l+3} = T_{l+2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем минусовую компоненту $X_{l+3}^{-}(t)$ в виде

$$X_{l+3}^{-}(t) = \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(t)} & 0 \\ -F_{l+1}(t) & F_{l+2}(t) \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Если число l четное, то матрица $X_{l+1}^{-}(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^{-}(t) = \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(t)} & -\frac{R_l(t)}{Q(t)} \\ F_{l+1}(t) & F_l(t) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Умножая обе части равенства (24) на рациональную матрицу

$$T''_{l+2} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{R_l(t)}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим следующее представление матрицы $X^-_{l+2}(t) = X^-_{l+1}(t)T''_{l+2}(t)$:

$$X^-_{l+2}(t) = \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(t)} & 0 \\ F_{l+1}(t) & F_{l+2}(t) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Заметим, что матрица A и все матрицы преобразования T_j имеют единичный определитель, мы приходим к следующему утверждению. Пара матриц $X^+_s(z), X^-_s(z)$, с «плюсовой» компонентой

$$X^+_s(z) = T_1(z)T_2(z)\cdots T_s(z) \tag{35}$$

и треугольной «минусовой» компонентой

$$X^-_s(z) = \Delta(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{R_l(z)}{Q(z)} & 0 \\ (-1)^{l+1}F_l(z) & \frac{Q(z)}{R_l(z)} \end{pmatrix} & \text{в случае} \quad (\mathbf{a}), \\ \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(z)} & 0 \\ (-1)^{l}F_{l+1}(z) & \frac{Q(z)}{C} \end{pmatrix} & \text{в случае} \quad (\mathbf{b}) \end{cases} \tag{36}$$

удовлетворяет краевому условию (11), т. е.

$$X^+_s(t) = A(t)X^-_s(t). \tag{37}$$

Здесь число s равно одному из чисел $l+1$, $l+2$, или $l+3$.

3.2. Факторизация матрицы $A(t)$

Для того чтобы факторизовать матрицу $A(t)$, перепишем соотношение (37) в эквивалентной форме

$$X^+_s(t)\Delta^{-1}(t) = A(t), \tag{38}$$

где

$$\Delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{Q(t)}{R_l(t)} & 0 \\ (-1)^{l}F_l(t) & \frac{R_l(t)}{Q(t)} \end{pmatrix} \tag{39}$$

в случае **(a)** и

$$\Delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{Q(t)}{C} & 0 \\ (-1)^{l+1}F_l(t) & \frac{C}{Q(t)} \end{pmatrix} \tag{40}$$

в случае **(b)**.

Матрица

$$\Delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} x(t) & 0 \\ a(t) & y(t) \end{pmatrix}$$

имеет компоненты, описанные в Лемме 3.1. Факторизация этой матрицы строится с помощью алгоритма Чеботарева [11]. Сначала факторизуем диагональные элементы $x(t), y(t)$, т. е. представим их в виде

$$x^+(t) = x(t)x^-(t), \quad y^+(t) = y(t)y^-(t), \quad t \in \mathbb{T}. \tag{41}$$

В случае (**a**) эта факторизация зависит от распределения нулей многочлена $R_l(z)$. Пусть $R_l(z) = R_l^+(z)R_l^-(z)$, где все нули многолена $R_l^+(z)$ лежат внутри единичного круга, а все нули $R_l^-(z)$ — вне его, т. е. $l = l^+ + l^-$.

Следуя [11], рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{a(\tau)x^-(\tau)d\tau}{y^+(\tau)(\tau - z)}, \quad z \in D^\pm. \tag{42}$$

Пара аналитических невырожденных матриц

$$Y^\pm(z) = \begin{pmatrix} x^\pm(z) & 0 \\ y^\pm(z)\Phi^\pm(z) & y^\pm(z) \end{pmatrix} \tag{43}$$

удовлетворяет краевому условию

$$Y^+(t) = \Delta^{-1}(t)Y^-(t),\ t \in \mathbb{T}. \tag{44}$$

Следуя [14], заметим, что для построения общего решения задачи (44) необходимо найти так называемую каноническую матрицу этой задачи (что равносильно решению задачи факторизации (9)). Напомним [14, с. 523], что канонической матрицей называется кусочно-аналитическая матрица $X^\pm(z)$, удовлетворяющая условию (44), аналитическая и невырожденная в областях $D^\pm$ и такая, что сумма порядков ее столбцов на бесконечности (равная минимуму порядков элементов столбца) совпадает с порядком $\det X^-$ на бесконечности. В этом случае говорят, что $X^-(z)$ имеет нормальную форму на бесконечности, а порядки столбцов равны частным индексам соответствующей задачи факторизации.

Построенная выше кусочно-аналитическая матрица $Y^{\pm}(z)$, вообще говоря, не является канонической матрицей задачи (44). Вычислим порядки элементов матрицы $Y^{-}(z)$ и запишем их слева и справа от матрицы в виде

$$Y^{-}(z) = \begin{array}{c} k+m-\lambda \\ \nu-k-m+\lambda \end{array} \begin{pmatrix} x^{-}(z) & 0 \\ y^{-}(z)\Phi^{-}(z) & y^{-}(z) \end{pmatrix} \begin{array}{c} \infty \\ \lambda-k-m \end{array}. \tag{45}$$

Здесь

$$\lambda = \begin{cases} l_{+} & \text{в случае} \quad (\mathbf{a}), \\ 0 & \text{в случае} \quad (\mathbf{b}). \end{cases} \tag{46}$$

Порядки столбцов равны $\min\{k+m-\lambda, \nu-k-m+\lambda\}$ и $-k-m$ соответственно. Следовательно, не во всех случаях

$$\min\{k+m-\lambda, \nu-k-m+\lambda\} + (-k-m) = 0 = ord\det Y^{-}(\infty).$$

Для того чтобы преобразовать матрицу $Y^{\pm}(z)$ к каноническому виду, воспользуемся алгоритмом Чеботарева [11]. Представим (рациональную!) функцию $\frac{1}{\Phi^{-}(z)}$ в виде конечной цепной дроби

$$\frac{1}{\Phi^{-}(z)} = U_0(z) + \cfrac{1}{U_1(z) + \frac{1}{U_2(z) + \cdots \frac{1}{U_r(z)}}},$$

где $U_0(z), U_1(z), \dots, U_r(z)$ — многочлены порядков $q_0, q_1, \dots, q_r$ соответственно. На каждом шаге разложения (за исключением последнего) имеем следующее тождество:

$$\begin{gathered} 1 = U_0(z)\Phi^{-}(z) + V_1(z), \\ \Phi^{-}(z) = U_1(z)V_1(z) + V_2(z), \\ \cdots, \end{gathered}$$

где остатки деления $V_1(z), V_2(z), \dots, V_{s-1}(z)$ имеют на бесконечности порядки $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{s-1}$ соответственно. На последнем шаге имеем
случай (**c**):

$$V_{s-1}(z) = U_s(z)V_s(z),$$

или
случай (**d**):

$$V_{s-1}(z) = U_s(z)V_s(z) + C.$$

Далее, умножим обе части равенства (44) на треугольную полиномиальную матрицу вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_i(t) & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & U_i(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для того, чтобы получить необходимые свойства преобразованной матрицы (минусовой компоненты).

Заметим, что $\nu = q_0, \nu_1 = q_0 + q_1, \nu_2 = q_0 + q_1 + q_2, \dots, \nu_s = q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_s$. Тогда так же, как в [11], мы получим следующий результат. Если $\nu - k - m + \lambda \geq k + m - \lambda$, то частные индексы матрицы $\triangle^{-1}(t)$ равны $k + m - \lambda, \lambda - k - m$.

Если $\nu, \nu + \nu_1, \dots, \nu_{i-1} + \nu_i < k + m - \lambda$, но $\nu_i + \nu_{i+1} \geq k + m - \lambda$, то частные индексы матрицы $\triangle^{-1}(t)$ равны $k + m - \lambda - \nu_i$, $-k - m + \lambda + \nu_i$. В нашем случае $\det \triangle^{-1}(t)$, а также определители всех матриц преобразования тождественно равны 1. Следовательно, $\chi_1 = -\chi_2$ и частные индексы матрицы $\triangle^{-1}(t)$ всегда противоположны по знаку ($æ_1 = -æ_2$).

Следовательно, матричный коэффициент задачи (4) имеет следующую факторизацию:

$$\begin{pmatrix} t^{æ} & 0 \\ 0 & t^{æ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - p(t)\overline{p(t)} & p(t) \\ -\overline{p(t)} & 1 \end{pmatrix} = t^{æ} A(t) = Z^+(t)\Lambda(t)Z^-(t), \qquad (47)$$

где $t \in \mathbb{T}$, $Z^+(t) = X_s^+(t)Y^+(t)$, $Z^-(t) = Y^-(t)$, и $\Lambda(t) = diag\{t^{æ+æ_1}, t^{æ-æ_1}\}$.

Заметим, что набор частных индексов матрицы $A(t)$ устойчив (см., например, [6; 8]) тогда и только тогда, когда $æ_1 = 0$.

4. Решение задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения

Используя решение задачи факторизации (47), преобразуем краевое условие задачи (4) к виду

$$\Omega^+(t) = \Lambda(t)\Omega^-(t) + s(t), \quad t \in \mathbb{T}. \qquad (48)$$

Решения задачи (48) связаны с решениями задачи (4) следующими соотношениями:

$$\Omega^+(z) = \left[Z^+(z)\right]^{-1} \Psi^+(z), \;\; \Omega^+(z) = Z^-(z)\Psi^-(z), \qquad (49)$$

и $s(t) = \left[Z^+(t)\right]^{-1} r(t)$. Фактически векторно-матричная задача эквивалентна двум независимым скалярным краевым задачам:

$$\begin{cases} \omega_1^+(t) = t^{æ+æ_1}\omega_1^-(t) + s_1(t), \\ \omega_2^+(t) = t^{æ-æ_1}\omega_2^-(t) + s_2(t). \end{cases} \qquad (50)$$

Решения этих задач, а также условия их разрешимости могут быть записаны в замкнутой форме [12]. Представим их в следующей теореме.

Если $æ - æ_1 \geq 0$, то общие решения задач (50) могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \omega_1^+(z) = P_{æ+æ_1}(z) + s_1^+(z), & \omega_1^-(z) = t^{-(æ+æ_1)}\left[P_{æ+æ_1}(z) + s_1^-(z)\right], \\ \omega_2^+(z) = P_{æ-æ_1}(z) + s_2^+(z), & \omega_2^-(z) = t^{-(æ-æ_1)}\left[P_{æ-æ_1}(z) + s_2^-(z)\right], \end{cases} \tag{51}$$

где $P_{æ+æ_1}(z), P_{æ-æ_1}(z)$ — многочлены с произвольными комплексными коэффициентами порядков $æ + æ_1, æ - æ_1$ соответственно, и

$$s_j^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{s_j(t)dt}{t-z} \quad (j = 1, 2), \quad z \in D^\pm. \tag{52}$$

Если $æ - æ_1 < 0 \leq æ + æ_1$, то решения задач (50) существуют тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} s_2(t)t^{k-1}dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -æ + æ_1 - 1. \tag{53}$$

Если условия (53) выполнены, то общие решения задач (50) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \omega_1^+(z) = P_{æ+æ_1}(z) + s_1^+(z), & \omega_1^-(z) = t^{-(æ+æ_1)}\left[P_{æ+æ_1}(z) + s_1^-(z)\right], \\ \omega_2^+(z) = s_2^+(z), & \omega_2^-(z) = t^{-(æ-æ_1)}s_2^-(z), \end{cases} \tag{54}$$

где $P_{æ+æ_1}(z)$ — многочлен с произвольными комплексными коэффициентами порядка $æ + æ_1$, а функции $s_j^\pm(z), j = 1, 2$ задаются формулами (52).

Если $æ + æ_1 < 0$, то общие решения задач существуют тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{T}} s_1(t)t^{k-1}dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -æ - æ_1 - 1, \\ &\int\limits_{\mathbb{T}} s_2(t)t^{k-1}dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -æ + æ_1 - 1. \end{aligned} \tag{55}$$

Если условия (55) выполнены, то общие решения задач (50) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \omega_1^+(z) = s_1^+(z), & \omega_1^-(z) = t^{-(æ+æ_1)}s_1^-(z), \\ \omega_2^+(z) = s_2^+(z), & \omega_2^-(z) = t^{-(æ-æ_1)}s_2^-(z), \end{cases} \tag{56}$$

где функции $s_j^{\pm}(z), j = 1, 2$ задаются формулами (52).

Решение $\varphi^{\pm}(z)$ задачи могут быть найдены из соотношений, связывающих функцию $\varphi^{\pm}(z)$ и вектор $\Psi^{\pm}$. Последний выражается через решения $\Omega^{\pm}(z)$ задачи (48), задаваемыми формулами (51), (54), (56) и через решения $Y^{\pm}(z)$ задачи факторизации (3)

$$\Psi^{+}(z) = Z^{+}(z)\Omega^{+}(z), \quad \Psi^{+}(z) = \left[Z^{-}(z)\right]^{-1}\Omega^{-}(z).$$

Список литературы

1. **Маркушевич А. И.** Об одной краевой задаче теории аналитических функций // *Уч. записки Московского ун-та. I. 100. 1946. С. 20–30.*

2. **Михайлов Л. Г.** Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1963. 1836 с.

3. **Litvinchuk G. S.** Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift // *Mathematics and its Applications. 2000. V. 523. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 205 p.*

4. **Mityushev V. V.** $\mathbb{R}$-linear and Riemann-Hilbert problems for multiply connected domains // *Advances in Applied Analysis (Sergei V. Rogosin, Anna A. Koroleva eds.), Springer: Basel. 2012. Pp. 147–176.*

5. **Mityushev V. V., Rogosin S. V.** Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications (Monographs and surveys in pure and applied mathematics. Vol. 108), Chapman & Hall / CRC PRESS: Boca Raton - London - New York - Washington, 1999. 296 p.

6. **Литвинчук Г. С.** Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // *Изв. вузов. Матем. № 12. 1967. С. 47–57.*

7. **Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.** Factorization of measurable matrix functions. Basel-Boston: Birkhäuser. 1987. 372 p.

8. **Rogosin S., Mishuris G.** Constructive methods for factorization of matrix-functions // *IMA J. Appl. Math., 2016. Vol. 81 (2). Pp. 365–391.*

9. **Сабитов И. Х.** Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности // *Сиб. мат. ж. 1964. Т. V (1). Pp. 124–129.*

10. **Primachuk L., Rogosin S., Dubatovskaya M.** On R-linear conjugation problem on the unit circle // *Eurasian Mathematical Journal, 2020. Vol. 11 (3). Pp. 79–88.*

11. **Чеботарев Г. Н.** Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // *Успехи мат. наук. 1956. Т. XI. Вып. 3. Pp. 192–202.*

12. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука. 1977. 544 с.

13. **Adukov V. M.** Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix-functions // *St. Petersburg Math. J. 4 (1). 1993. Pp. 51–69.*

14. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 511 с.

15. **Primachuk L., Rogosin S.** Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order // *Lobachevsky J. Math., 2018. V. 39 (6). Pp. 809–817.*

Summary

Rogosin S. V., Primachuk L. P., Dubatovskaya M. V. On solution to R-linear conjugation problem with rational coefficients

The paper is devoted to an analysis of an effective method of solution to R-linear conjugation problem recently developed by the authors. The method uses a generalization of G. N. Chebotarev's algorithm for factorization of the triangular matrix-functions.

Keywords: $\mathbb{R}$-linear conjugation problem, rational coefficients, factorization of matrix-functions, partial indices.

References

1. **Markushevich A. I.** On a boundary value problem in the theory of analytic functions, *Uch. notes of Moscow University*, 1946, I. 100, pp. 20–30.

2. **Mikhailov L. G.** *Novyy klass osobykh integral'nykh uravneniy i yego primeneniya k differentsial'nym uravneniyam s singulyarnymi koeffitsiyentami* [A new class of singular integral equations and its application to differential equations with singular coefficients], Dushanbe: Academy of Sciences of the Tajik SSR, 1963, 1836 p.

3. **Litvinchuk G. S.** Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift, *Mathematics and its Applications*, 2000, V. 523, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 205 p.

4. **Mityushev V. V.** $\mathbb{R}$-linear and Riemann-Hilbert problems for multiply connected domains, *Advances in Applied Analysis* (Sergei V. Rogosin, Anna A. Koroleva eds.), Springer: Basel, 2012, pp. 147–176.

5. **Mityushev V. V., Rogosin S. V.** *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications* [Monographs and surveys in pure and applied mathematics], Vol. 108, Chapman & Hall / CRC PRESS: Boca Raton - London - New York - Washington, 1999, 296 p.

6. **Litvinchuk G. S.** Two theorems on the stability of the quotient indices of the Riemann boundary value problem and their application, *Izv. vuzov. Matem.* [Izv. universities. Mat.], No. 12, 1967, pp. 47–57.

7. **Litvinchuk G. S., Spitkovsky, I. M.** *Factorization of measurable matrix functions*, Basel-Boston: Birkhäuser, 1987, 372 p.

8. **Rogosin S., Mishuris G.** Constructive methods for factorization of matrix-functions, *IMA J. Appl. Math.*, 2016, Vol. 81 (2), pp. 365–391.

9. **Sabitov I. Kh.** On the general boundary value problem of linear conjugation on a circle, *Sib. mat. zh.* [Sib. mat. J.], 1964, T. V (1), pp. 124–129.

10. **Primachuk L., Rogosin S., Dubatovskaya M.** On R-linear conjugation problem on the unit circle, *Eurasian Mathematical Journal*, Vol. 11 (3), 2020, p. 79–88.

11. **Chebotarev G. N.** Partial indices of the Riemann boundary value problem with a triangular matrix second order, *Uspekhi mat. nauk* [Advances mat. nauk], 1956, T. XI, Iss. 3, pp. 192–202.

12. **Gakhov F. D.** *Krayevyye zadachi* [Boundary value problems], 3rd ed, M.: Science, 1977, 544 p.

13. **Adukov V. M.** Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix-functions, *St. Petersburg Math. J.*, 1993, V. 4 (1), pp. 51–69.

14. **Muskhelishvili N. I.** *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular integral equations], 3rd ed., M.: Science, 1968, 511 p.

15. **Primachuk L., Rogosin S.** Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order, *Lobachevsky J. Math.*, V. 39 (6), 2018, pp. 809–817.

Для цитирования: Рогозин С. В., Примачук Л. П., Дубатовская М. В. О решении задачи R-линейного сопряжения с рациональными коэффициентами // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 27–43. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_27*

For citation: Rogosin S. V., Primachuk L. P., Dubatovskaya M. V. On solution to R-linear conjugation problem with rational coefficients, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 27–43. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_27

Belarusian State University, Minsk, Belarus *Поступила 10.05.2021*