МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (39). 2021

УДК 517.977 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_20**

К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. С. Банников

Даётся описание множества достижимости в пространстве фазовой переменой. Построено экстремальное управление, переводящее начальное положение на границу множества достижимости, как решение соответствующей задачи оптимального быстродействия. Приведены численные примеры. При проведении численного эксперимента использовались программы на языках MATLAB и Wolfram Language.

Ключевые слова: производная Капуто, управляемая система, множество достижимости.

Определение 1 (см. [1, с. 97]). Пусть $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция и $\alpha \in (0,1)$. *Левосторонней производной по Капуто порядка* α функции f назовём функцию ${}^{C}D^{\alpha}_{0+}$ вида

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,ds, \quad t \geqslant 0.$$

Правосторонней производной Римана – Лиувилля порядка α функции f назовём функцию ${}^{RL}D^{\alpha}_{T-}$ вида

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{T-}f\right)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_t^T \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}}\,ds, \quad t \leqslant T.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается линейная стационарная управляемая система дробного порядка, которая имеет вид

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+}z\right)(t) = Az(t) + u(t), \qquad z(0) = z^0, \quad u \in Q. \tag{1}$$

Здесь $\alpha \in (0,1)$, z, $u \in \mathbb{R}^k$, A — квадратная матрица размера $k \times k$, Q — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$. При выбранном допустимом (измеримом по Лебегу) управлении $u(t) \in Q$, $t \in [0,T]$, траектория решения задачи Коши (1) описывается формулой (см., например [2, (2.6)])

$$z(t) = E_\alpha(At^\alpha)z^0 + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)u(s)\,ds \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Здесь $E_{\alpha,\beta}(B) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ — матричная функция Миттаг-Леффлера двух параметров α, β, $E_\alpha(B) = E_{\alpha,1}(B)$.

Обозначим через $Q[0,t]$ множество всех измеримых на $[0,t]$ функций, принимающих значение в выпуклом компакте Q. Рассмотрим множество достижимости

$$\begin{gathered} Z(t,z^0) = \\ = \left\{ E_\alpha(At^\alpha)z^0 + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)u(s)\,ds \colon u(\cdot) \in Q[0,t] \right\} = \\ = E_\alpha(At^\alpha)z^0 + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Q\,ds. \end{gathered} \tag{3}$$

Так как Q — ограниченное множество, то $Z(t,z^0)$ — выпуклый компакт [3]. Рассмотрим опорную функцию множества достижимости (3):

$$\begin{gathered} \operatorname{supp}(Z(t,z^0);\psi) = \sup_{z\in Z(t,z^0)} \langle z,\psi\rangle = \sup_{u(\cdot)\in Q[0,t]} \left\{ \langle E_\alpha(At^\alpha)z^0,\psi\rangle + \right. \\ \left. + \int\limits_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)u(s),\psi\rangle\,ds \right\} = \\ = \langle E_\alpha(At^\alpha)z^0,\psi\rangle + \int\limits_0^t \operatorname{supp}(Q,(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A^*(t-s)^\alpha)\psi)\,ds = \\ = \langle E_\alpha(At^\alpha)z^0,\psi\rangle + \int\limits_0^t \operatorname{supp}(Q,\widehat{\psi}(t,s))\,ds. \end{gathered} \tag{4}$$

Функция $\widehat{\psi}(t,s)$ является решением *сопряженной* к (1) системы

$$\left({}^{RL}D^{\alpha}_{t-}z\right)(s) = A^{*}z(s), \tag{5}$$

$$J^{1-\alpha}_{t-}z\big|_{s=t} = \lim_{s\to t-0}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{s}^{t}\frac{z(\tau)}{(\tau-s)^{\alpha}}\,d\tau = \psi. \tag{6}$$

Зададим управление $\widehat{u}(t,s)\in Q$ следующим равенством:

$$\widehat{u}(t,s)\colon \langle\widehat{u}(t,s),\widehat{\psi}(t,s)\rangle = \operatorname{supp}(Q,\widehat{\psi}(t,s)),\quad s\in[0,t]. \tag{7}$$

Подставим в (2):

$$\widehat{z}(t,\psi) = E_{\alpha}(At^{\alpha})z^{0} + \int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})\widehat{u}(t,s)\,ds. \tag{8}$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\widehat{z}(t,\psi)$ и ψ:

$$\begin{gathered}\langle\widehat{z}(t,\psi),\psi\rangle = \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^{0},\psi\rangle +\\ +\langle\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})\widehat{u}(t,s)\,ds,\psi\rangle =\\ = \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^{0},\psi\rangle + \int\limits_{0}^{t}\langle(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^{\alpha})\widehat{u}(t,s),\psi\rangle\,ds =\\ = \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^{0},\psi\rangle + \int\limits_{0}^{t}\langle\widehat{u}(t,s),\widehat{\psi}(t,s)\rangle\,ds =\\ = \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^{0},\psi\rangle + \int\limits_{0}^{t}\operatorname{supp}(Q,\widehat{\psi}(t,s))\,ds = \operatorname{supp}(Z(t,z^{0}),\psi).\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, для всякого опорного вектора ψ к множеству $Z(t,z^{0})$ управление $\widehat{u}(t,s)$ переводит траекторию (2) из начального положения z^{0} в точку на границе множества достижимости $Z(t,z^{0})$ из опорного множества, определенного вектором ψ.

Определение 2 ([4, гл. 2, § 2.6])**.** *Сеткой C мелкости* $\Delta\in(0,1)$ называется такой конечный набор векторов $p_i\in\mathbb{R}^{k}$, $i\in\{1,\dots,I\}$, из единичной сферы (т. е. $\|p_i\|=1$), что для любого вектора $p\neq 0$, такого, что $p/\|p\|\notin C$, существуют подмножество индексов $I_p\subset\{1,\dots,I\}$ и числа $\mu_i>0$, $i\in I_p$, такие, что

$$\|p_i - p_j\| < \Delta \quad \forall i, j \in I_p, \text{ где } p_i, p_j \in C, \tag{10}$$

$$p = \sum_{i \in I_p} \mu_i p_i, \quad p_i \in C. \tag{11}$$

Зададимся произвольной сеткой C мелкости Δ, и для каждого вектора $\psi_i \in C$ этой сетки построим экстремальное управление $\widehat{u}(t, s, \psi_i)$ и соответствующую этому управлению граничную точку $z_i = \widehat{z}(t, \psi_i)$, $i \in \{1, \ldots, I\}$. Тем самым можно определить две выпуклые многогранные аппроксимации множества достижимости $Z(t, z^0)$:

1) внутреннюю аппроксимацию $Z_*(t, z^0) \subset Z(t, z^0)$, где

$$Z_*(t, z^0) = \mathrm{co}\{z_i\}_{i=1}^I;$$

2) внешнюю аппроксимацию $Z^*(t, z^0) \supset Z(t, z^0)$, где

$$Z^*(t, z^0) = \bigcap_{i=1}^{I} \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle x, \psi_i \rangle \leqslant \mathrm{supp}(Z(t, z^0), \psi_i) = \langle z_i, \psi_i \rangle\}.$$

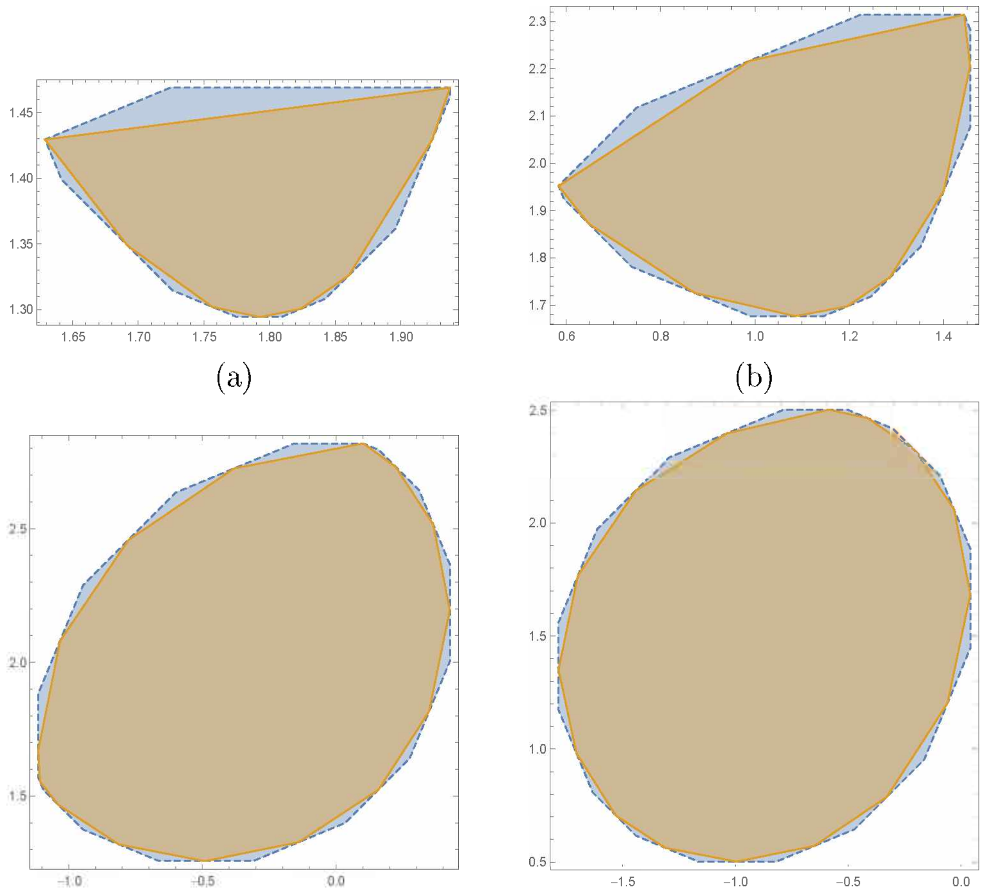
При этом расстояние по Хаусдорфу между множеством достижимости $Z(t, z^0)$ и его аппроксимациями стремится к нулю вместе с мелкостью Δ [4, с. 234]:

$$h(Z(t, z^0), Z^*(t, z^0)) \leqslant 2\|Z(t, z^0)\|\Delta. \tag{12}$$

Здесь $\|L\| = \max\limits_{\ell \in L} \|\ell\|$ — полунорма компакта L.

Пример. Пусть $k = 2$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$ — параболический сегмент, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица поворота на $\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат, $C = \{(\cos(i\pi/8)), \sin(i\pi/8), i = 0, \ldots, 15\}$ — сетка мелкости $\Delta = 2\sin(\pi/16) \approx 0.39$, $T = 2$ — конечный момент времени, $z^0 = (2, 1)$. Тогда

$$\begin{gathered} Z_*(T, z^0) = \mathrm{co}\{(0.040, 1.684), (-0.032, 2.060), (-0.207, 2.325), (-0.414, 2.465), \\ (-0.585, 2.502), (-1.038, 2.398), (-1.440, 2.144), (-1.697, 1.766), \\ (-1.782, 1.351), (-1.703, 0.982), (-1.528, 0.705), (-1.310, 0.563), \\ (-0.995, 0.502), (-0.650, 0.572), (-0.329, 0.789), (-0.061, 1.203)\}, \end{gathered}$$



(a) (b)

(c) (d)

Рис. 1. Внешняя (пунктирная граница) и внутренняя (сплошная граница) оценки множества достижимости при (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.2$; (c) $t = 1$; (d) $t = 2$

$$
\begin{gathered}
Z^*(T, z^0) = \mathrm{co}\{(0.040, 1.886), (-0.095, 2.214), (-0.300, 2.418), (-0.503, 2.502),\\
(-0.786, 2.502), (-1.291, 2.293), (-1.612, 1.972), (-1.782, 1.561),\\
(-1.782, 1.173), (-1.631, 0.808), (-1.440, 0.617), (-1.163, 0.502),\\
(-0.819, 0.502), (-0.472, 0.646), (-0.164, 0.954), (0.040, 1.447))\}.
\end{gathered}
$$

Расстояние между $Z_*(T, z^0)$ и $Z^*(T, z^0)$ составило 0.049, что существенно меньше консервативной оценки (12), равной в этом случае 2.053. Расчеты проводились в облачных средах Wolfram Cloud (https://www.wolframcloud.com/, использовалась встроенная функция

MittagLefflerE) и MATLAB Online (https://matlab.mathworks.com/, использовался m-файл для вычисления матричных функций Миттаг – Леффлера, автор — Roberto Garrappa [5]). Динамика изменения формы множества достижимости представлена на рис. 1, при малых значениях t множество достижимости сохраняет особенности формы ограничивающего компакта Q, при дальнейшем увеличении t происходит «сглаживание особенностей».

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00293.

Список литературы

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.

2. **Чикрий А. А., Матичин И. И.** О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // *Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 256–270.*

3. **Matychyn I., Onyshchenko V.** On time-optimal control of fractional-order systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 339. Pp. 245–257.*

4. **Половинкин Е. С., Балашов М. В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 416 с.

5. **Garrappa R., Popolizio M.** Computing the matrix Mittag–Leffler function with applications to fractional calculus // *Journal of Scientific Computing. 2018. Vol. 17, no. 1. Pp. 129–153.*

Summary

Bannikov A. S. To construction of the reachability set for a fractional-order linear control system

A description of the reachability set in space by a phase change is given. An extremal control is constructed that transfers the initial position to the boundary of the reachability set as a solution to the corresponding optimal speed problem. Numerical examples are given. When conducting

the numerical experiment, programs in MATLAB and Wolfram Language were used.

Keywords: Caputo derivative, control system, reachability set.

References

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006, 540 p.

2. **Chikrii A. A., Matichin I. I.** On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], 2011, Vol. 17, no. 2, pp. 256–270.

3. **Matychyn I., Onyshchenko V.** On time-optimal control of fractional-order systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, Vol. 339, pp. 245–257.

4. **Polovinkin E. S., Balashov M. V.** *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis], Moscow: FIZMATLIT, 2004, 416 p.

5. **Garrappa R., Popolizio M.** Computing the matrix Mittag–Leffler function with applications to fractional calculus, *Journal of Scientific Computing*, 2018, Vol. 17, no. 1, pp. 129–153.

Для цитирования: Банников А. С. К построению множества достижимости линейной системы дробного порядка // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 20–26. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_20*

For citation: Bannikov A. S. To construction of the reachability set for a fractional-order linear control system, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 20–26. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_20

Удмуртский государственный университет *Поступила 17.05.2021*