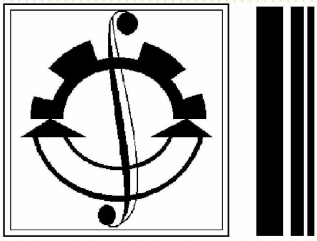


ISSN 1992-2752



Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:

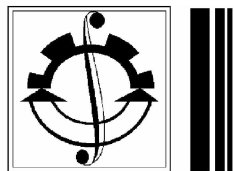
Математика
Механика
Информатика

*Памяти
Н.К. Поповой*

2(39) ВЫПУСК **21**

ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета



Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

Памяти
Н. К. Поповой



2(39) ВЫПУСК **21**

ВЕСТНИК СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	СЕРИЯ 1: <i>Математика</i> <i>Механика</i> <i>Информатика</i>	12+ ISSN 1992-2752 ВЫПУСК 2 (39) 2021
--	--	--

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2021. — Выпуск 2 (39). 2021. — 96 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук».

Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям:

01.00.00 — Физико-математические науки; 05.13.00 — Информатика, вычислительная техника и управление; 13.00.02 — Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)

(См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into «the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree» on the following scientific specialities: 01.00.00 — Physical and mathematical Sciences; 05.13.00 — computer Science, computer engineering and management; 13.00.02 — Theory and methods of teaching and education (by areas and levels of education) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

АДРЕС РЕДАКЦИИ

ВЕСТНИКА СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.

Электронный адрес: <http://vestnik-mmi.syktu.ru/>

Свободная цена

© ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2021.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

Сотникова О.А., д.п.н., ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР:

Ермоленко А.В., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Асланов Р.М., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан),

Беляева Н.А., д.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),

Головач П.А., к.ф.-м.н., доцент (Университет Бергена, Норвегия),

Калинин С.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),

Колпак Е.П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),

Котов Л.Н., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Малоземов В.Н., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),

Одинец В.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Певный А.Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Петраков А.П., д.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Петров Н.Н., д.ф.-м.н., профессор (УдмГУ),

Попов Н.И., д.п.н., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Рудикова Л.В., к.ф.-м.н., доцент (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь),

Тихомиров А.Н., д.ф.-м.н., профессор (Коми НЦ УрО РАН),

Черных В.В., д.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕДАКЦИЯ:

Гудырева Л.В., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Котелина Н.О., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Хозяинов С.А., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Юркина М.Н. (СГУ им. Питирима Сорокина)

Содержание

Информатика

- Голенев И. И., Ермоленко А. В. *Проектирование нейронной сети для распознавания рукописных кириллических символов* 4
- Ермоленко А. В., Кораблев А. Ю., Котелина Н. К., Юркина М. Н. *Н. К. Попова и ее вклад в развитие спортивного программирования* 13

Математика

- Банников А. С. *К построению множества достижимости линейной системы дробного порядка* 20
- Рогозин С. В., Примачук Л. П., Дубатовская М. В. *О решении задачи R-линейного сопряжения с рациональными коэффициентами* 27

Прикладная математика и механика

- Шилов С. В. *Моделирование взрывов газоздушных смесей с учетом сноса облака ветром* 44

Методические материалы

- Губарь Л. Н., Попов Н. И. *Реализация технологии гарантированного обучения при изучении студентами курса теории вероятностей и математической статистики* 58

Наставник-ученик

- Певный А. Б., Кожажельдиев Н. В. *Новые уравнения для резервуара равного сопротивления* 78
- Попов Н. И., Арихин Э. М., Ермоленко И. А. *Использование электронного курса при изучении студентами основ математического анализа* 85

Персоналии

90

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ РУКОПИСНЫХ КИРИЛЛИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

И. И. Голенев, А. В. Ермоленко

В данной работе подробно описывается моделирование сверточной нейронной сети (CNN). Модель разрабатывалась на языке Python 3.8 с использованием библиотек TensorFlow и Keras.

Ключевые слова: сверточные нейронные сети, распознавание символов, глубокое обучение.

1. Введение

Распознавание образов, в том числе рукописных символов, является актуальной задачей, которая регулярно возникает в разных областях деятельности человека. Одна из наиболее часто встречающихся задач распознавания образов — *распознавание рукописных символов*. Для решения таких задач часто применяют искусственные нейронные сети (ИНС).

Задача *распознавания* кириллических букв *сложнее*, чем, например, распознавание латинских букв. Это связано с большим количеством классов (количеством букв), а также большим количеством похожих символов: «Ь» - «ъ» - «ч»; «д» - «з» - «у»; «к» - «н» и другие.

В качестве входных данных взяты 14,2 тыс. изображений символов. Соотношение тренировочной, валидационной и тестовой выборок равны соответственно 80 %, 10 %, 10 % [1].

2. Постановка задачи

Задачу распознавания сигналов или образов (речевых или зрительных) можно свести к следующей математической постановке:

$$X \rightarrow Y,$$

где X — вектор входных сигналов; Y — выходной результат. Решить такую задачу — значит найти *функциональное отображение*, при котором для любого вектора X будет сформирован правильный результат Y .

Функциональное отображение задается множеством пар «вход» — «выход», или, иными словами, *обучающей выборкой*.

Так, например, при решении задач распознавания рукописного символа вектор X будет представлен в виде *формализованного множества*, а Y может быть представлен в виде *вероятностного вектора*, содержащего порядковый номер класса символа и *вероятность принадлежности* входного символа каждому из классов.

Таким образом, требуется провести обучение ИНС для настройки *коэффициентов весов* — связей между нейронами. Настройка весов проводится таким образом, при котором в отображении $X \rightarrow Y$ *минимизируется ошибка* обучения для каждого элемента обучающей выборки.

3. Входные данные. Предобработка данных

Для решения задачи распознавания образов, как правило, обрабатывают *нормализованные растры* изображений. В нашем случае образом является изображение рукописного символа (буквы) размером 32×32 пикселей, которые в дальнейшем конвертируются в 3d массив. Общее число пикселей внутри одного изображения $32 \times 32 = 1024$. Каждое значение цвета находится в диапазоне $[0, 255]$. Для нормализации изображения необходимо значение цвета каждого пиксела представить в виде типа данных float, после чего разделить это значение на 255. Так мы получим данные в диапазоне $[0, 1.0]$, на которых CNN сходится быстрее [1].

Также используется *унитарное кодирование* [1], после которого изображения в обучающей выборке либо принадлежат определенному классу, либо не принадлежат: не должно быть промежуточного значения.

Для того чтобы избежать *переобучения* (overfitting) используется *dropout* — случайное исключение нейронов из обучения и *генерация новых* изображений. Генерация основывается на обучающей выборке,

применяют к ней такие манипуляции, как повороты, сдвиги и т. п. Генерация реализуется с помощью класса *keras.preprocessing.image.DataGenerator* [2].

Перед тем как начать строить модель, необходимо убедиться в том, что входные данные *сбалансированы* в обучающей выборке. Если классы в обучающей выборке несбалансированы, модель будет максимизировать точность «наибольших» классов, игнорируя другие классы, что неизбежно приведет к менее точным прогнозам на «меньших» классах.

Классы в нашем наборе данных *идеально сбалансированы*, каждому классу принадлежит 430 изображений.

4. Выходные данные

В качестве выходных данных CNN возвращает вероятностный вектор Y , содержащий порядковый номер класса символа и *вероятность принадлежности* входного символа каждому из классов. Всего классов 33 (количество букв). Пример: А — 0,5 %; Б — 3 %; В — 95 %; ... ; Я — 0,00001 %.

5. Построение модели CNN

Первый слой нашей CNN — *сверточный* (Conv2D). Он формирует «карту признаков», необходимую для понимания различных частей изображения. Количество каналов (фильтров) 32, а размер фильтров 5×5 . Такой размер фильтра на первом сверточном слое позволит «запомнить» больше признаков изображения, нежели часто используемый фильтр 3×3 . Число фильтров принято увеличивать с последующими слоями. В нашей модели используется двойная свертка (два сверточных слоя подряд).

В качестве функции активации используется ReLu, поскольку при построении глубоких обучающих сетей с большим количеством слоев *сигмоидальные* функции активации будут быстро «застаиваться» [3]. Это связано с тем, что максимальное значение производной сигмоидальной функции примерно равно 0,25. Следовательно, после большого числа слоев, произведения чисел меньше 1 на градиент устремляются к нулю.

После активации данные проходят через объединяющий слой (MaxPooling2D). Объединение *сжимает информацию*, которую предоставляют предыдущие слои. Процесс объединения позволяет лучше распознавать объекты и делает сеть более гибкой [1]. Слой объединения

содержит фильтр 2×2 , что позволяет отсеять $3/4$ информации. Важно, чтобы в модели не было много объединяющих слоев, в противном случае можно потерять важные данные о распознаваемом объекте.

После строится исключаящий слой (Dropout) [3; 4]. Эксперимент показал, что для распознавания рукописных кириллических символов оптимальным значением dropout'a является 0,2.

После нескольких циклов сверток, объединений и dropout'ов нужно сжать данные и передавать их полносвязным слоям. Для этого используется функция Flatten, которая подает на выход вектор с 4096 значениями.

Следующий слой (Dense) будем называть *слоем образов букв*. Будем считать, что в идеализированном случае каждый нейрон из слоя Dense соотносится с одним из компонентов на рис. 1. Тогда, после передачи изображения с определенным признаком буквы, существует определенный нейрон, чья активация станет ближе к единице. Будем считать, что таких признаков около 256.

В конце используется функция активации softmax, которая выбирает нейрон с наибольшей вероятностью, полагая, что входное изображение принадлежит этому классу.



Рис. 1. Признаки символа

6. Обучение

В настройке *модели обучения* можно выделить три важных понятия:

- функция потерь (ошибка обучения);
- градиентный спуск;
- обратное распространение.

Функция потерь дает оценку прогнозам нашей модели. Ее можно формализовать следующим образом: $\text{Loss} = F$ (фактическое значение, предсказанное значение). Нейросеть *минимизирует потери*, т. е. улучшает прогноз, приближая его к фактическому значению. Значение

```
Model: "sequential"
```

Layer (type)	Output Shape	Param #
conv2d (Conv2D)	(None, 32, 32, 32)	2432
conv2d_1 (Conv2D)	(None, 32, 32, 32)	25632
max_pooling2d (MaxPooling2D)	(None, 16, 16, 32)	0
dropout (Dropout)	(None, 16, 16, 32)	0
conv2d_2 (Conv2D)	(None, 16, 16, 64)	18496
conv2d_3 (Conv2D)	(None, 16, 16, 64)	36928
max_pooling2d_1 (MaxPooling2D)	(None, 8, 8, 64)	0
dropout_1 (Dropout)	(None, 8, 8, 64)	0
Flatten (Flatten)	(None, 4096)	0
dense (Dense)	(None, 256)	1048832
dropout_2 (Dropout)	(None, 256)	0
dense_1 (Dense)	(None, 33)	8481

Рис. 2. Модель CNN

функции потерь изменяется *при изменении весов* сети. Так как решается задача мультиклассовой классификации (> 2 классов), используется функция `categorical_crossentropy`.

Модель ведет поиск лучших весов с помощью *градиентного спуска*. Чтобы сделать «один шаг» по методу градиентного спуска (одно изменение весов), необходимо [5]:

- 1) подать на вход весь обучающий набор данных,
- 2) вычислить ошибку для каждого объекта,
- 3) вычислить необходимую коррекцию,
- 4) после подачи всех данных рассчитать сумму градиентов,
- 5) провести коррекцию весов.

Величина изменения весов определяется *скоростью обучения*.

Важной функцией на этапе обучения является *оптимизатор*. Данная функция итеративно улучшает параметры (значения сверточных фильтров, веса, смещения нейронов, ...), чтобы минимизировать функцию потерь (ошибку). В работе была выбрана *RMSProp* (*root mean*

square propagation), так как это очень эффективная функция оптимизации [1; 6]. Можно было использовать оптимизатор стохастического градиентного спуска `sgd`, но он сходится медленнее, чем `RMSProp`.

В качестве метрики (оценки производительности модели) используется *accuracy* (точность), так как входные данные идеально сбалансированы [3; 4].

7. Вывод

Построенная последовательная модель `Sequential()` из `Keras` [2] (рис. 2, 3) обладает следующими характеристиками: Train: 0,997, Valid: 0,971, Test: 0,970, где Train — точность на тренировочной выборке, Valid — точность на валидационной выборке и Test — точность на тестовой выборке. В некоммерческих проектах точность определения символов не превышает 96 % [7; 8].

1. ИНС имеет высокий процент точности (ассигасу) на идеально сбалансированных данных.
2. Сеть не переобучена, что видно на графике (рис. 3) и подтверждено собственными тестами.
3. Подтвердилось предположение, что похожие символы («д» — «з» — «у») трудно распознаются. В тестовом предложении из 15 букв верно распознано 13. Неправильно распознаны буквы «у» и «к».

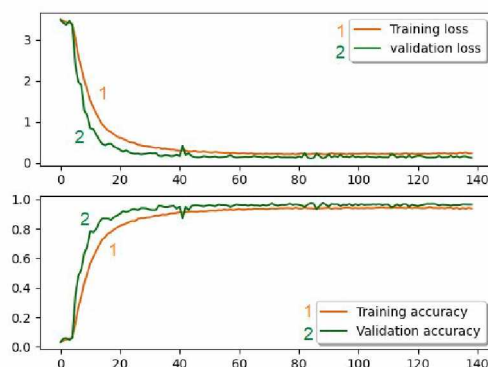


Рис. 3. Точность модели

Список литературы

1. Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвилль А. Глубокое обучение / пер. с англ. А. А. Слинкина. М.: ДМК Пресс, 2018. 652 с.
2. Keras: the Python deep learning API [Electronic resource] // Keras official site. URL: <https://keras.io> (дата обращения: 28.04.2021).
3. Глубокое обучение для новичков: тонкая настройка нейронной сети [Электронный ресурс] // Блог компании Wunder Fund, алгоритмы, машинное обучение. URL: <https://habr.com/ru/company/wunderfund/blog/315476/> (дата обращения: 05.05.2021).
4. Бабенко В. В., Котелина Н. О., Тельнова О. П. Программно-информационное обеспечение палеопалинологической задачи // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1 (38). С. 26–40.*
5. Градиентный спуск [Электронный ресурс] // Свободная энциклопедия Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Градиентный_спуск (дата обращения: 17.05.2021).
6. Методы оптимизации нейронных сетей [Электронный ресурс] // @Siarshai. URL: <https://habr.com/ru/post/318970/> (дата обращения: 15.05.2021).
7. Валеев Д. И. Разработка системы обработки математических рукописных формул с применением нейросетевых технологий // ВКР. Челябинск, 2018. 43 с.
8. Кулакова О. А., Воронова Л. И. Распознавание рукописных букв с помощью нейронных сетей // *Материалы IX Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум»*. URL: <https://scienceforum.ru/2017/article/2017033009> (дата обращения: 10.05.2021).

Summary

Golenev I. I., Yermolenko A. V. Designing a neural network for recognizing handwritten cyrillic symbols

This paper deals with the modeling of a convolutional neural network (CNN). The model was developed in Python 3.8 using the TensorFlow and Keras.

Keywords: convolutional neural networks, character recognition, deep learning.

References

1. **Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.** *Glubokoe obuchenie* [Deep learning] / transl. A. A. Slinkina, M.: DMK Press, 2018, 652 p.
2. Keras: the Python deep learning API [Electronic resource] / Keras official site. Available at: <https://keras.io> (Accessed: 28.04.2021).
3. Deep learning: image recognition with convolutional neural networks [Electronic resource] / *Blog kompanii Wunder Fund, algoritmy, mashinnoe obuchenie* [Wunder Fund company blog, Algorithms, machine learning]. Available at: <https://habr.com/ru/company/wunderfund/blog/314872/> (Accessed: 05.05.2021).
4. **Babenko V. V., Kotelina N. O., Telnova O. P.** Software and information support of the paleopalynological problem, *Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2021, 1 (38), pp. 26-40.
5. Gradient descent [Electronic resource] / *Svobodnaya enciklopediya Vikipediya* [Wikipedia The Free Encyclopedia]. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_descent (Accessed: 17.05.2021).
6. Neural network optimization methods [Electronic resource] / @Siarshai. Available at: <https://habr.com/ru/post/318970/> (Accessed: 15.05.2021).
7. **Valeev D. I.** Development of a system for processing mathematical handwritten formulas with using neural network technologies, *VKR*, Chelyabinsk, 2018, 43 p.

8. **Kulakova O. A., Voronova L. I.** Handwritten letters recognition using neural network, *Materialy IX Mezhdunarodnoj studencheskoj nauchnoj konferencii «Studencheskij nauchnyj forum»* [Materials of the IX International Student Scientific Conference «Student Scientific Forum»]. Available at: [https:// scienceforum.ru/2017/article/2017033009](https://scienceforum.ru/2017/article/2017033009) (Accessed: 10.05.2021).

Для цитирования: Голенев И. И., Ермоленко А. В. Проектирование нейронной сети для распознавания рукописных кириллических символов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 4–12. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_04*

For citation: Golenev I. I., Yermolenko A. V. Designing a neural network for recognizing handwritten cyrillic symbols, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 4–12. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_04

ИНФОРМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (39). 2021*

УДК 004.42:378.18

DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_13

Н. К. ПОПОВА И ЕЕ ВКЛАД В РАЗВИТИЕ СПОРТИВНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*А. В. Ермоленко, А. Ю. Кораблев, Н. К. Котелина,
М. Н. Юркина*

Статья посвящена доценту кафедры прикладной математики Н. К. Поповой, более 40 лет проработавшей в Сыктывкарском государственном университете.

Ключевые слова: спортивное программирование, педагогическая деятельность, биография, Н. К. Попова.

Образование. Попова Нина Константиновна (1951–2021) родилась в семье учителя начальных классов и военного, после окончания школы в 1968 году поступила в Мордовский государственный университет, в 1971 году перевелась на специальность «Прикладная математика» факультета прикладной математики — процессов управления Ленинградского университета, который закончила с отличием в 1974 году.

После окончания аспирантуры Ленинградского университета (1974–1977) начала работать в Сыктывкарском университете, где занимала преподавательские должности — ассистент, старший преподаватель, доцент. Диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук «Исследование некоторых модификаций метода Келли и метода экстремального базиса в задачах негладкой оптимизации» защитила в Ленинграде в 1983 году, звание доцента получила в 1992 году.

Педагогическая деятельность. Преподавала Нина Константиновна дисциплины, связанные в основном с языками программирования. Ей пришлось пройти долгий путь вместе с развитием вычислительной техники в СГУ. В 1977 году в СГУ были только ЭВМ «Мир-1»



и «Наири». Необходимо было изучать трансляторы ТАМ-22 и МЭИ-3 с языка АЛГОЛ на «Наири». Программы вводились с перфокарт. Чуть позже появилась ЭВМ «Мера-60», где был Паскаль, а программа набивалась на перфоленте. Наконец из Горьковского университета привезли большую ЭВМ ЕС-1050, где самым популярным языком был Фортран. В одно время надежды возлагались на PL/1. Все это Нина Константиновна изучала и преподавала.

Потом появились первые персональные компьютеры «Электроника ДЗ-28» с Бейсиком и ДВК, которые позволяли набирать программу прямо с клавиатуры безо всяких перфокарт и перфолент. Потом появились ПК с Windows. Стали преподавать Паскаль и Delphi. Последние 10 лет Нина Константиновна перешла на преподавание C++, у нее выработалась своя методика преподавания языка. Каждый год Нина Константиновна обучала более 25 студентов, за 43 года набралось свыше тысячи. Для многих студентов программирование стало специальностью на всю жизнь.

По воспоминаниям выпускников благодаря Нине Константиновне

«картина мира» в сфере программирования становилась яснее и четче, ей удавалось с необыкновенной легкостью объяснять ученикам достаточно сложный материал. Она как преподаватель делала всё, чтобы дать студенту возможность раскрыться самостоятельно и почувствовать себя экспертом в своем деле. Такое профессиональное доверие преподавателя к студенту встречается крайне редко. Ее авторская методика преподавания алгоритмического программирования нашла свое отражение в изданных ею методических пособиях, например [1–2]. Коллеги отмечают, что Нина Константиновна была профессионалом высочайшего класса, трудно переоценить ее помощь при подготовке учебных программ дисциплин, связанных с программированием. Она великолепно умела выстроить стратегию обучения студентов, распланировать до мелочей учебный процесс. Для нее были характерны умение четко ставить цели и задачи при изучении темы, занятия проходили живо и динамично. Следует отметить, что она непрерывно совершенствовала методику преподавания, никогда не останавливаясь на достигнутом.

Развитие спортивного программирования. Спортивное программирование является отличным способом отбора лучших кадров для ИТ-компаний региона. Сыктывкарский университет участвует в мировом олимпиадном движении по программированию начиная с 1999 года, когда команда в составе студентов кафедры прикладной математики заняла 9 место в четвертьфинале (г. Екатеринбург) и была участницей полуфинала командного чемпионата мира по программированию (г. С-Петербург), где вошла в число квалифицированных команд, заняв 38-е место из 88 команд [3–4]. В последующем кафедрой был организован и ежегодно проводится внутривузовский чемпионат по программированию. Наивысшее достижение наших студентов – это диплом третьей степени на полуфинале 2004 года.

С первого года существования Открытого чемпионата Сыктывкарского университета по программированию Нина Константиновна участвовала в его организации и проведении. Ежегодно для чемпионата готовились 2–3 комплекта задач. Каждый год в личных и командных турах чемпионата принимают участие десятки студентов и школьников. Чемпионат стал заметным явлением в Сыктывкаре, собирая вокруг себя студентов и школьников. Н. К. Попова совместно с В. Л. Никитенковым, В. Е. Езовских и авторами данной статьи многие годы координировала и направляла работу студентов и аспирантов по орга-

низации участия студентов в конкурсах инновационных, научных, социальных и творческих проектов. Ежегодно 4–9 команд, подготовленных Н. К. Поповой, участвовали в квалификационном туре студенческого четвертьфинала мира по программированию (известном также как международная студенческая олимпиада по программированию). Результаты этой деятельности освещались в личном блоге Нины Константиновны <http://nkrorova.blogspot.ru>, на Всероссийском конкурсе интернет-проектов образовательного пространства «Педагогика 21 века» 2018 года этот блог получил диплом победителя в разделе Персональный сайт-блог.

Нина Константиновна была основным популяризатором спортивного программирования, заинтересовывала студентов сложными алгоритмическими задачами, являлась инициатором введения дисциплины «Спортивное программирование» для студентов направления «Прикладная математика и информатика», привлекала коллег и бывших студентов к работе в жюри и составлению заданий.

Подготовка школьников. Большую роль сыграла Нина Константиновна и в подготовке школьников. Она много лет вела информатику в Коми республиканском физико-математическом лицее-интернате. Ее ученики активно участвовали во всевозможных олимпиадах и соревнованиях по программированию на всех уровнях от внутрилицейского до всероссийского. В лицее за учебный год обычно проводилось не менее трех соревнований по программированию и отборочная олимпиада по информатике на региональный этап всероссийской олимпиады школьников. Ученики Н. К. Поповой регулярно участвовали во Всероссийском конкурсе по информатике КИТ и становились победителями и призерами на республиканском и всероссийском уровне, принимали самое активное участие в Открытом чемпионате СГУ, а также успешно участвовали во Всероссийской командной олимпиаде школьников по программированию (ВКОШП) и Всероссийской олимпиаде школьников по программированию (ВсОШ), достигая уровня призеров и победителей.

С введением ЕГЭ ученики Нины Константиновны неизменно показывали высокие результаты на ЕГЭ по информатике. Так первый 100-балльник по информатике в Республике Коми — ее ученик.

С 80-х годов Н. К. Попова была председателем жюри Республиканской олимпиады школьников по информатике (регионального этапа

Всероссийской олимпиады школьников). Н. К. Попова являлась председателем комиссии ГИА по информатике в ГАОУ СПО «Сыктывкарский гуманитарно-педагогический колледж имени И. А. Куратова». В годы внедрения ЕГЭ по информатике в Республике Коми Н. К. Попова была председателем экспертной комиссии ЕГЭ по информатике, проводила учебные семинары для членов комиссии, готовила методические рекомендации для учителей по подготовке учеников к ЕГЭ.

Награды. За свою педагогическую деятельность Нина Константиновна получила следующие награды:

1. Почетная грамота Министерства народного образования Коми ССР (1992).
2. Почетная грамота Министерства образования Российской Федерации (2001).
3. Благодарственное письмо Министерства образования Республики Коми (2010, 2011).
4. Почетное звание «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» (2014).
5. Звание Республики Коми «Почетный работник образования Республики Коми» (2020).

Хобби. Нина Константиновна была необыкновенно творческим человеком, увлекалась цветоводством и рисованием, писала картины акварелью — пейзажи, натюрморты, иллюстрации к любимым произведениям. По воспоминаниям коллег она прекрасно разбиралась в цветах, часто делилась своими фотоальбомами, где были снимки ее дачных сюжетов. Ее работы были необыкновенно гармоничными, жизнеутверждающими и талантливыми.

Трудно оценить масштаб того вклада, который внесла Нина Константиновна в подготовку будущих программистов. Сейчас выпускники, к воспитанию которых приложила руку Н. К. Попова, работают не только в ведущих ИТ-компаниях России, но и во многих странах мира.

Список литературы

1. **Попова Н. К.** Алгоритмы и алгоритмические языки [Электронный ресурс] : курс лекций. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. 88 с. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).
2. **Попова Н. К.** Моделирование приложений [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. 43 с. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).
3. **Котелина Н. О., Попова Н. К., Юркина М. Н.** Об открытом чемпионате СГУ по программированию // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3 (28). С. 3–18.*
4. **Котелина Н. О., Попова Н. К.** Организация соревнований по программированию на платформе ЯНДЕКС.КОНТЕСТ // *Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : сборник научных статей I Всероссийской научной конференции: 12–14 декабря 2017 г. : 2 ч. Тольятти: Издатель Качалин Александр Васильевич, 2017. Ч. 2. С. 373–377.*

Summary

Yermolenko A. V., Korablev A. Yu., Kotelina N. K., Yurkina M. N. N. K. Popova and her contribution to the development of competitive programming

The article is devoted to the biography of the associate professor of the Department of Applied Mathematics N. K. Popova, who has worked at Syktyvkar State University for more than 40 years.

Keywords: competitive programming, teaching, biography.

References

1. **Popova N. K.** *Algoritmy i algoritmicheskiye yazyki* [Algorithms and algorithmic languages], Syktyvkar: SSU im. Pitirim Sorokina, 2017, 88 p.
2. **Popova N. K.** *Modelirovaniye prilozheniy* [Modeling applications], Syktyvkar: SSU im. Pitirim Sorokin, 2019, 43 p.

3. **Kotelina N. O., Popova N. K., Yurkina M. N.** About the SSU open programming championship, *Vestnik Syktyvkarского университета. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Ser. 1: Mathematics. Mechanics. Computer science], 2018, Issue 3 (28), pp. 3–18.
4. **Kotelina N. O., Popova N. K.** Organization of programming competitions on the YANDEX.CONTEST platform, *Informacionnye tekhnologii v modelirovanii i upravlenii: podhody, metody, resheniya : sbornik nauchnykh statej I Vserossijskoj nauchnoj konferencii* [Information technologies in modeling and control: approaches, methods, solutions: Collection of scientific articles of the I All-Russian Scientific Conference], December 12-14, 2017, Togliatti: Publisher Kachalin Alexander Vasilievich, 2017, pp. 373–377.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Кораблев А. Ю., Котелина Н. К., Юркина М. Н. Н. К. Попова и ее вклад в развитие спортивного программирования // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 13–19. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_13*

For citation: Yermolenko A. V., Korablev A. Yu., Kotelina N. K., Yurkina M. N. N. K. Popova and her contribution to the development of sports programming, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 13–19. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_13

К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. С. Банников

Дается описание множества достижимости в пространстве фазовой переменной. Построено экстремальное управление, переводящее начальное положение на границу множества достижимости, как решение соответствующей задачи оптимального быстрогодействия. Приведены численные примеры. При проведении численного эксперимента использовались программы на языках MATLAB и Wolfram Language.

Ключевые слова: производная Капуто, управляемая система, множество достижимости.

Определение 1 (см. [1, с. 97]). Пусть $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция и $\alpha \in (0, 1)$. Левосторонней производной по Капуто порядка α функции f назовём функцию ${}^C D_{0+}^\alpha$ вида

$$({}^C D_{0+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} ds, \quad t \geq 0.$$

Правосторонней производной Римана – Лиувилля порядка α функции f назовём функцию ${}^{RL} D_{T-}^\alpha$ вида

$$({}^{RL} D_{T-}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} ds, \quad t \leq T.$$

В пространстве \mathbb{R}^k ($k \geq 2$) рассматривается линейная стационарная управляемая система дробного порядка, которая имеет вид

$$({}^C D_{0+}^\alpha z)(t) = Az(t) + u(t), \quad z(0) = z^0, \quad u \in Q. \quad (1)$$

Здесь $\alpha \in (0, 1)$, $z, u \in \mathbb{R}^k$, A — квадратная матрица размера $k \times k$, Q — выпуклый компакт в \mathbb{R}^k . При выбранном допустимом (измеримом по Лебегу) управлении $u(t) \in Q$, $t \in [0, T]$, траектория решения задачи Коши (1) описывается формулой (см., например [2, (2.6)])

$$z(t) = E_\alpha(At^\alpha)z^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)u(s) ds \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Здесь $E_{\alpha,\beta}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ — матричная функция Миттаг-Леффлера двух параметров α, β , $E_\alpha(B) = E_{\alpha,1}(B)$.

Обозначим через $Q[0, t]$ множество всех измеримых на $[0, t]$ функций, принимающих значение в выпуклом компакте Q . Рассмотрим множество достижимости

$$\begin{aligned} Z(t, z^0) &= \\ &= \left\{ E_\alpha(At^\alpha)z^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)u(s) ds : u(\cdot) \in Q[0, t] \right\} = \\ &= E_\alpha(At^\alpha)z^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)Q ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как Q — ограниченное множество, то $Z(t, z^0)$ — выпуклый компакт [3]. Рассмотрим опорную функцию множества достижимости (3):

$$\begin{aligned} \text{supp}(Z(t, z^0); \psi) &= \sup_{z \in Z(t, z^0)} \langle z, \psi \rangle = \sup_{u(\cdot) \in Q[0, t]} \left\{ \langle E_\alpha(At^\alpha)z^0, \psi \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)u(s), \psi \rangle ds \right\} = \\ &= \langle E_\alpha(At^\alpha)z^0, \psi \rangle + \int_0^t \text{supp}(Q, (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A^*(t-s)^\alpha)\psi) ds = \\ &= \langle E_\alpha(At^\alpha)z^0, \psi \rangle + \int_0^t \text{supp}(Q, \widehat{\psi}(t, s)) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция $\widehat{\psi}(t, s)$ является решением сопряженной к (1) системы

$$({}^{RL}D_{t-}^{\alpha} z)(s) = A^* z(s), \quad (5)$$

$$J_{t-}^{1-\alpha} z|_{s=t} = \lim_{s \rightarrow t-0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^t \frac{z(\tau)}{(\tau-s)^{\alpha}} d\tau = \psi. \quad (6)$$

Зададим управление $\widehat{u}(t, s) \in Q$ следующим равенством:

$$\widehat{u}(t, s): \langle \widehat{u}(t, s), \widehat{\psi}(t, s) \rangle = \text{supp}(Q, \widehat{\psi}(t, s)), \quad s \in [0, t]. \quad (7)$$

Подставим в (2):

$$\widehat{z}(t, \psi) = E_{\alpha}(At^{\alpha})z^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t-s)^{\alpha}) \widehat{u}(t, s) ds. \quad (8)$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\widehat{z}(t, \psi)$ и ψ :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{z}(t, \psi), \psi \rangle &= \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^0, \psi \rangle + \\ &+ \langle \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t-s)^{\alpha}) \widehat{u}(t, s) ds, \psi \rangle = \\ &= \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^0, \psi \rangle + \int_0^t \langle (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(A(t-s)^{\alpha}) \widehat{u}(t, s), \psi \rangle ds = \\ &= \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^0, \psi \rangle + \int_0^t \langle \widehat{u}(t, s), \widehat{\psi}(t, s) \rangle ds = \\ &= \langle E_{\alpha}(At^{\alpha})z^0, \psi \rangle + \int_0^t \text{supp}(Q, \widehat{\psi}(t, s)) ds = \text{supp}(Z(t, z^0), \psi). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, для всякого опорного вектора ψ к множеству $Z(t, z^0)$ управление $\widehat{u}(t, s)$ переводит траекторию (2) из начального положения z^0 в точку на границе множества достижимости $Z(t, z^0)$ из опорного множества, определенного вектором ψ .

Определение 2 ([4, гл. 2, § 2.6]). *Сеткой C мелкости $\Delta \in (0, 1)$ называется такой конечный набор векторов $p_i \in \mathbb{R}^k$, $i \in \{1, \dots, I\}$, из единичной сферы (т. е. $\|p_i\| = 1$), что для любого вектора $p \neq 0$, такого, что $p/\|p\| \notin C$, существуют подмножество индексов $I_p \subset \{1, \dots, I\}$ и числа $\mu_i > 0$, $i \in I_p$, такие, что*

$$\|p_i - p_j\| < \Delta \quad \forall i, j \in I_p, \text{ где } p_i, p_j \in C, \quad (10)$$

$$p = \sum_{i \in I_p} \mu_i p_i, \quad p_i \in C. \quad (11)$$

Зададимся произвольной сеткой C мелкости Δ , и для каждого вектора $\psi_i \in C$ этой сетки построим экстремальное управление $\hat{u}(t, s, \psi_i)$ и соответствующую этому управлению граничную точку $z_i = \hat{z}(t, \psi_i)$, $i \in \{1, \dots, I\}$. Тем самым можно определить две выпуклые многогранные аппроксимации множества достижимости $Z(t, z^0)$:

- 1) внутреннюю аппроксимацию $Z_*(t, z^0) \subset Z(t, z^0)$, где

$$Z_*(t, z^0) = \text{co}\{z_i\}_{i=1}^I;$$

- 2) внешнюю аппроксимацию $Z^*(t, z^0) \supset Z(t, z^0)$, где

$$Z^*(t, z^0) = \bigcap_{i=1}^I \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle x, \psi_i \rangle \leq \text{supp}(Z(t, z^0), \psi_i) = \langle z_i, \psi_i \rangle\}.$$

При этом расстояние по Хаусдорфу между множеством достижимости $Z(t, z^0)$ и его аппроксимациями стремится к нулю вместе с мелкостью Δ [4, с. 234]:

$$h(Z(t, z^0), Z^*(t, z^0)) \leq 2\|Z(t, z^0)\|\Delta. \quad (12)$$

Здесь $\|L\| = \max_{\ell \in L} \|\ell\|$ — полунорма компакта L .

Пример. Пусть $k = 2$, $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1\}$ — параболический сегмент, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица поворота на $\frac{\pi}{2}$ вокруг начала координат, $C = \{(\cos(i\pi/8), \sin(i\pi/8)), i = 0, \dots, 15\}$ — сетка мелкости $\Delta = 2 \sin(\pi/16) \approx 0.39$, $T = 2$ — конечный момент времени, $z^0 = (2, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} Z_*(T, z^0) = \text{co}\{ & (0.040, 1.684), (-0.032, 2.060), (-0.207, 2.325), (-0.414, 2.465), \\ & (-0.585, 2.502), (-1.038, 2.398), (-1.440, 2.144), (-1.697, 1.766), \\ & (-1.782, 1.351), (-1.703, 0.982), (-1.528, 0.705), (-1.310, 0.563), \\ & (-0.995, 0.502), (-0.650, 0.572), (-0.329, 0.789), (-0.061, 1.203)\}, \end{aligned}$$

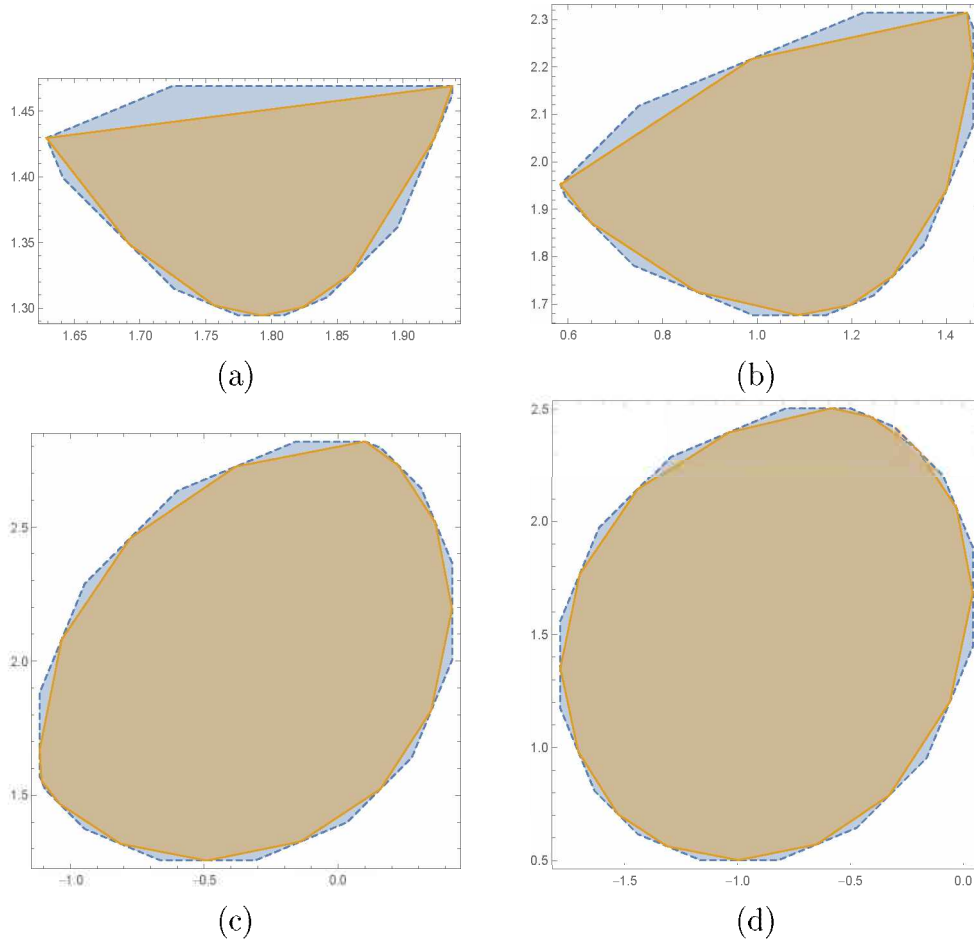


Рис. 1. Внешняя (пунктирная граница) и внутренняя (сплошная граница) оценки множества достижимости при (a) $t = 0.02$; (b) $t = 0.2$; (c) $t = 1$; (d) $t = 2$

$$\begin{aligned}
 Z^*(T, z^0) = \text{co}\{ & (0.040, 1.886), (-0.095, 2.214), (-0.300, 2.418), (-0.503, 2.502), \\
 & (-0.786, 2.502), (-1.291, 2.293), (-1.612, 1.972), (-1.782, 1.561), \\
 & (-1.782, 1.173), (-1.631, 0.808), (-1.440, 0.617), (-1.163, 0.502), \\
 & (-0.819, 0.502), (-0.472, 0.646), (-0.164, 0.954), (0.040, 1.447)\}.
 \end{aligned}$$

Расстояние между $Z_*(T, z^0)$ и $Z^*(T, z^0)$ составило 0.049, что существенно меньше консервативной оценки (12), равной в этом случае 2.053. Расчеты проводились в облачных средах Wolfram Cloud (<https://www.wolframcloud.com/>), использовалась встроенная функция

MittagLefflerE) и MATLAB Online (<https://matlab.mathworks.com/>, использовался m-файл для вычисления матричных функций Миттаг – Леффлера, автор — Roberto Garrappa [5]). Динамика изменения формы множества достижимости представлена на рис. 1, при малых значениях t множество достижимости сохраняет особенности формы ограничивающего компакта Q , при дальнейшем увеличении t происходит «сглаживание особенностей».

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00293.

Список литературы

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
2. **Чикрий А. А., Матичин И. И.** О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011. Т. 17. № 2. С. 256–270.
3. **Matychyn I., Onyshchenko V.** On time-optimal control of fractional-order systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018. Vol. 339. Pp. 245–257.
4. **Половинкин Е. С., Балашов М. В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 416 с.
5. **Garrappa R., Popolizio M.** Computing the matrix Mittag-Leffler function with applications to fractional calculus // *Journal of Scientific Computing*. 2018. Vol. 17, no. 1. Pp. 129–153.

Summary

Bannikov A. S. To construction of the reachability set for a fractional-order linear control system

A description of the reachability set in space by a phase change is given. An extremal control is constructed that transfers the initial position to the boundary of the reachability set as a solution to the corresponding optimal speed problem. Numerical examples are given. When conducting

the numerical experiment, programs in MATLAB and Wolfram Language were used.

Keywords: Caputo derivative, control system, reachability set.

References

1. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006, 540 p.
2. **Chikrii A. A., Matichin I. I.** On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], 2011, Vol. 17, no. 2, pp. 256–270.
3. **Matychyn I., Onyshchenko V.** On time-optimal control of fractional-order systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, Vol. 339, pp. 245–257.
4. **Polovinkin E. S., Balashov M. V.** *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis], Moscow: FIZMATLIT, 2004, 416 p.
5. **Garrappa R., Popolizio M.** Computing the matrix Mittag–Leffler function with applications to fractional calculus, *Journal of Scientific Computing*, 2018, Vol. 17, no. 1, pp. 129–153.

Для цитирования: Банников А. С. К построению множества достижимости линейной системы дробного порядка // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 2 (39). С. 20–26. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_20

For citation: Bannikov A. S. To construction of the reachability set for a fractional-order linear control system, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 20–26. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_20

МАТЕМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (39). 2021*

УДК 512.643.8+
517.954+517.968

DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_27

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ \mathbb{R} -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

С. В. Rogozin, Л. П. Примачук, М. В. Дубатовская

Статья посвящена анализу разработанного авторами эффективного метода решения задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения. Предложенный метод использует обобщение алгоритма Г. Н. Чеботарева факторизации треугольных матриц-функций.

Ключевые слова: задача \mathbb{R} -линейного сопряжения, рациональные коэффициенты, факторизация матриц-функций, частные индексы.

1. Введение

Рассматривается разрешимость так называемой задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}, \quad (1)$$

где $\varphi^+(t), \varphi^-(t)$ представляют собой граничные значения неизвестных функций, аналитических соответственно внутри и вне единичного круга \mathbb{D} . Эта задача упоминается в литературе как задача Маркушевича. А. И. Маркушевич рассмотрел частный случай такой задачи в 1946 году [1].

Задача (1) исследовалась многими авторами (см. [2], а также краткое описание более поздних результатов в [3, §20]). Интерес к данной

¹Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание 1.7.01.04) и гранта БРФФИ Ф20Р-083.

задаче вызван достаточно специфической теорией и многочисленными приложениями, в частности в теории композиционных материалов [4; 5].

Разрешимость задачи (1) связана, в частности (см. [6]), с необходимостью факторизации некоторой матрицы-функции второго порядка (см. [7–9]), поскольку задача (1) на единичной окружности эквивалентна векторно-матричной краевой задаче (задаче \mathbb{C} -линейного сопряжения)

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

Здесь

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} \overline{a(t)}f(t) - b(t)\overline{f(t)} \\ -f(t) \end{pmatrix},$$

неизвестные вектор-функции Φ^\pm связаны с неизвестными функциями φ^+, φ^- следующими тождествами:

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi^+(z)}{\frac{1}{z}} \\ \varphi^-(\frac{1}{z}) \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi^-(z)}{\frac{1}{z}} \\ \varphi^+(\frac{1}{z}) \end{pmatrix}.$$

Предлагаемый в работе метод представляет собой обобщение нового подхода, разработанного авторами в [10]. Суть этого подхода состоит в двукратном применении метода Г. Н. Чеботарева [11] для факторизации матричного коэффициента задачи (2). В принципе метод может быть применен к любой задаче (1) с произвольными гельдеровскими коэффициентами в эллиптическом случае, т. е. когда коэффициенты удовлетворяют условию $|a(t)| > |b(t)|$. В данной статье ограничиваемся рациональными коэффициентами, поскольку в этом случае предлагаемый алгоритм решения задачи становится конечным и сводится к некоторым последовательным преобразованиям матриц-функций.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу (1) с рациональными коэффициентами $a(t) \neq 0, t \in \mathbb{T}, b(t), f(t)$. Преобразуем краевое условие к виду, более удобному для применения метода, разработанного в [10].

Обозначим $\varkappa = \text{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ индекс Коши коэффициента $a(t)$ задачи (1) (равный разности числа нулей и полюсов этой функции внутри единичного круга). Факторизация скалярной функции $a(t)$ [12] означает представление ее в виде

$$a(t) = \chi^+(t)t^{\varkappa}\chi^-(t), t \in \mathbb{T},$$

где $\chi^+(t), \chi^-(t)$ — это граничные значения функций, аналитических и не обращающихся в нуль в областях $D^+ = \mathbb{D}$ и $D^- = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ соответственно. После серии преобразований:

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \frac{\varphi^+(z)}{\chi^+(z)}, \quad \varphi^-(z) = \varphi^-(z)\chi^-(z), \\ q(t) &= \frac{b(t)}{\chi^+(t)\overline{\chi^-(t)}}, \quad h(t) = \frac{f(t)}{\chi^+(t)}, \\ q(t) &= q^+(t) + q^-(t), \end{aligned}$$

приходим к следующей эквивалентной форме задачи (1):

$$\psi^+(t) = t^{\varkappa}\psi^-(t) + p(t)\overline{\psi^-(t)} + h(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (3)$$

где $\psi^+(t) = \varphi^+(t) - q^+(t)\overline{\varphi^-(t)}$, $\psi^-(t) = \varphi^-(t)$, а $p(t) = q^-(t)$, $h(t)$ — рациональные функции.

В приведенных выше обозначениях краевая задача (3) эквивалентна векторно-матричной задаче (или задаче \mathbb{C} -линейного сопряжения)

$$\begin{aligned} \Psi^+(t) &= \begin{pmatrix} t^{\varkappa} & 0 \\ 0 & t^{\varkappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{p(t)\overline{p(t)}}{-p(t)} & p(t) \\ -p(t) & 1 \end{pmatrix} \Psi^-(t) + H(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (4) \\ H(t) &= \begin{pmatrix} h(t) - \frac{t^{\varkappa}p(t)\overline{h(t)}}{-t^{\varkappa}h(t)} \\ -t^{\varkappa}h(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Уточним условия на рациональный коэффициент $p(t)$ задачи (3). Будем считать, что выполнено следующее

Предположение. Положим, что $p(t)$ — это рациональная функция, аналитическая вне единичного круга:

$$p(t) = q^-(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} = a_0 \frac{\prod_{j=1}^n (t - a_j)}{t^k \prod_{j=1}^m (t - b_j)}, \quad (5)$$

где все нули многочлена $Q(z)$ лежат внутри единичного круга

$$|b_j| < 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

а порядок $n = \deg P$ многочлена $P(z)$ и порядок $m = \deg Q$ многочлена $Q(z)$ удовлетворяют неравенству

$$n < m + k. \quad (8)$$

Решение задачи (4) определяется факторизацией матричного коэффициента с рациональными элементами

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 - p(t)\bar{p}(t) & p(t) \\ -\bar{p}(t) & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. представлением этой матрицы-функции в виде

$$A(t) = A^+(t)\Lambda(t)A^-(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (9)$$

где $A^+(t), A^-(t)$ — граничные значения матриц, аналитических и невырожденных в областях D^+, D^- соответственно, а $\Lambda(t) = \text{diag}\{t^{\varkappa_1}, t^{\varkappa_2}\}$ с целыми показателями степени $\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathbb{Z}$ (называемыми частными индексами матрицы $A(t)$). Известно (см., например, [13]), что подобная факторизация рациональных матриц-функций всегда существует. Заметим также, что рассматриваемая матрица обладает следующим свойством: $\det A(t) \equiv 1$, потому что частные индексы удовлетворяют соотношению

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 0. \quad (10)$$

В данной работе предложен конструктивный алгоритм факторизации рациональных матриц. Этот алгоритм основывается на применении преобразований, обобщающих метод Г. Н. Чеботарева [11]. С помощью этих преобразований задача сводится сначала к задаче факторизации треугольной матрицы-функции, которая затем факторизуется с помощью метода, аналогичного методу Чеботарева.

Предлагаемый алгоритм является более простым по сравнению с известными алгоритмами факторизации рациональных матриц-функций (см., например, [8; 13]).

3. Факторизация матричного коэффициента

Для начального шага алгоритма введем формальное (матричное) аналитическое решение $X_0^\pm(z)$ однородной краевой задачи с матричным коэффициентом $A(t)$

$$X_0^+(t) = A(t)X_0^-(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (11)$$

А именно положим, что $X_0^+(z) = E_2$ — это единичная 2×2 матрица,

$$X_0^-(z) = \begin{pmatrix} 1 & -p(z) \\ p(z) & 1 - p(z)p(z) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Заметим, что $X_0^-(z)$ является рациональной матрицей, аналитической вне единичного круга (но необязательно аналитической в бесконечно удаленной точке), поскольку

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_0} \frac{\prod_{j=1}^n (\bar{z} - \bar{a}_j)}{z^k \prod_{j=1}^m (\bar{z} - \bar{b}_j)} = \frac{1}{a_0} \frac{\prod_{j=1}^n (\frac{1}{z} - \frac{1}{a_j})}{\frac{1}{z^k} \prod_{j=1}^m (\frac{1}{z} - \frac{1}{b_j})} = \\ &= (-1)^{m+n} \frac{b_1 \cdots b_m}{a_0 \cdot a_1 \cdots a_n} z^{m-n} \frac{z^k \prod_{j=1}^n (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j)}. \end{aligned}$$

3.1. Преобразование к треугольной матрице

Для преобразования матрицы $X^-(z)$ к треугольному виду представим рациональную функцию $\frac{1}{p(t)}$ в виде цепной дроби. Сначала поделим многочлен $Q(t)$ на многочлен $P(t)$. Получим

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{Q(t)}{P(t)} = S_0(t) + \frac{R_1(t)}{P(t)}, \quad (13)$$

где $S_0(t)$ — многочлен порядка $\mu_0 = m + k - n$, а $R_1(t)$ — многочлен порядка $\nu_1 < n < m + k$. Соотношение (13) эквивалентно следующему равенству

$$1 - S_0(t)p(t) = \frac{R_1(t)}{Q(t)}. \quad (14)$$

Далее поделим многочлен $P(t)$ на многочлен $R_1(t)$:

$$\frac{P(t)}{R_1(t)} = S_1(t) + \frac{R_2(t)}{R_1(t)}, \quad (15)$$

где $S_1(t)$ — многочлен порядка $\mu_1 = n - \nu_1$, а $R_2(t)$ — многочлен порядка $\nu_2 < \nu_1$. Соотношение (15) эквивалентно равенству

$$P(t) - S_1(t)R_1(t) = R_2(t). \quad (16)$$

Продолжая, получим

$$\frac{R_1(t)}{R_2(t)} = S_2(t) + \frac{R_3(t)}{R_2(t)}, \quad (17)$$

где $S_2(t)$ — многочлен порядка $\mu_2 = \nu_1 - \nu_2$, а $R_3(t)$ — многочлен порядка $\nu_3 < \nu_2$. Соотношение (17) эквивалентно равенству

$$R_1(t) - S_2(t)R_2(t) = R_3(t). \quad (18)$$

Поскольку порядки многочленов $R_j(t)$ убывают, то через конечное число шагов получим конечное разложение функции $\frac{1}{p(t)}$ в цепную дробь

$$\frac{1}{p(t)} = S_0(t) + \frac{1}{S_1(t) + \frac{1}{S_2(t) + \dots + \frac{1}{S_l(t)}}}. \quad (19)$$

Далее мы применим полученное соотношение (14) для преобразования матрицы $X_0^-(t)$ к треугольному виду. Умножим обе части (11) справа на полиномиальную матрицу

$$T_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S_0(t) & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Тогда минусовая компонента $X_1^-(t)$ решения задачи (11) имеет вид

$$\begin{aligned} X_1^-(t) &= X_0^-(t)T_1(t) = \begin{pmatrix} 1 - p(t)S_0(t) & -p(t) \\ F_1(t) & 1 - p(t)p(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{R_1(t)}{Q(t)} & -\frac{P(t)}{Q(t)} \\ F_1(t) & 1 - p(t)p(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $F_1(t)$ — некоторая рациональная функция. Далее умножим обе части равенства $X_0^+(t)T_1(t) = A(t)X_1^-(t)$ на полиномиальную матрицу

$$T_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & S_1(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Получим

$$\begin{aligned} X_2^-(t) &= X_1^-(t)T_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_1(t)}{Q(t)} & \frac{R_1(t)S_1(t)-P(t)}{Q(t)} \\ F_1(t) & F_2(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{R_1(t)}{Q(t)} & -\frac{R_2(t)}{Q(t)} \\ F_1(t) & F_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $F_2(t)$ — рациональная функция. Продолжая, получим соотношение

$$X_{l+1}^+(t) = T_1(t)T_2(t) \cdots T_{l+1}(t) = A(t)X_{l+1}^-(t). \quad (24)$$

На последнем шаге деления многочленов в процессе представления $\frac{1}{p(t)}$ в виде цепной дроби возможны два случая:

(а) $R_{l-1}(t)$ делится на $R_l(t)$ нацело, т. е. $(R_{l+1}(t) \equiv 0)$, т. е.

$$\frac{R_{l-1}(t)}{R_l(t)} = S_l(t). \quad (25)$$

(б) остаток от деления $R_{l-1}(t)$ на $R_l(t)$ есть число $(R_{l+1}(t) \equiv C)$, т. е.

$$\frac{R_{l-1}(t)}{R_l(t)} = S_l(t) + \frac{C}{R_l(t)}. \quad (26)$$

Покажем далее, что в обоих случаях матрица $X_{l+1}^-(t)$ преобразуется к треугольному виду.

Рассмотрим случай **(а)**. Если число l нечетное, то матрица $X_{l+1}^-(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_l(t)}{Q(t)} & 0 \\ F_l(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix} =: \Delta(t). \quad (27)$$

Если число l четное, то матрица $X_{l+1}^-(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^-(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{R_l(t)}{Q(t)} \\ F_{l+1}(t) & F_l(t) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

и для унификации ситуации умножим обе части (24) на матрицу

$$T_{l+2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_{l+2}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_l(t)}{Q(t)} & 0 \\ -F_l(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Рассмотрим случай **(b)**. Если число l нечетное, то матрица $X_{l+1}^-(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_l(t)}{Q(t)} & -\frac{C}{Q(t)} \\ F_l(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Умножим обе части соотношения (24) на рациональную матрицу

$$T'_{l+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{R_l(t)}{C} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $X_{l+2}^-(t) = X_{l+1}^-(t)T'_{l+2}$ приобретет при этом вид

$$X_{l+2}^-(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{C}{Q(t)} \\ F_{l+2}(t) & F_{l+1}(t) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где $F_{l+2}(t) = F_l(t) + \frac{R_l(t)}{C}F_{l+1}(t)$. Умножая $X_{l+2}^-(t) = A(t)X_{l+2}^-(t)$ на матрицу

$$T'_{l+3} = T_{l+2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем минусовую компоненту $X_{l+3}^-(t)$ в виде

$$X_{l+3}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(t)} & 0 \\ -F_{l+1}(t) & F_{l+2}(t) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Если число l четное, то матрица $X_{l+1}^-(t)$ имеет вид

$$X_{l+1}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(t)} & -\frac{R_l(t)}{Q(t)} \\ F_{l+1}(t) & F_l(t) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Умножая обе части равенства (24) на рациональную матрицу

$$T''_{l+2} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{R_l(t)}{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим следующее представление матрицы $X_{l+2}^-(t) = X_{l+1}^-(t)T_{l+2}''(t)$:

$$X_{l+2}^-(t) = \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(t)} & 0 \\ F_{l+1}(t) & F_{l+2}(t) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Заметим, что матрица A и все матрицы преобразования T_j имеют единичный определитель, мы приходим к следующему утверждению. Пара матриц $X_s^+(z), X_s^-(z)$, с «плюсовой» компонентой

$$X_s^+(z) = T_1(z)T_2(z) \cdots T_s(z) \quad (35)$$

и треугольной «минусовой» компонентой

$$X_s^-(z) = \Delta(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{R_l(z)}{Q(z)} & 0 \\ (-1)^{l+1}F_l(z) & \frac{Q(z)}{R_l(z)} \end{pmatrix} & \text{в случае (а),} \\ \begin{pmatrix} \frac{C}{Q(z)} & 0 \\ (-1)^l F_{l+1}(z) & \frac{Q(z)}{C} \end{pmatrix} & \text{в случае (б)} \end{cases} \quad (36)$$

удовлетворяет краевому условию (11), т. е.

$$X_s^+(t) = A(t)X_s^-(t). \quad (37)$$

Здесь число s равно одному из чисел $l+1$, $l+2$, или $l+3$.

3.2. Факторизация матрицы $A(t)$

Для того чтобы факторизовать матрицу $A(t)$, перепишем соотношение (37) в эквивалентной форме

$$X_s^+(t)\Delta^{-1}(t) = A(t), \quad (38)$$

где

$$\Delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{Q(t)}{R_l(t)} & 0 \\ (-1)^l F_l(t) & \frac{R_l(t)}{Q(t)} \end{pmatrix} \quad (39)$$

в случае (а) и

$$\Delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{Q(t)}{C} & 0 \\ (-1)^{l+1} F_l(t) & \frac{C}{Q(t)} \end{pmatrix} \quad (40)$$

в случае (б).

Матрица

$$\Delta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} x(t) & 0 \\ a(t) & y(t) \end{pmatrix}$$

имеет компоненты, описанные в Лемме 3.1. Факторизация этой матрицы строится с помощью алгоритма Чеботарева [11]. Сначала факторизуем диагональные элементы $x(t), y(t)$, т. е. представим их в виде

$$x^+(t) = x(t)x^-(t), \quad y^+(t) = y(t)y^-(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (41)$$

В случае **(а)** эта факторизация зависит от распределения нулей многочлена $R_l(z)$. Пусть $R_l(z) = R_l^+(z)R_l^-(z)$, где все нули многочлена $R_l^+(z)$ лежат внутри единичного круга, а все нули $R_l^-(z)$ — вне его, т. е. $l = l^+ + l^-$.

Следуя [11], рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{a(\tau)x^-(\tau)d\tau}{y^+(\tau)(\tau - z)}, \quad z \in D^\pm. \quad (42)$$

Пара аналитических невырожденных матриц

$$Y^\pm(z) = \begin{pmatrix} x^\pm(z) & 0 \\ y^\pm(z)\Phi^\pm(z) & y^\pm(z) \end{pmatrix} \quad (43)$$

удовлетворяет краевому условию

$$Y^+(t) = \Delta^{-1}(t)Y^-(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (44)$$

Следуя [14], заметим, что для построения общего решения задачи (44) необходимо найти так называемую каноническую матрицу этой задачи (что равносильно решению задачи факторизации (9)). Напомним [14, с. 523], что канонической матрицей называется кусочно-аналитическая матрица $X^\pm(z)$, удовлетворяющая условию (44), аналитическая и невырожденная в областях D^\pm и такая, что сумма порядков ее столбцов на бесконечности (равная минимуму порядков элементов столбца) совпадает с порядком $\det X^-$ на бесконечности. В этом случае говорят, что $X^-(z)$ имеет нормальную форму на бесконечности, а порядки столбцов равны частным индексам соответствующей задачи факторизации.

Построенная выше кусочно-аналитическая матрица $Y^\pm(z)$, вообще говоря, не является канонической матрицей задачи (44). Вычислим порядки элементов матрицы $Y^-(z)$ и запишем их слева и справа от матрицы в виде

$$Y^-(z) = \begin{array}{cc} k + m - \lambda & \left(\begin{array}{cc} x^-(z) & 0 \\ y^-(z)\Phi^-(z) & y^-(z) \end{array} \right) & \infty \\ \nu - k - m + \lambda & & \lambda - k - m \end{array}. \quad (45)$$

Здесь

$$\lambda = \begin{cases} l_+ & \text{в случае (a),} \\ 0 & \text{в случае (b).} \end{cases} \quad (46)$$

Порядки столбцов равны $\min\{k + m - \lambda, \nu - k - m + \lambda\}$ и $-k - m$ соответственно. Следовательно, не во всех случаях

$$\min\{k + m - \lambda, \nu - k - m + \lambda\} + (-k - m) = 0 = \text{ord det } Y^-(\infty).$$

Для того чтобы преобразовать матрицу $Y^\pm(z)$ к каноническому виду, воспользуемся алгоритмом Чеботарева [11]. Представим (рациональную!) функцию $\frac{1}{\Phi^-(z)}$ в виде конечной цепной дроби

$$\frac{1}{\Phi^-(z)} = U_0(z) + \frac{1}{U_1(z) + \frac{1}{U_2(z) + \dots + \frac{1}{U_r(z)}}},$$

где $U_0(z), U_1(z), \dots, U_r(z)$ — многочлены порядков q_0, q_1, \dots, q_r соответственно. На каждом шаге разложения (за исключением последнего) имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned} 1 &= U_0(z)\Phi^-(z) + V_1(z), \\ \Phi^-(z) &= U_1(z)V_1(z) + V_2(z), \\ &\dots, \end{aligned}$$

где остатки деления $V_1(z), V_2(z), \dots, V_{s-1}(z)$ имеют на бесконечности порядки $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{s-1}$ соответственно. На последнем шаге имеем случай (c):

$$V_{s-1}(z) = U_s(z)V_s(z),$$

или

случай (d):

$$V_{s-1}(z) = U_s(z)V_s(z) + C.$$

Далее, умножим обе части равенства (44) на треугольную полиномиальную матрицу вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_i(t) & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & U_i(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для того, чтобы получить необходимые свойства преобразованной матрицы (минусовой компоненты).

Заметим, что $\nu = q_0, \nu_1 = q_0 + q_1, \nu_2 = q_0 + q_1 + q_2, \dots, \nu_s = q_0 + q_1 + \dots + q_s$. Тогда так же, как в [11], мы получим следующий результат. Если $\nu - k - m + \lambda \geq k + m - \lambda$, то частные индексы матрицы $\Delta^{-1}(t)$ равны $k + m - \lambda, \lambda - k - m$.

Если $\nu, \nu + \nu_1, \dots, \nu_{i-1} + \nu_i < k + m - \lambda$, но $\nu_i + \nu_{i+1} \geq k + m - \lambda$, то частные индексы матрицы $\Delta^{-1}(t)$ равны $k + m - \lambda - \nu_i, -k - m + \lambda + \nu_i$. В нашем случае $\det \Delta^{-1}(t)$, а также определители всех матриц преобразования тождественно равны 1. Следовательно, $\chi_1 = -\chi_2$ и частные индексы матрицы $\Delta^{-1}(t)$ всегда противоположны по знаку ($\varkappa_1 = -\varkappa_2$).

Следовательно, матричный коэффициент задачи (4) имеет следующую факторизацию:

$$\begin{pmatrix} t^{\varkappa} & 0 \\ 0 & t^{\varkappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - p(t)\overline{p(t)} & p(t) \\ -\overline{p(t)} & 1 \end{pmatrix} = t^{\varkappa} A(t) = Z^+(t)\Lambda(t)Z^-(t), \quad (47)$$

где $t \in \mathbb{T}$, $Z^+(t) = X_s^+(t)Y^+(t)$, $Z^-(t) = Y^-(t)$, и $\Lambda(t) = \text{diag}\{t^{\varkappa+\varkappa_1}, t^{\varkappa-\varkappa_1}\}$.

Заметим, что набор частных индексов матрицы $A(t)$ устойчив (см., например, [6; 8]) тогда и только тогда, когда $\varkappa_1 = 0$.

4. Решение задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения

Используя решение задачи факторизации (47), преобразуем краевое условие задачи (4) к виду

$$\Omega^+(t) = \Lambda(t)\Omega^-(t) + s(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (48)$$

Решения задачи (48) связаны с решениями задачи (4) следующими соотношениями:

$$\Omega^+(z) = [Z^+(z)]^{-1}\Psi^+(z), \quad \Omega^-(z) = Z^-(z)\Psi^-(z), \quad (49)$$

и $s(t) = [Z^+(t)]^{-1}r(t)$. Фактически векторно-матричная задача эквивалентна двум независимым скалярным краевым задачам:

$$\begin{cases} \omega_1^+(t) = t^{\varkappa+\varkappa_1}\omega_1^-(t) + s_1(t), \\ \omega_2^+(t) = t^{\varkappa-\varkappa_1}\omega_2^-(t) + s_2(t). \end{cases} \quad (50)$$

Решения этих задач, а также условия их разрешимости могут быть записаны в замкнутой форме [12]. Представим их в следующей теореме.

Если $\varkappa - \varkappa_1 \geq 0$, то общие решения задач (50) могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \omega_1^+(z) = P_{\varkappa+\varkappa_1}(z) + s_1^+(z), & \omega_1^-(z) = t^{-(\varkappa+\varkappa_1)} [P_{\varkappa+\varkappa_1}(z) + s_1^-(z)], \\ \omega_2^+(z) = P_{\varkappa-\varkappa_1}(z) + s_2^+(z), & \omega_2^-(z) = t^{-(\varkappa-\varkappa_1)} [P_{\varkappa-\varkappa_1}(z) + s_2^-(z)], \end{cases} \quad (51)$$

где $P_{\varkappa+\varkappa_1}(z), P_{\varkappa-\varkappa_1}(z)$ — многочлены с произвольными комплексными коэффициентами порядков $\varkappa + \varkappa_1, \varkappa - \varkappa_1$ соответственно, и

$$s_j^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{s_j(t) dt}{t - z} \quad (j = 1, 2), \quad z \in D^\pm. \quad (52)$$

Если $\varkappa - \varkappa_1 < 0 \leq \varkappa + \varkappa_1$, то решения задач (50) существуют тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\int_{\mathbb{T}} s_2(t) t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\varkappa + \varkappa_1 - 1. \quad (53)$$

Если условия (53) выполнены, то общие решения задач (50) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \omega_1^+(z) = P_{\varkappa+\varkappa_1}(z) + s_1^+(z), & \omega_1^-(z) = t^{-(\varkappa+\varkappa_1)} [P_{\varkappa+\varkappa_1}(z) + s_1^-(z)], \\ \omega_2^+(z) = s_2^+(z), & \omega_2^-(z) = t^{-(\varkappa-\varkappa_1)} s_2^-(z), \end{cases} \quad (54)$$

где $P_{\varkappa+\varkappa_1}(z)$ — многочлен с произвольными комплексными коэффициентами порядка $\varkappa + \varkappa_1$, а функции $s_j^\pm(z), j = 1, 2$ задаются формулами (52).

Если $\varkappa + \varkappa_1 < 0$, то общие решения задач существуют тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} s_1(t) t^{k-1} dt &= 0, & k = 1, 2, \dots, -\varkappa - \varkappa_1 - 1, \\ \int_{\mathbb{T}} s_2(t) t^{k-1} dt &= 0, & k = 1, 2, \dots, -\varkappa + \varkappa_1 - 1. \end{aligned} \quad (55)$$

Если условия (55) выполнены, то общие решения задач (50) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \omega_1^+(z) = s_1^+(z), & \omega_1^-(z) = t^{-(\varkappa+\varkappa_1)} s_1^-(z), \\ \omega_2^+(z) = s_2^+(z), & \omega_2^-(z) = t^{-(\varkappa-\varkappa_1)} s_2^-(z), \end{cases} \quad (56)$$

где функции $s_j^\pm(z)$, $j = 1, 2$ задаются формулами (52).

Решение $\varphi^\pm(z)$ задачи могут быть найдены из соотношений, связывающих функцию $\varphi^\pm(z)$ и вектор Ψ^\pm . Последний выражается через решения $\Omega^\pm(z)$ задачи (48), задаваемыми формулами (51), (54), (56) и через решения $Y^\pm(z)$ задачи факторизации (3)

$$\Psi^+(z) = Z^+(z)\Omega^+(z), \quad \Psi^+(z) = [Z^-(z)]^{-1}\Omega^-(z).$$

Список литературы

1. **Маркушевич А. И.** Об одной краевой задаче теории аналитических функций // *Уч. записки Московского ун-та. I. 100. 1946. С. 20–30.*
2. **Михайлов Л. Г.** Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1963. 1836 с.
3. **Litvinchuk G. S.** Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift // *Mathematics and its Applications. 2000. V. 523. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 205 p.*
4. **Mityushev V. V.** \mathbb{R} -linear and Riemann-Hilbert problems for multiply connected domains // *Advances in Applied Analysis (Sergei V. Rogosin, Anna A. Koroleva eds.), Springer: Basel. 2012. Pp. 147–176.*
5. **Mityushev V. V., Rogosin S. V.** Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications (Monographs and surveys in pure and applied mathematics. Vol. 108), Chapman & Hall / CRC PRESS: Boca Raton - London - New York - Washington, 1999. 296 p.
6. **Литвинчук Г. С.** Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // *Изв. вузов. Матем. № 12. 1967. С. 47–57.*

7. **Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.** Factorization of measurable matrix functions. Basel-Boston: Birkhäuser. 1987. 372 p.
8. **Rogosin S., Mishuris G.** Constructive methods for factorization of matrix-functions // *IMA J. Appl. Math.*, 2016. Vol. 81 (2). Pp. 365–391.
9. **Сабитов И. Х.** Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности // *Сиб. мат. ж.* 1964. Т. V (1). Pp. 124–129.
10. **Primachuk L., Rogosin S., Dubatovskaya M.** On R -linear conjugation problem on the unit circle // *Eurasian Mathematical Journal*, 2020. Vol. 11 (3). Pp. 79–88.
11. **Чеботарев Г. Н.** Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // *Успехи мат. наук.* 1956. Т. XI. Вып. 3. Pp. 192–202.
12. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука. 1977. 544 с.
13. **Adukov V. M.** Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix-functions // *St. Petersburg Math. J.* 4 (1). 1993. Pp. 51–69.
14. **Мухелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 511 с.
15. **Primachuk L., Rogosin S.** Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order // *Lobachevsky J. Math.*, 2018. V. 39 (6). Pp. 809–817.

Summary

Rogosin S. V., Primachuk L. P., Dubatovskaya M. V. On solution to R -linear conjugation problem with rational coefficients

The paper is devoted to an analysis of an effective method of solution to R -linear conjugation problem recently developed by the authors. The method uses a generalization of G. N. Chebotarev's algorithm for factorization of the triangular matrix-functions.

Keywords: \mathbb{R} -linear conjugation problem, rational coefficients, factorization of matrix-functions, partial indices.

References

1. **Markushevich A. I.** On a boundary value problem in the theory of analytic functions, *Uch. notes of Moscow University*, 1946, I. 100, pp. 20–30.
2. **Mikhailov L. G.** *Novyy klass osobykh integral'nykh uravneniy i yego primeneniya k differentsial'nykh uravneniyam s singulyarnymi koeffitsiyentami* [A new class of singular integral equations and its application to differential equations with singular coefficients], Dushanbe: Academy of Sciences of the Tajik SSR, 1963, 1836 p.
3. **Litvinchuk G. S.** Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift, *Mathematics and its Applications*, 2000, V. 523, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 205 p.
4. **Mityushev V. V.** \mathbb{R} -linear and Riemann-Hilbert problems for multiply connected domains, *Advances in Applied Analysis* (Sergei V. Rogosin, Anna A. Koroleva eds.), Springer: Basel, 2012, pp. 147–176.
5. **Mityushev V. V., Rogosin S. V.** *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications* [Monographs and surveys in pure and applied mathematics], Vol. 108, Chapman & Hall / CRC PRESS: Boca Raton - London - New York - Washington, 1999, 296 p.
6. **Litvinchuk G. S.** Two theorems on the stability of the quotient indices of the Riemann boundary value problem and their application, *Izv. vuzov. Matem.* [Izv. universities. Mat.], No. 12, 1967, pp. 47–57.
7. **Litvinchuk G. S., Spitkovsky, I. M.** *Factorization of measurable matrix functions*, Basel-Boston: Birkhäuser, 1987, 372 p.
8. **Rogosin S., Mishuris G.** Constructive methods for factorization of matrix-functions, *IMA J. Appl. Math.*, 2016, Vol. 81 (2), pp. 365–391.
9. **Sabitov I. Kh.** On the general boundary value problem of linear conjugation on a circle, *Sib. mat. zh.* [Sib. mat. J.], 1964, T. V (1), pp. 124–129.

10. **Primachuk L., Rogosin S., Dubatovskaya M.** On R-linear conjugation problem on the unit circle, *Eurasian Mathematical Journal*, Vol. 11 (3), 2020, p. 79–88.
11. **Chebotarev G. N.** Partial indices of the Riemann boundary value problem with a triangular matrix second order, *Uspekhi mat. nauk* [Advances mat. nauk], 1956, Т. XI, Iss. 3, pp. 192–202.
12. **Gakhov F. D.** *Krayevyye zadachi* [Boundary value problems], 3rd ed, M.: Science, 1977, 544 p.
13. **Adukov V. M.** Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix-functions, *St. Petersburg Math. J.*, 1993, V. 4 (1), pp. 51–69.
14. **Muskhelishvili N. I.** *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular integral equations], 3rd ed., M.: Science, 1968, 511 p.
15. **Primachuk L., Rogosin S.** Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order, *Lobachevsky J. Math.*, V. 39 (6), 2018, pp. 809–817.

Для цитирования: Рогозин С. В., Примачук Л. П., Дубатовская М. В. О решении задачи R-линейного сопряжения с рациональными коэффициентами // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 27–43. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_27*

For citation: Rogosin S. V., Primachuk L. P., Dubatovskaya M. V. On solution to R-linear conjugation problem with rational coefficients, *Bulletin of Syktyokar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 27–43. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_27

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Поступила 10.05.2021

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВОВ ГАЗОВОЗДУШНЫХ СМЕСЕЙ С УЧЕТОМ СНОСА ОБЛАКА ВЕТРОМ

С. В. Шилов

В работе проведено моделирование поражающего действия ударной волны при взрыве сжиженной пропан-бутановой смеси. Расчеты проводились по двум методикам. По первой рассчитывались зоны разрушения зданий и поражения людей. По второй были определены величины сноса облака газозвдушной смеси ветром. С учетом этого возможные опасные зоны оказались значительно шире. Так, зоны разрушения зданий и поражения людей из-за распространения облака вдоль поверхности земли увеличиваются примерно в пять-шесть раз. Эти факты надо обязательно учитывать при расположении объектов, использующих сжиженные газы, а также при транспортировке таких газов. При определении опасных зон использована вероятностная модель. В качестве зон возможного разрушения зданий условно приняты такие расстояния, на которых вероятность разрушений составляет 90 %. Аналогично для людей в опасных зонах вероятность повреждения барабанных перепонок составила 90 % и выше.

Ключевые слова: ударная волна, поражение, сжиженный газ.

1. Введение

Сжиженные углеводородные газы благодаря экологичности и более низкой цене (по сравнению с бензином) нашли широкое применение в автомобильном транспорте и бытовых газовых электроприборах [1]. В автомобилях потребление пропан-бутановых смесей непрерывно растет. Большие объемы сжиженного под давлением газа перевозятся газозами (до 50 м³) [2]. Еще большие транспортные объемы можно встретить на железной дороге.

Газы при утечке смешиваются с воздухом и образуют взрывоопасную смесь. Это несет потенциально большую опасность как для людей, так и объектов городской инфраструктуры [3]. Причем сжиженные пропан, а также бутан при взрыве могут создавать несколько поражающих факторов, создавая риски существенно большие, чем для других низкокипящих жидкостей [4]. Необходимость расчета поражающих факторов взрыва газов поднималась в зарубежных изданиях за последние пять лет, и предлагались различные модели их расчета [5].

Для превентивного определения опасных зон при взрыве и принятия мер по снижению возможного поражения необходимо проводить моделирование последствий аварии. Эта задача решалась в данной работе. Описана методика расчета ударной волны взрыва без учета и с учетом сноса облака газоздушной смеси ветром, определены опасные зоны для зданий и людей. Также рассмотрена программа расчета взрыва, используемая в МЧС (Министерство по чрезвычайным ситуациям) по Республике Коми. Показано, что она дает корректные результаты только при небольших объемах взрывающего газа и не учитывает дальность сноса облака ветром.

2. Методики расчета

Для нахождения опасных зон при взрыве газоздушных смесей используются специальные методики [6; 7]. На их основе возможно рассчитать значения ударной волны взрыва, вероятности поражения людей и разрушения зданий. Поскольку газ используется в качестве топлива, то его смесь с воздухом считаем топливно-воздушной.

Рассмотрим основные формулы и положения методики [6]. Более подробно ее формульный аппарат изложен в статье [8].

Расчет основных параметров взрыва топливно-воздушной смеси (ТВС) начинают с определения эффективного энергозапаса:

$$E = M_{\Gamma} q_{\Gamma} \text{ при } C_{\Gamma} \leq C_{\text{ст}} \text{ или } E = M_{\Gamma} q_{\Gamma} C_{\text{ст}} / C_{\Gamma} \text{ при } C_{\Gamma} > C_{\text{ст}}, \quad (1)$$

где M_{Γ} — масса горючего вещества, содержащегося в облаке ТВС, кг (определяется исходя из условий развития аварии), q_{Γ} — теплота сгорания, $C_{\text{ст}}$ и C_{Γ} — стехиометрическая и реальная концентрация газа в воздухе.

В случае если концентрация газа C_{Γ} в облаке неизвестна, она принимается равной НКПВ (нижнему концентрационному пределу воспламенения) горючего газа. Расчет при этом надо проводить в условии

$C_T \leq C_{ст}$. Кроме того, для газов тяжелее воздуха (т. е. для пропан-бутановой смеси) энергозапас E удваивается.

В качестве исходных данных рассмотрим, что используется пропан-бутановая смесь в летнем варианте (75 % пропана и 25 % бутана) и происходит ее разгерметизация при аварии с емкостью, где смесь находится в сжиженном виде под давлением.

Исходя из полученного энергозапаса, чувствительности газа к взрывному сгоранию и вида окружающей территории (например, открытая или сильно загроможденная) можно просчитать скорость взрывного превращения и ударную волну [6; 8]. Но основной недостаток методики [6] — игнорирование влияния ветра (движения воздуха) при различных состояниях атмосферы. При этом сноса облака не происходит и возможные зоны поражения получаются гораздо меньшего радиуса. Более приближенную к реальности ситуацию можно смоделировать в случае учета состояния атмосферы согласно [7]. Тем более известно, что в ряде случаев опасные концентрации при разгерметизации емкостей с сжиженными газами наблюдали на большом расстоянии от места аварии в подвальных помещениях и других заглубленных местах. И это как раз пример сноса газовоздушного облака. Согласно [7], аварийный взрыв газа в смеси с воздухом рассматривается как наземный, считается, что облако имеет форму полусферы. Его объем в m^3 , находится по формуле

$$V_{TBC} = (2240\chi M_T T) / (\mu C_{ст} T_0), \quad (2)$$

где M_T — масса горючего вещества, содержащегося в облаке, кг; χ — доля массы исходного топлива, переходящего в облако, значения χ за-tabулированы, см. например [3]; T — температура окружающей среды, °К; μ — молекулярная масса горючего газа (для пропана $\mu = 44$, бутана $\mu = 58$); $T_0 = 273$ °К.

Радиус облака в метрах находится по формуле исходя из объема полусферы:

$$r_0 = 0,78 \sqrt[3]{V_{TBC}}. \quad (3)$$

Под действием ветра облако газа переносится от центра его образования на расстояние ΔL , м. Величина ΔL рассчитывается по формуле [7]:

$$\Delta L = (0,44r_0/\alpha)^{1/k}, \quad (4)$$

где значения коэффициентов α и k можно определить из табл. 1. В работе [7] описаны особенности классов устойчивости атмосферы.

Таблица 1

Значения коэффициентов α и k

Класс устойчивости атмосферы по Пасквиллу	α	k
A	0,43	0,89
B	0,26	0,92
C	0,20	0,92
D	0,13	0,92
E	0,08	0,94
F	0,05	0,94

Облако может быть смещено в любую сторону от места аварии, поэтому радиус опасной зоны будет, соответственно, больше на величину смещения ΔL .

3. Расчет взрыва газоздушной смеси и учет сноса облака ветром

Приведем пример расчета опасных зон для типичной автомобильной емкости объемом $V=5,07 \text{ м}^3$. Согласно работе [1], средняя плотность смеси из 25 % бутана и 75 % пропана при 0 °С составляет 540 кг/м^3 . Тогда масса газа вычисляется так:

$$M_{\Gamma} = 0,85V\rho = 0,85 \cdot 5,07 \cdot 540 = 2327,13 \text{ (кг)}.$$

Теперь определяем теплоту сгорания q_{Γ} и эффективный энергозапас образующегося облака следующим образом:

$$q_{\Gamma} = 44\beta = 44 \cdot 1,05 \cdot 10^6 = 46,2 \cdot 10^6 \text{ (Дж/кг)},$$

$$E = 2M_{\Gamma}q_{\Gamma} = 2 \cdot 2327,13 \cdot 46,2 \cdot 10^6 = 2,15 \cdot 10^{11} \text{ (Дж)}.$$

Далее по таблице 1 методики [6] определяем степень чувствительности (класс) газа к взрыву. Таких классов в таблице четыре. К первому классу (это особо чувствительные газы) относятся, например, ацетилен, водород. Они способны взрываться в режиме детонации (быстро,

со скоростью сгорания больше скорости звука) даже в малом объеме ячейки размером 2 см и менее. К четвертому классу относятся слабочувствительные (гораздо менее опасные) к взрыву вещества с размером детонационной ячейки 40 см и более. Это, например, метан, керосин, бензол и др. Рассматриваемые в нашем примере газы — пропан, а также бутан — относятся ко 2-му классу (так называемые чувствительные вещества).

Затем следует задать тип загроможденности окружающего пространства. Это важный фактор, определяющий параметры взрыва. Дело в том, что при увеличении количества препятствий на пути движущегося фронта горения смеси растет степень его завихрения (турбулентности). Это, как известно, приводит к возрастанию возникающего избыточного давления и большему поражающему действию [3]. С этой точки зрения более безопасно открытое пространство. Наоборот, большее давление взрыва следует ожидать при увеличении загроможденности (в последнем случае скорость детонационного горения достигает 500 м/с и более). В нашем случае с учетом транспортировки газа автомобильными газовозами по дороге логично взять вид 4 из табл. 2. Этот вид соответствует слабозагроможденному или открытому пространству.

На основании выбранного класса чувствительности и вида окружающего пространства определяется скорость взрывного превращения. Она, согласно руководству [6], составляет 150–200 м/с (тип горения — дефлаграция, т. е. дозвуковое горение).

Затем находим такие расстояния, при которых величины избыточного давления ΔP и импульса I ударной волны соответствуют 90 % вероятности повреждения зданий или поражения людей [6].

В табл. 2 приведены радиусы $R_{\text{раз}}$ зон разрушений зданий для нескольких объемов емкостей, внутри которых вероятность разрушений 90 % и более (90 % соответствует границе зоны). Также представлены радиусы $R_{\text{вос}}$ зон восстановления зданий и зоны возможного разрыва барабанных перепонок людей. Это относительно безопасные расстояния, при которых здания не получают разрушения с вероятностью 90 % и более [8]. Также в таблице представлены радиусы безопасных зон и зон с 50 % повреждением барабанных перепонок.

Данную таблицу можно использовать для сравнения с аналогичными, рассчитанными ниже, но уже с учетом сноса облака ветром.

Таблица 2

Радиусы зон повреждения промышленных зданий и радиусы поражения людей для емкостей автоцистерн 5,07, 10 и 31 м³ без учета сноса облака ТВС ветром

Емкость ав- тоцистерны, м ³	R _{разр} , м (ΔP, кПа)	R _{вос} , м (ΔP, кПа)	Вероятность разрыва перепонок и радиусы таких зон, м	
			0 %	50 %
5,07	52 (87,3)	300 (9,7)	160	45
10	65 (87,8)	376 (9,7)	203	57
31	95 (87,4)	549 (9,7)	295	84

Вычисления поражений людей для емкости 5,07 м³ дают следующие результаты. Вероятность разрыва барабанных перепонок составляет 50 % на расстоянии 45 м. Условно безопасное расстояние, при котором вероятность разрыва перепонок 0 % наблюдается на 160 м. Для двух других емкостей результаты приведены в табл. 2.

Снос облака ветром (при аварии с разливом сжиженного газа) существенно расширяет опасные зоны.

Приведем расчет для емкости 5,07 м³ согласно руководству [7]. Также выясним особенности данного процесса при разном состоянии атмосферы и влияние температуры окружающей среды. В качестве сравнения выберем две разные по знаку температуры (+15°C и -15°C).

Найдем объем облака при температуре +15°C по формуле (2):

$$V_{TBC} = (2240\chi M_T T) / (\mu C_{ст} T_0) =$$

$$= (2240 \cdot 0,5 \cdot 2327,13 \cdot 288) / (44 \cdot 4,03 \cdot 273) = 15506,39 \text{ м}^3.$$

В качестве молекулярной массы бралась величина $\mu = 44$ для пропана, поскольку в смеси его преобладающее количество и это соответствует большему размеру облака, т. е. более неблагоприятному сценарию.

Найдем радиус облака:

$$r_0 = 0,78 \cdot \sqrt[3]{V_{TBC}} = 0,78 \cdot \sqrt[3]{15506,39} = 19,45 \text{ м.}$$

Под действием ветра облако переносится от центра его образования на расстояние ΔL . Найдем дальность сноса облака по классу устойчивости атмосферы A :

$$\Delta L = (0,44 \cdot r_0/\alpha)1/k = (0,44 \cdot 19,45/0,43)1/0,89 = 28,8 \text{ м.}$$

Аналогично найдем ΔL при разрыве автоцистерны емкостью $5,07 \text{ м}^3$ для остальных классов устойчивости атмосферы и для разных температур окружающей среды. Полученные данные представлены в табл. 3.

Таблица 3

Дальность сноса облака в зависимости от класса устойчивости атмосферы и температуры для емкости $5,07 \text{ м}^3$

Класс устойчивости атмосферы	Дальность сноса облака ΔL , м	
	$T=+15^\circ\text{C}$	$T=-15^\circ\text{C}$
A	28,8	–
B	44,6	–
C	59,32	57,0
D	94,75	91,01
E	114,15	109,64
F	237,67	228,58

Как видно из табл. 3, при положительной температуре наблюдается несколько большее значение дальности сноса. Однако, в целом, влияние температуры не такое значительное. Первые два значения при отрицательной температуре на рассчитывались, поскольку они относятся к типично летним условиям.

Влияние класса устойчивости, согласно табл. 3, велико. Поэтому с точки зрения расчета максимально неблагоприятного сценария целесообразно моделировать случай F при положительной температуре, что и было сделано в работе.

Таким образом, рассчитанные выше опасные зоны для зданий и людей (при $V = 5,07 \text{ м}^3$) следует увеличить на $\Delta L \approx 238 \text{ м}$.

Аналогично были проведены расчеты для других объемов емкостей, используемых в перевозке и хранении пропан-бутановых смесей. Приведем табл. 4 (см. ниже) с уточненными данными опасных зон с учетом сноса облака ветром. Брался неблагоприятный сценарий с устойчивостью атмосферы по типу F с температурой $+150^{\circ}\text{C}$. Для емкостей 10 и 31 м³ рассчитанные величины ΔL составили 302 и 452 м соответственно. Таким образом при росте объема примерно в 6 раз (с 5,07 до 31 м³) дальность сноса увеличивается примерно в 2 раза, т. е. зависимость сильно нелинейная.

Таблица 4

Максимальные опасные зоны с учетом сноса облака ветром

Емкость автоцистерны, м ³	R _{разр} , м (ΔP, кПа)	R _{вос} , м (ΔP, кПа)	Вероятность разрыва перепонок и радиусы таких зон, м	
			0 %	50 %
5,07	290 (87,3)	538 (9,7)	398	283
10	367 (87,8)	678 (9,7)	502	359
31	547 (87,4)	1001 (9,7)	742	535

Оценки показывают, что для зданий радиусы R_{раз} зон разрушения при учете сноса облака увеличиваются примерно в 5–6 раз. Зоны восстановления показывают меньший рост — примерно в 2 раза. Последнее связано с относительно большим их значением. Аналогичная ситуация наблюдается и для зон с повреждением барабанных перепонок.

Полученные результаты необходимо учитывать при хранении и транспортировке больших количеств сжиженной пропан-бутановой смеси. Также с учетом возможного сноса ΔL следует располагать жилые, производственные здания и сооружения вблизи опасных объектов сжиженного газа.

4. Сравнение результатов расчетов с программой «Инженерные расчеты»

Прогноз последствий взрыва и оперативной обстановки по поражениям людей и разрушению зданий — одна из главных задач, решаемых

на опасных объектах, а также в МЧС. Для этих целей в МЧС существуют специализированные программы.

В учебных целях используется разработанная в 2001 году программа «Инженерные расчеты», предложенная МЧС по Республике Коми. Она написана достаточно давно и последние изменения сделаны 9 лет назад. В описании программы не приведен формульный аппарат и нет ссылки на нормативные документы. В связи с тем что правильные, наиболее точные прогностические расчеты последствий взрыва ТВС дает именно утвержденная нормативная методика [6], представляется важным проверить работу данной программы. Неверные оценки избыточного давления взрыва могут повлечь занижение размеров опасных зон, человеческие жертвы и повреждения объектов инфраструктуры.

С целью достоверности результатов программы был использован следующий метод. Рассчитывались избыточные давления взрыва для емкостей от 5,07 до 50 м³ в программе и по методике для последующего сравнения. В программу подставляли соответствующую массу газа. При этом расстояние было фиксированным — 100 м. Снос облака в данном случае не учитывался, так как в программе отсутствует такой пункт меню (см. рис. 1). Результаты определения ударной волны и процента отклонения приведены в табл. 5.

Таблица 5

Сравнение величин ударных волн, рассчитанных по программе МЧС и по методике [6]

Емкость, м ³	Δ Руд. волны по программе, кПа	Δ Руд. волны по методике [6]	Отклонение %
5,07	39,74	39	1,9
10	49,92	51	2,1
15	64,95	60	8,3
20	74,56	68	9,7
31	96,73	82	17,9
45	130,22	96	35,6
50	139,53	101	38,1

Как видно из табл. 5, значительное возрастание процента отклоне-

Взрыв газоздушных смесей

Количество вещества, кг: 6885

Способ хранения: Сжиженные под давлением

Вид вещества: Пропан

Расстояние от центра взрыва, м: 100

Результат Печать результатов

Радиус зоны действия детонационной волны, м: 28,56

Давление ударной волны, кПа (для перевода в кгс/кв.см разделите результат на 100): 64,95

Расстояние от центра взрыва с давлением 100 кПа (1 кг/кв.см), м

50 кПа (0,5 кг/кв.см)	114,24
30 кПа (0,3 кг/кв.см)	171,35
20 кПа (0,2 кг/кв.см)	228,47
10 кПа (0,1 кг/кв.см)	342,7

Рис. 1. Окно программы инженерных расчетов МЧС

ния наблюдается при $V > 20 \text{ м}^3$. Отметим, что совпадение результатов по разным методикам можно считать приемлемым обычно при расхождении в пределах 10 %. Отклонения в 18 %, 36 % и 38 % уже говорят о разных результатах. Причина, скорее всего, в другом формульном аппарате, в том, что, по-видимому в программе инженерных расчетов МЧС используется упрощенная модель расчета взрыва. Также очевидно, что программа не учитывает и такой важный фактор, как снос облака ветром. Поэтому можно сделать вывод о применимости данного программного продукта только для взрыва емкостей небольшого объема — примерно до 20 м^3 в безветренную погоду. При большем объеме следует рассматривать используемую в данной работе методику [6] и [7], учитывающую движение воздуха.

4. Выводы по работе

По результатам проделанной работы можно сделать следующие вы-

воды:

1. Более точный прогноз последствий взрыва, приближенный к реальной ситуации, необходимо проводить по утвержденным методикам и с учетом сноса облака ветром.

2. Снос облака ветром ΔL мало зависит от температурных показателей среды.

2. На величину ΔL определяющее влияние оказывает класс устойчивости атмосферы.

3. При росте объема газа в 6 раз дальность сноса образующегося облака возрастает примерно в 2 раза, т. е. зависимость нелинейная.

4. Для зданий радиусы $R_{\text{раз}}$ зон разрушения при учете сноса облака увеличиваются примерно в 5–6 раз. Зоны восстановления расширяются примерно в 2 раза. Аналогичная ситуация наблюдается и для зон с повреждением барабанных перепонок людей.

5. Программа расчета взрывов, используемая МЧС, не учитывает влияние движения воздуха и имеет точность вычислений в пределах 10 % для емкостей газа $V \leq 20 \text{ м}^3$. Для больших емкостей ее применение дает большую ошибку.

6. Результаты работы позволяют более приближенно к действительности предсказать последствия взрывов газовых смесей для зданий и людей.

Список литературы

1. **Рачевский Б. С.** Сжиженные углеводородные газы М.: Нефть и газ, 2009. 164 с.
2. Газовозы. Автоцистерны СУГ. URL: <https://rodisgroup.ru> (дата обращения: 14.10.2020).
3. **Храмов Г. Н.** Горение и взрыв. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2007. 278 с.
4. **Vaidogas, ER (Vaidogas, Egidijus Rytas); Kisezauskiene, L (Kisezauskiene, Lina); Girniene, I (Girniene, Ingrida).** The risk to structures built near roads and rails used for moving hazardous materials // *Journal of civil engineering and management*. Volume: 22, Issue: 3, Pages: 442–455. DOI:10.3846/13923730.2015.1120773. Published: APR 2 2016. Document Type: Article.

5. **Bariha, N (Bariha, Nilambar); Mishra, IM (Mishra, Indra Mani); Srivastava, VC (Srivastava, Vimal Chandra).** The risk to structures built near roads and rails used for moving hazardous materials // *Journal of civil engineering and management*. Volume: 40, Pages: 449–460. DOI: 10.1016/j.jlp.2016.01.020. Published: MAR 2016. Document Type: Article.
6. Руководство по безопасности «Методика оценки последствий аварийных взрывов топливно-воздушных смесей». Серия 27. М.: Закрытое акционерное общество «Научно-технический центр исследования проблем промышленной безопасности», 2015. Вып. 15. 44 с.
7. РБ Г-05-039-96. «Руководство по анализу опасности аварийных взрывов и определению параметров их механического действия» (утв. Постановлением Госатомнадзора России от 31.12.1996 № 100).
8. **Головатая О. С., Петраков А. П., Шилов С. В.** Моделирование опасных факторов взрыва автоцистерн с сжиженным газом // *Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (6–8 декабря 2018 г., г. Сыктывкар) : сборник материалов. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2018. С. 49–51.*

Summary

Shilov S. V. Simulation of explosions of gas-air mixtures taking into account the cloud drift by wind

The paper simulates the damaging effect of a shock wave during an explosion of a liquefied propane-butane mixture. Calculations were performed using two methods. The first one was used to calculate the zones of destruction of buildings and destruction of people. For the second one, the values of the drift of the gas-air mixture cloud by the wind were determined. With this in mind, the possible danger zones were much wider. Thus, the zones of destruction of buildings and damage to people due to the spread of clouds along the earth's surface increase by about five to six times. These facts must be taken into account when placing objects that use liquefied gases, as well as when transporting such gases. A probabilistic model was used to determine hazardous areas. As zones of possible destruction of buildings, such distances are conventionally accepted

at which the probability of destruction is 90 %. Similarly, for people in dangerous areas, the probability of damage to the eardrums was 90 % or higher.

Keywords: shock wave, defeat, liquefied gas.

References

1. **Rachevsky B. S.** *Szhizhennyye uglevodorodnyye gazy* [Liquefied petroleum gases], Moscow, Oil and gas Publ, 2009, 164 p.
2. *Gazovozy. Avtotsisterny SUG* [Gas carrier. Tankers. Liquefied petroleum gas]. Available at: <https://rodisgroup.ru> (Accessed 14 October 2020).
3. **Hramov G. N.** *Goreniye i vzryv* [Burning and explosion]. Saint-Petersburg, St. Petersburg State Technical University Publ, 2007. 278 p.
4. **Vaidogas, ER (Vaidogas, Egidijus Rytas); Kisezauskiene, L (Kisezauskiene, Lina); Girniene, I (Girniene, Ingrida).** The risk to structures built near roads and rails used for moving hazardous materials, *Journal of civil engineering and management*. Volume: 22, Issue: 3, Pages: 442–455. DOI:10.3846/13923730.2015.1120773. Published: APR 2 2016. Document Type: Article.
5. **Bariha, N (Bariha, Nilambar); Mishra, IM (Mishra, Indra Mani); Srivastava, VC (Srivastava, Vimal Chandra).** The risk to structures built near roads and rails used for moving hazardous materials, *Journal of civil engineering and management*. Volume: 40, Pages: 449–460. DOI: 10.1016/j.jlp.2016.01.020. Published: MAR 2016. Document Type: Article.
6. *Rukovodstvo po bezopasnosti «Metodika otsenki posledstviy avariynykh vzryvov toplivno-vozdushnykh smesey»* [Safety Guide «Methods for assessing the effects of emergency explosions of fuel-air mixtures»]. Series 27. Issue 15. Moscow, Closed Joint Stock Company «Scientific and Technical Center for the Study of Industrial Safety Problems», 2015. 44 p.
7. *RB G-05-039-96. «Rukovodstvo po analizu opasnosti avariynykh vzryvov i opredeleniyu parametrov ikh mekhanicheskogo deystviya»* [RB

G-05-039-96. «Guidelines for analyzing the danger of emergency explosions and determining the parameters of their mechanical action»] (approved. By the resolution of Gosatomnadzor of Russia of 31.12.1996 N 100).

8. **Golovataya O. S., Petrakov A. P., Shilov S. V.** Modeling of explosion hazards of liquefied gas tankers, *Matematicheskoye modelirovaniye i informatsionnyye tekhnologii: Natsional'naya (Vse-rossiyskaya) nauchnaya konferentsiya (6–8 dekabrya 2018 g., g. Syktyvkar) : sbornik materialov* [Mathematical modeling and information technologies: national (all-Russian) scientific conference (December 6–8, 2018, Syktyvkar): collection of materials]. Syktyvkar: publishing house of SSU. Pitirima Sorokina, 2018, pp. 49–51.

Для цитирования: Шилов С. В. Моделирование взрывов газоздушных смесей с учетом сноса облака ветром // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 2 (39). С. 44–57. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_44

For citation: Shilov S. V. Simulation of explosions of gas-air mixtures taking into account the cloud drift by wind, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 44–57. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_44

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 22.10.2020

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (39). 2021*

УДК 37.013.75

DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_58

РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИИ ГАРАНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТУДЕНТАМИ КУРСА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Л. Н. Губарь, Н. И. Попов

В статье представлены результаты педагогического эксперимента, связанного с исследованием использования в образовательном процессе технологии гарантированного обучения при изучении студентами раздела математики «Теория вероятностей и математическая статистика». Проведенное исследование подтвердило, что применение указанной технологии позволяет значительно повысить уровень математических знаний и эффективность обучения студентов.

Ключевые слова: технология гарантированного обучения, технологическая карта, теория вероятностей и математическая статистика, алгоритм решения математических задач, педагогический эксперимент.

Современный этап развития науки и образования характеризуется не только использованием компьютерных и информационных технологий, но и значимой ролью математики в теории познания и различных областях практической деятельности людей. В частности, в настоящее время математические и статистические методы интенсивно применяются при решении прикладных задач в разных сферах экономики. Широкое использование вероятностно-статистических методов обусловлено мощным развитием новых информационных технологий, машинного обучения, искусственного интеллекта, потребностью в проведении более

тонкого анализа полученных результатов экспериментальной деятельности, увеличением различных процессов в производстве и экономике [1, с. 76]. Знание и понимание методов математической статистики, обработки данных, корреляционно-регрессионного анализа, умение проектировать и применять математические методы и современные программные продукты в решении прикладных задач для выявления случайных ошибок и оценивания текущего состояния экономических процессов и их прогнозирования, применение аналитических навыков для синтезирования и структурирования больших данных необходимы как специалисту в области экономики, так и профессионалу, обладающему компетенциями в области машинного обучения и больших данных [2, с. 44].

Современное общество испытывает революционные изменения, вызванные интенсивным внедрением новых технологий во многие сферы жизнедеятельности человека. В этих новых условиях, по мнению М. А. Чошанова и В. М. Монахова, учитель становится проектировщиком, конструктором, реализатором, аналитиком, исследователем [3; 4].

Проблемы эффективного применения различных технологий и методов обучения математике и смежных с ней дисциплин находят отражение в работах многих отечественных и зарубежных ученых. В статье [5] приведено сравнительное исследование эффективности различных образовательных методик на примере усвоения студентами теории вероятностей и математической статистики. Исследователи отмечают, как правило, в вузах преподаватель математики и дисциплин, тесно связанных с ней, остается главным «действующим лицом», который стремится донести до студентов за ограниченное время наибольший объем учебного материала. При этом обучаемым отводится роль «пассивных слушателей», которые стараются воспроизвести решение задач по определенному алгоритму. Следует отметить, что такой подход в обучении негативно сказывается на эмоциональном состоянии студентов, для которых в эпоху компьютерных технологий доминируют быстрый обмен информацией небольшими порциями и активные формы ее усвоения.

Анализируя методику преподавания математических дисциплин в Сингапуре, И. С. Сафуанов отмечает особенности математического образования указанной страны, представляющего собой пятикомпонентную схему, которая включает в себя: 1) понятия; 2) умения концепту-

ально и осмысленно оперировать различными вычислительными алгоритмами; 3) процессы, в ходе которых обучаемые учатся находить и строить связи между математическими понятиями, разрабатывать и моделировать стратегии их применения; 4) заинтересованность к учебному предмету; 5) метакогнитивные направления развития, позволяющие самостоятельно осуществлять поиск методов решения прикладных задач. По мнению ученого, мировая практика системы обучения математике основывается на трех составляющих: когерентности, т. е. последовательности, взаимосвязанности и согласованности всех разделов учебной программы; сфокусированности — материал должен быть распределен по основным темам, изучение которых происходит более детально; строгости — с использованием подхода от конкретного к визуальному и далее к абстрактному [6].

К известным зарубежным авторам педагогических технологий обучения, в частности, относятся Дж. Кэрролл, Б. Блум, В. Коскарелли. В России осуществление технологических подходов к обучению отражено в научных трудах Н. Ф. Талызиной, П. Я. Гальперина, В. П. Беспалько, Ю. К. Бабанского, М. В. Кларина и других исследователей [7]. Монография В. М. Монахова [8] посвящена анализу различных технологий обучения. Ученый в своих работах рассматривал принципы необходимости интеграции педагогических и информационных технологий, которые способны обеспечить в образовании реализацию глобальной дидактической цели — создание современной динамичной системы умений и знаний, представляющей в будущем современный механизм исследования и решения широкого спектра задач и проблем. Высокая степень предсказуемости результата — главная особенность технологии гарантированного обучения, предложенной В. М. Монаховым. В ее методологической основе лежит информационная модель учебного процесса, конструирование которого направлено на достижение качества результатов обучения, соответствующих федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС), а также создание комфортных условий для обучаемых; выделяются два важных этапа: проектирование и реализация учебного процесса.

Концепция указанной технологии, связанная с эффективностью усвоения знаний, гарантированным характером результата, стимулированием ответственности и заинтересованности обучающихся, была положена нами в основу проектирования процесса изучения курса

теории вероятностей и математической статистики. Содержание данной дисциплины в соответствии с ФГОС СПО, примерными основными образовательными программами по специальностям разделено на пять тем: «Элементы комбинаторики», «Основы теории вероятностей», «Дискретные случайные величины», «Непрерывные случайные величины», «Математическая статистика». Целеполагание, логическая структура учебного процесса, диагностика, коррекция и дозирование являются элементами технологической карты, конструирование которой осуществляется на этапе проектирования образовательного процесса. В дальнейшем продемонстрируем реализацию технологии гарантированного обучения в образовательном процессе студентов Колледжа экономики, права и информатики СГУ им. Питирима Сорокина при освоении темы «Основы теории вероятностей».

В педагогической технологии ключевым моментом является разработка содержания микроцелей, в силу того что целеполагание является фундаментом для остальных элементов технологической карты. Количество микроцелей напрямую зависит от объема учебной темы, а содержание должно быть сформулировано так, чтобы для преподавателя была очевидна методическая система установления факта ее достижения обучаемыми. В рассматриваемой теме выделены четыре микроцели: B_1 , B_2 , B_3 , B_4 (см. табл. 1).

Таблица 1

Микроцели по теме «Основы теории вероятностей»

Микроцель	Содержание микроцели
B_1	Умение вычислять вероятности событий по определению
B_2	Умение вычислять вероятности событий по заранее известным вероятностям других событий, связанных с ними
B_3	Умение вычислять вероятности событий по формуле полной вероятности; вычисление вероятности одной из гипотез по формуле Байеса
B_4	Умение вычислять вероятности числа k «успехов» в n повторных независимых испытаниях

Факт достижения (недостижения) конкретной микроцели устанавливается на этапе «Диагностика» (СР). Технологическая сущность этого блока основана на диагностических аксиомах, нарушение или невы-

полнение которых ставит преподавателя в состояние неоднозначности. Стандартный вариант проверки умений и навыков включает в себя четыре задания, которые дифференцированы по уровню сложности и проектируются исходя из содержания микроцелей. Успешное выполнение двух первых заданий подтверждает соответствие уровня усвоения материала требованиям ФГОС и оценивается «удовлетворительно». Указанный нижний порог обязаны преодолеть все обучающиеся. Выполнение трех первых заданий соответствует оценке «хорошо», а четырех – «отлично». Следует отметить важность дифференцирования предлагаемых заданий по уровню сложности («удовлетворительно» «хорошо», «отлично»), это позволяет устранить учебную перегрузку студентов, кроме того, обучаемым предоставляется право выбора уровня сложности заданий для получения потенциальной оценки, соответствующей в данный момент их ценностным мотивационным установкам. Такой фактор меняет отношение обучающихся к процессу обучения, который становится осознанным; особенностью проведения самостоятельных работ такого типа является простота контроля и оценки обучаемых.

В соответствии с диагностическими аксиомами приведем образец содержания самостоятельной работы для каждой микроцели (см. табл. 2).

Таблица 2

Диагностика по теме «Основы теории вероятностей»

Микроцель	Содержание блока «Диагностика»	
B_1	CP_1	1) С использованием классического определения вероятности найти вероятность рассматриваемого события
		2) С применением геометрического определения вероятности найти вероятность рассматриваемого события
		3) С использованием классического определения вероятности и элементов комбинаторики найти вероятность рассматриваемого события
		4) С применением геометрического определения вероятности найти вероятность рассматриваемого события, число благоприятствующих исходов которой задано системой неравенств

Продолжение таблицы 2

Микроцель	Содержание блока «Диагностика»	
B_2	CP_2	<p>1) С использованием теоремы сложения вероятностей несовместных событий или теоремы умножения независимых событий найти вероятность рассматриваемого события</p> <p>2) С применением теоремы сложения вероятностей совместных событий или теоремы умножения зависимых событий найти вероятность рассматриваемого события</p> <p>3) С использованием теорем сложения и умножения вероятностей событий, следствий из них для противоположных событий найти вероятность рассматриваемого события</p> <p>4) С применением теорем сложения и умножения вероятностей событий найти вероятности наступления рассматриваемого события: а) «не менее чем k раз», б) «менее чем k раз», в) «более чем k раз», г) «не более чем k раз», д) «хотя бы один раз»</p>
B_3	CP_3	<p>1) Вычислить вероятность рассматриваемого события, используя формулу полной вероятности при известных вероятностях гипотез и соответствующих условных вероятностях</p> <p>2) Вычислить вероятность рассматриваемого события, используя формулу Байеса</p> <p>3) Вычислить вероятность рассматриваемого события, используя формулу полной вероятности при известных вероятностях гипотез и неизвестных соответствующих условных вероятностях, провести переоценку одной из гипотез по формуле Байеса</p> <p>4) Вычислить вероятность рассматриваемого события, используя формулу полной вероятности при неявном задании вероятностей гипотез и неизвестных соответствующих условных вероятностях, провести переоценку одной из гипотез по формуле Байеса</p>

Окончание таблицы 2

Микроцель	Содержание блока «Диагностика»	
В ₄	СП ₄	1) Вычислить вероятность числа k «успехов» в n повторных независимых испытаниях, используя формулу Бернулли 2) Вычислить вероятность числа k «успехов» в n повторных независимых испытаниях, используя формулу Пуассона 3) Вычислить вероятность числа k «успехов» в n повторных независимых испытаниях, используя локальную и интегральную теоремы Лапласа 4) Вычислить вероятность наступления рассматриваемого события в n испытаниях: а) «менее k раз»; б) «более k раз»; в) «не менее k раз»; г) «не более k раз», используя формулы Бернулли или Пуассона. Найти наиболее вероятное число наступления события

Отметим, что значимым фактором для педагога-предметника является детальный анализ соответствия между запланированным содержанием диагностики и микроцели после заполнения блока «Диагностика». Согласно педагогической технологии В. М. Монахова, на этапе диагностики устанавливается факт достижения уровня усвоения материала обучающимся, отвечающий требованиям ФГОС. Безошибочное выполнение студентом первых двух упражнений предполагает выполнение минимальных требований и получение им удовлетворительной оценки. В том случае, когда при решении обеих задач допущены ошибки, обучаемый попадает в коррекционную группу для повторения пройденного материала и его закрепления с помощью решения дополнительных заданий. Если ошибка допущена только в одном из первых двух заданий, то у студента есть возможность рассчитывать на получение удовлетворительной оценки после выполнения дозированного объема заданий из блока «Внеаудиторная самостоятельная деятельность обучающихся», предназначенного для подготовки обучаемых к повторной диагностике по соответствующей микроцели. Важно подчеркнуть, что такое дозирование выполняет еще и воспитательную функцию, так как обучаемый самостоятельно выбирает меру ответственности за резуль-

тат учебы [9, с. 290].

Особо отметим, что выполнение самостоятельных работ является логическим завершением зон ближайшего развития студента, число и временная продолжительность которых определяются количеством и содержанием микроцелей и отражаются в логической структуре учебного процесса (см. табл. 3).

Таблица 3

**Логическая структура учебного процесса по теме
«Основы теории вероятностей»**

Форма проведения занятия	Микроцель				Общее число часов
	B_1	B_2	B_3	B_4	
Лекция	2	2	2	2	8
Практическое занятие	4	4	2	4	14
Общее число часов	6	6	4	6	22

Компонент технологической карты «Коррекция» рассчитан на обучающихся, которые не получили оценку «удовлетворительно» в процессе диагностики. Данный этап предполагает использование системы педагогических методов и средств при оказании помощи студентам в преодолении наиболее часто встречающихся ошибок и возможных затруднений при освоении конкретной микроцели, а также позволяет им достичь необходимого уровня требований ФГОС. Приведем фрагмент технологической карты по теме «Основы теории вероятностей» (см. табл. 4–5). С целью обоснования того, что указанная технологическая карта по курсу теории вероятностей и математической статистики позволяет обеспечить достижение необходимого качества образовательных результатов обучающихся, соответствующих ФГОС СПО, в 2020–2021 учебному году на базе Колледжа экономики, права и информатики СГУ им. Питирима Сорокина была проведена ее апробация.

Всего в педагогическом эксперименте было задействовано 85 студентов, обучающихся по следующим ИТ-специальностям: «Сетевое и системное администрирование», «Информационные системы и программирование» и «Компьютерные сети». Все обучающиеся были разделены на две группы – контрольную (40 студентов) и экспериментальную (45 обучающихся).

Таблица 4

**Фрагмент технологической карты по теме
«Основы теории вероятностей»**

Целеполагание	Диагностика	Коррекция
<p>B_3 Умение вычислять вероятности событий по формуле полной вероятности. Вычисление вероятности одной из гипотез по формуле Байеса</p>	<p>Задание № 1. Покупатель может купить одежду большого размера в одном из трех магазинов, которые расположены в разных микрорайонах города Сыктывкар. В магазин «Богатырь» он может пойти с вероятностью 0,5; в «XXL» — с вероятностью 0,3; «МегаХенд» — с вероятностью 0,2. Вероятность того, что одежда нужного размера есть в магазине «Богатырь» равна 0,9; в «XXL» — 0,85; в «МегаХенд» — 0,95. Какова вероятность того, что покупатель купит одежду нужного размера?</p>	<p>[10]: Задачи 4.1 — 4.3</p>
	<p>Задание № 2. За место в Совете директоров корпорации борются две группы. Вероятности того, что первая и вторая группы выиграют, равны 0,6 и 0,4 соответственно. Далее, если выигрывает первая группа, вероятность производства нового продукта равна 0,7, если выигрывает вторая, то соответствующая вероятность равна 0,3. Какова вероятность того, что новый продукт был представлен второй группой?</p>	
	<p>Задание № 3. Известно, что некий человек говорит правду в трех случаях из четырех. Он бросает кубик и сообщает, что это шестерка. Какова вероятность, что это действительно шестерка?</p>	

Продолжение таблицы 4

Целеполагание	Диагностика	Коррекция
	<p>Задание № 4. Имеются три одинаковых кошелька, в каждом из которых по две монеты. Известно, что в кошельке I обе монеты являются золотыми, в кошельке II — обе серебряные, а в третьем кошельке — одна золотая и одна серебряная монеты. Студент выбирает наугад кошелек и достает монету. Если монета из золота, то какова вероятность того, что вторая монета в кошельке также золотая?</p>	
<p><i>B₄</i> Умение вычислять вероятности числа «успехов» в <i>n</i> повторных независимых испытаниях</p>	<p>Задание № 1. Известно, что в 80 % случаев применение некоторого метода лечения приводит к полному выздоровлению пациента. Лечение по данной методике проходили пять пациентов. Какова вероятность того, что четверо из них полностью будут здоровыми?</p> <p>Задание № 2. Пульмонологическое отделение городской больницы получило 1000 бутылок физраствора (NaCl) для проведения ингаляций. Известно, что герметичность бутылки может быть нарушена при транспортировке с вероятностью 0,003. Какова вероятность, что пульмонологическое отделение получит хотя бы одну бутылку с нарушением герметичности?</p>	<p>[10]: Задачи 5.1 — 5.4</p>

Окончание таблицы 4

Целеполагание	Диагностика	Коррекция
	<p>Задание № 3. Лица, управляющие транспортными средствами, обязаны правильно реагировать на цветовые сигналы, так как это непосредственно связано с безопасностью движения на дорогах. Известно, что 5 % всех мужчин – дальтоники. Медицинское обследование для получения водительского удостоверения в течение месяца проходят в среднем 2000 мужчин. Какова вероятность, что в течение текущего месяца будет выявлено дальтоников: а) 100 человек; б) от 100 до 150 человек.</p> <p>Задание № 4. У водителей категорий А и В, использующих автомобиль или мотоцикл, острота зрения должна быть не ниже 0,8. Известно, что у каждого пятого человека острота зрения ниже этой нормы. Какова вероятность того, что среди 8 человек, проходящих медицинский осмотр, остроту зрения не ниже 0,8 будут иметь: а) 6 человек; б) менее 6 человек; в) не менее 6 человек; г) более 6 человек; д) не более 6 человек; е) найти наивероятнейшее число кандидатов в водители, имеющих остроту зрения не ниже 0,8.</p>	

Следует отметить, что для дальнейшего сравнения результатов указанных групп предварительно было установлено отсутствие значимой разницы в качестве знаний студентов экспериментальной и контрольной выборок с помощью входного тестирования, целью которого была проверка остаточных знаний обучаемых по базовому курсу «Математика». Результаты проверочной работы подтвердили однородность состава участников эксперимента по всей рассматриваемой совокупности.

Выделим, что обучение в контрольной группе проводилось традиционными методами. В образовательном процессе экспериментальной группы применялась технология гарантированного обучения, в качестве средств обучения дополнительно использовались опорные конспек-

Таблица 5

Внеаудиторная самостоятельная деятельность обучающихся

Внеаудиторная самостоятельная деятельность обучающихся			
	оценка «удовлетворительно»	оценка «хорошо»	оценка «отлично»
B_1	[10]: № 1.1 – 1.3, 2.1 – 2.3; [11]: № 5, 18	[10]: № 1.4 – 1.6, 2.4 – 2.6; [11]: № 6, 22	[10]: № 1.7 – 1.10, 2.7 – 2.10; [11]: № 26, 32, 41
B_2	[10]: № 3.1 – 3.3; [11]: № 51, 53	[10]: № 3.4 – 3.6; [11]: № 69, 80, 82	[10]: № 3.7 – 3.10; [11]: № 63, 70, 85
B_3	[10]: № 4.1 – 4.3; [11]: № 91, 98	[10]: № 4.4 – 4.6; [11]: № 92, 101	[10]: № 4.7 – 4.10; [11]: № 96, 107
B_4	[10]: № 5.1 – 5.3; [11]: № 111, 121, 147	[10]: № 5.4 – 5.6; [11]: № 113, 126, 151	[10]: № 5.7 – 5.10; [11]: № 115, 130, 154

ты, интеллект-карты, электронные образовательные ресурсы, электронный курс в системе дистанционного обучения LMS Moodle, а также специальные алгоритмы решения математических задач. Первоначальное закрепление теоретического материала осуществлялось с помощью репродуктивного метода обучения, при этом решение математических задач было организовано по предложенному преподавателем алгоритму. Пример такого специального алгоритма приведен на рис. 1.

Предложенный методический прием способствует эффективному решению математической задачи и уменьшению времени усвоения учебного материала. Но все-таки строгая алгоритмизация решения может оказать влияние на развитие творческого подхода обучающихся к выполнению заданий, развитие гибкости и самостоятельности мышления. С учетом последнего фактора для дальнейшего эффективного усвоения обучаемыми теоретического материала и формирования необходимых умений в применении математических методов в решении прикладных задач авторы статьи в своей педагогической деятельности используют и другие методические подходы, в частности интеллект-карты (mind map) и опорные конспекты (см. рис. 2, 3). Следует подчеркнуть, что обращение к визуализации решения задач мы рассматриваем как воплощение одного из фундаментальных принципов дидактики — наглядности в обучении.

**Алгоритм решения типовых математических задач по разделу
«Формула полной вероятности. Формула Байеса»**

Умения: Вычисление вероятностей событий по формуле полной вероятности. Вычисление вероятности одной из рассматриваемых гипотез по формуле Байеса.

Номер шага	Выделение элементарных составляющих задачи
Шаг 1	Охарактеризовать все гипотезы, обозначив их B_1, B_2, \dots, B_n . Обозначить рассматриваемое событие через A .
Шаг 2	Вычислить вероятности каждой из гипотез: $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Проверить выполнение условия: $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$.
Шаг 3	Вычислить условную вероятность события A по каждой гипотезе: $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$.
Шаг 4	Вычислить вероятность события A по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$.
Шаг 5	При необходимости вычислить вероятность гипотезы B_i при условии, что событие A произошло, по формуле Байеса: $P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$

Рис. 1. Алгоритм решения типовых математических задач по разделу «Формула полной вероятности. Формула Байеса»

Несмотря на то что визуализация решения математической задачи представляет собой сложный процесс преобразования конструкций, ментальных образов и представлений, она предполагает установление связи между информационными блоками о важных понятиях, ранее неизвестных, и пониманием изучаемого материала, которое постепенно развивается. В данном случае это способность и результат отражения, использования, интерпретации и создания изображений, образов и диаграмм в нашем сознании, на бумаге или с помощью технологических инструментов с целью представления информации. Визуализация проявляется не только в развитии математических мыслей, но и в открытии новых отношений между математическими объектами, а также в придании смысла значимым понятиям и существующим между ними отношениям. Несомненно, при таком подходе появляется возможность упростить значительные объемы учебной информации [12, с. 43].

Наряду с традиционными формами проверки знаний одним из авторов в учебном процессе использовались компьютерные тесты в системе дистанционного обучения LMS Moodle. Такой вид контроля и самоконтроля во многом способствует формированию сознательного отношения студентов к изучению дисциплины и усвоению математических понятий.

В процессе исследования для проверки значимости экспериментального фактора была выдвинута нулевая гипотеза H_0 о случайности, статистической незначимости различий между полученными результата-

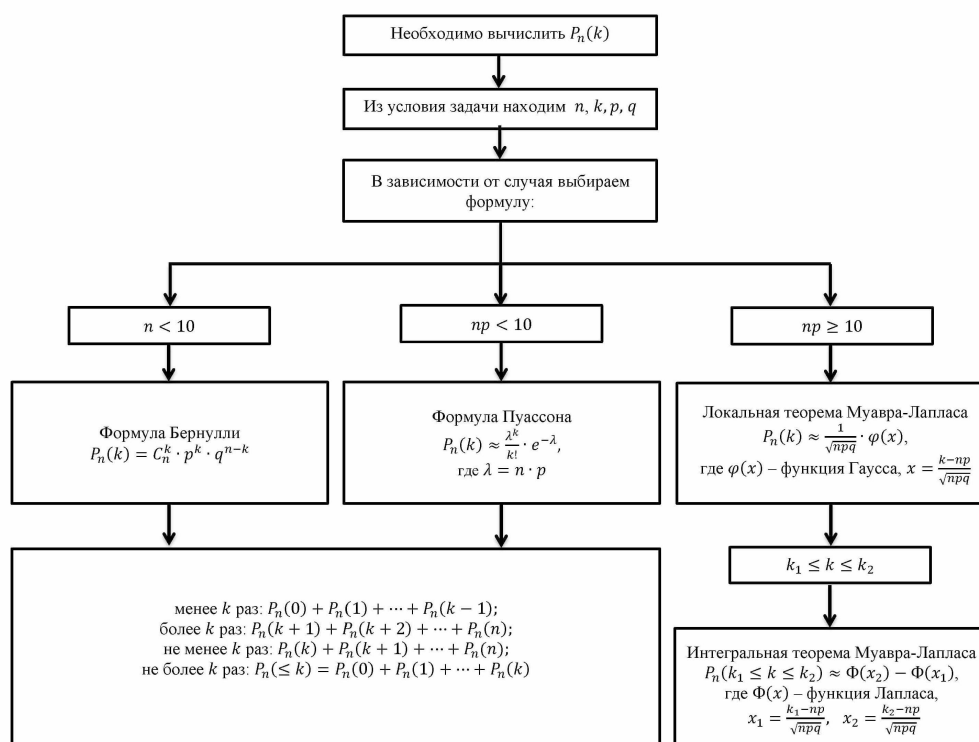


Рис. 2. Опорный конспект по теме «Повторные независимые испытания»

ми диагностики в контрольной и экспериментальной группах. Другими словами, предполагалось, что студенты, освоившие дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика» на основе технологии гарантированного обучения с дополнительным использованием ранее указанных средств обучения, более прочно овладевают необходимыми умениями и навыками, чем обучаемые контрольной группы. Для проверки гипотезы был использован t-критерий Стьюдента для связанных выборок. Формулы для расчетов по критерию Стьюдента (1–2):

$$t = \frac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{s} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}; \tag{1}$$

где

$$s^2 = \frac{1}{m+n-2} \left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_B)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_B)^2 \right].$$

В процессе педагогического эксперимента были получены следующие эмпирические значения статистик соответственно по первой, вто-

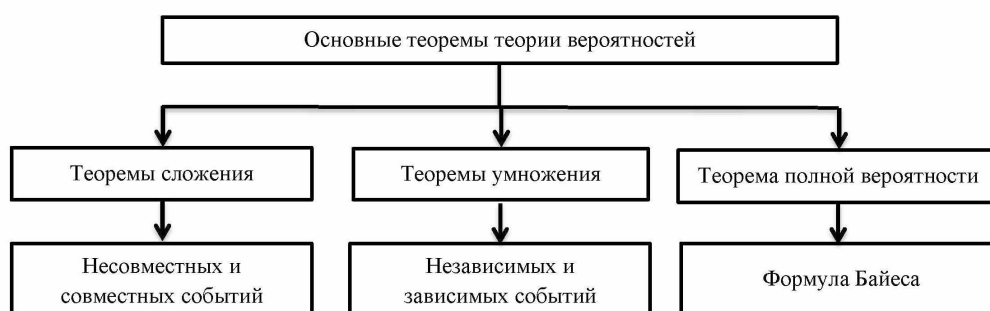


Рис. 3. Интеллект-карта «Основные теоремы теории вероятностей»

рой, третьей и четвертой диагностикам:

$$CP_1 : s^2 = 0,33; |t_B| = 6,19;$$

$$CP_2 : s^2 = 0,28; |t_B| = 7,62;$$

$$CP_3 : s^2 = 0,29; |t_B| = 7,18;$$

$$CP_4 : s^2 = 0,41; |t_B| = 5,77.$$

С использованием специальных таблиц критических значений статистики критерия Стьюдента по известному числу степеней свободы $v = 40 + 45 - 2 = 83$ и уровню значимости $= 0,05$ установили критическое значение $t_{(кр)}(0,05; 83) = 1,98$. Результаты исследования показали, что $|t_B| > t_{(кр)}$ по всем четырем диагностикам, соответствующим микроцелям B_1, B_2, B_3, B_4 по теме «Основы теории вероятностей» (см. табл. 1), следовательно, нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1 о том, что между контрольной и экспериментальной группами имеются значимые различия в подготовке студентов по указанной теме. Последний вывод дает основание полагать, что применение вышеописанной технологии повысило уровень математических знаний обучаемых по рассматриваемой теме и эффективность обучения студентов в целом. Кроме того, при таком технологическом проектировании обучения повышается и качество работы преподавателя, который получает возможность постоянно систематизировать свой опыт, разрабатывать структуру учебно-методических пособий, поскольку используемый дидактический материал апробируется в образовательном процессе, всесторонне анализируется и проходит экспериментальную проверку.

В процессе опытно-экспериментальной работы одним из авторов статьи, учитывая требования образовательного стандарта направлений среднего профессионального образования, были разработаны техноло-

гические карты для проведения занятий по следующим темам курса теории вероятностей и математической статистики: «Элементы комбинаторики», «Основы теории вероятностей», «Дискретные случайные величины», «Непрерывные случайные величины», «Математическая статистик». На заключительном этапе педагогического эксперимента с применением методов статистического анализа планируется завершить итоговые исследования, связанные со значимостью и эффективностью экспериментального фактора в описанной выборке обучаемых при усвоении всех указанных тем.

Список литературы

1. **Попов Н. И., Губарь Л. Н.** Межпредметные связи как основа формирования профессиональных компетенций, соответствующих стандартам WorldSkills, при изучении студентами теории вероятностей и математической статистики // *Вестник МГПУ. Сер. Информатика и информатизация образования. 2019. № 4 (50). С. 73–80.*
2. **Попов Н. И., Губарь Л. Н.** О межпредметных связях курса теории вероятностей и математической статистики при обучении студентов колледжа // *Восточно-европейский научный журнал. 2020. № 9 (61). С. 42–48.*
3. **Чошанов М. А.** Е-дидактика: новый взгляд на теорию обучения в эпоху цифровых технологий // *Образовательные технологии и общество. 2013. № 3. С. 684–696.*
4. **Монахов В. М.** Введение в теорию педагогических технологий : монография. Волгоград: Перемена, 2006. 319 с.
5. **Гефан Г. Д., Кузьмин О. В.** Сравнительный анализ эффективности образовательных методик на примере обучения теории вероятностей и математической статистике // *Вестник Томского государственного педагогического университета. 2017. № 4 (181). С. 49–56.*
6. **Сафуанов И. С., Атанасян С. Л.** Математическое образование в Сингапуре: традиции и инновации // *Наука и школа. 2016. № 3. С. 38–44.*

7. **Крившенко Л. П., Вайндорф-Сысоева М. Е.** Педагогика : учебник. М.: Проспект, 2010. 432 с.
8. **Монахов В. М., Сильченко А. П., Тихомиров С. А.** Генезис и функционал профессиональной педагогической деятельности в условиях информационной среды // *Ярославский педагогический вестник*. 2017. № 6. С. 112–122.
9. **Монахов В. М.** Педагогические аспекты интеграции педагогических технологий и информационных технологий как качественно новый этап информатизации математического образования // *Информатизация обучения математике и информатике: педагогические аспекты : материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию Белорусского государственного университета*. Минск, 2006. С. 287–291.
10. **Попов Н. И.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов : учебное пособие. Йошкар-Ола: Изд-во Мар. гос. ун-т, 2006. 76 с.
11. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.
12. **Yilmaz R., Argun Z.** Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept // *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*. 2018. 6 (1). Pp. 41–57.

Summary

Gubar L. N., Popov N. I. Implementation of the technology of guaranteed learning when students study the course of probability theory and mathematical statistics

The article presents the results of a pedagogical experiment related to the study of the use of guaranteed learning technology in the educational process when students study the section of mathematics “Probability theory and mathematical statistics”. The conducted research has confirmed that the application of this technology can significantly increase the level of mathematical knowledge and the effectiveness of teaching students.

Keywords: guaranteed learning technology, technological map, probability theory and mathematical statistics, algorithm for solving mathematical problems, pedagogical experiment.

References

1. **Popov N. I., Gubar L. N.** Interdisciplinary relations as the basis of formation of students' professional competences corresponding to the standards of WorldSkills, in study of probability theory and mathematical statistics by students, *Vestnik MGPU. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya»* [Vestnik MGPU ... Series Informatics and informatization of education], 2019, no 4 (50), pp. 73–80.
2. **Popov N. I., Gubar L. N.** About the interdisciplinary relations of the course of probability theory and mathematical statistics in teaching college students, *Vostochno-evropejskij nauchnyj zhurnal* [East European Scientific Journal], no 9 (61), Vol. 1, 2020, pp. 42–48.
3. **Choshanov M. A.** E-Didactics: a new look at learning theory in the digital age, *Obrazovatel'nye tekhnologii i obshchestvo* [Educational technologies and society], 2013, no 3, pp. 684–696.
4. **Monakhov V. M.** *Vvedenie v teoriyu pedagogicheskikh tekhnologij* [Introduction to the theory of pedagogical technologies: monografiya]. Volgograd: Peremena, 2006, 319 p.
5. **Gefan G. D., Kuz'min O. V.** Comparative analysis of the effectiveness of educational methods on the example of teaching the probability theory and mathematical statistics, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk State Pedagogical University], 2017, no 4 (181), pp. 49–56.
6. **Safuanov I. S., Atanasyan S. L.** Mathematical education in Singapore: traditions and innovations, *Nauka i shkola* [Science and school], 2016, no 3, pp. 38–44.
7. **Krivshenko L. P., Vajndorf-Sysoeva M. E.** *Pedagogika* [Pedagogy]: Uchebnik. M.: Iz-vo Prospekt, 2010, 432 p.

8. **Monakhov V. M., Silchenko A. P., Tikhomirov S. A.** Genesis and Function of Professional Pedagogical Activity in Terms of IEE, *Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik* [Yaroslavl Pedagogical Bulletin], 2017, no 6, pp. 112–122.
9. **Monakhov V. M.** Pedagogical aspects of the integration of pedagogical technologies and information technologies as a qualitatively new stage of informatization of mathematical education, *Informatizaciya obucheniya matematike i informatike: pedagogicheskie aspekty: Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvyashchennoj 85-letiyu Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta* [Informatization of teaching mathematics and computer science: pedagogical aspects : materials of the international scientific conference dedicated to the 85th anniversary of the Belarusian State University], Minsk, 2006, pp. 287–291.
10. **Popov N. I.** *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostej i matematicheskoy statistike dlya psihologov* [Guide to solving problems in probability theory and mathematical statistics for psychologists]. Uchebnoe posobie, Yoshkar-Ola: Izd-vo Mar. gos. un-t, 2006, 76 p.
11. **Gmurman V. E.** *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnostej i matematicheskoy statistike* [A Guide to problem solving in probability theory and mathematical statistics], Moscow: Higher school, 1979, 400 p.
12. **Yilmaz R., Argun Z.** Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept, *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 2018, 6(1), pp. 41–57.

Для цитирования: Губарь Л. Н., Попов Н. И. Реализация технологии гарантированного обучения при изучении студентами курса теории вероятностей и математической статистики // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 2 (39). С. 58–77. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_58

For citation: Gubar L. N., Popov N. I. Implementation of the technology of guaranteed learning when students study the course of probability theory and mathematical statistics, *Bulletin of Syktyovkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 58-77. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_58

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 24.05.2021

НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕЗЕРВУАРА РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

А. Б. Певный., Н. В. Кожгагельдиев

Резервуар равного сопротивления подобен капли жидкости, форму которой создает поверхностное натяжение, одинаковое во всех точках поверхности капли. Резервуар строится исходя из условия, что сопротивление (натяжение) одинаково во всех точках оболочки. Выводятся новые дифференциальные уравнения для определения формы меридиана оболочки. Приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: оболочка, форма капли, резервуар.

1. Введение

Настоящая заметка является продолжением работы [1]. Рассматривается оболочка каплевидной формы, которая может служить резервуаром для нефти. Форма капли жидкости создается поверхностным натяжением, которое одинаково во всех точках поверхности капли. Оболочка также строится исходя из условия, что во всех точках сопротивление (натяжение) одинаково. Уравнения для такой оболочки выведены в монографии [2]. В данной работе верхняя часть меридиана оболочки является графиком функции $z(x)$ и непосредственно для неё выводится дифференциальное уравнение второго порядка. Это проще, чем уравнение [3]. Аналогично уравнение выводится для нижней части меридиана. Уравнения легко решаются численно методом Рунге-Кутты. Приводятся результаты расчетов для жидкостей разного удельного веса, создающих разные нагрузки на оболочку.

2. Новые уравнения для резервуара равного сопротивления

Спроектируем резервуар для нефти каплевидной формы. Вид меридиана поверхности резервуара показана на рис. 1.

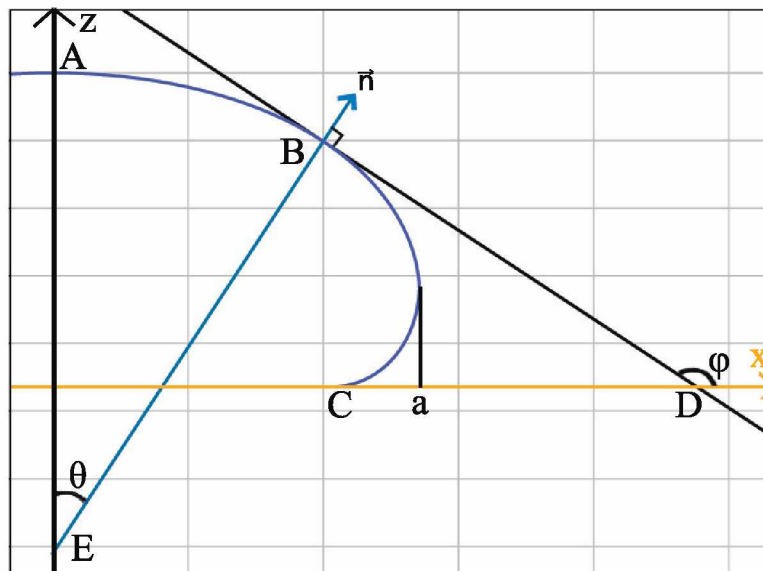


Рис. 1. Схема построения меридиана резервуара

Поверхность резервуара получается вращением меридиана ABC вокруг оси z . Если считать, что усилия во всех точках оболочки равны T_0 , то форма оболочки определяется из уравнения Лапласа

$$T_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_0 + \rho(H - z), \quad (1)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны оболочки, p_0 — давление в верхней точке A, ρ — удельный вес жидкости, H — высота резервуара ($H = OA$).

Используем криволинейную координату θ , где θ — угол между нормалью к меридиану и положительным направлением оси z .

Пусть верхняя часть меридиана — это график функции $z(x)$. Пусть $B(x; z)$ — точка на графике. Тогда $z'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной BD :

$$z'(x) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Легко видеть, что $\theta + \varphi = \pi$, поэтому

$$z'(x) = \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg}(\theta).$$

В [1, с. 112] пропущен знак $-$ перед $\operatorname{tg}\theta$. В [1, с. 112] указана важная формула

$$x = R_2 \sin \theta,$$

которая следует из формулы Кодацци – Гаусса для поверхностей вращения. Значит, радиус кривизны $R_2 = BE$, а отрезок BE получается продолжением нормали \vec{n} до пересечения с осью z . Получаем $1/R_2 = (\sin \theta)/x$.

Выразим $\sin \theta$ через $\operatorname{tg}\theta$:

$$\sin \theta = \operatorname{tg}\theta \cos \theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}, \quad (2)$$

где знак $+$ при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ и знак $-$ при $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Отсюда

$$\frac{1}{R_2} = \frac{-z'}{x\sqrt{1 + (z')^2}}.$$

По формулам для кривизны кривой имеем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{|z''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (z')^2}\right)^3}. \quad (3)$$

Функция $z(x)$ убывающая и выпуклая вверх, поэтому $z'(x) \leq 0$ и $z''(x) \leq 0$ для верхней части оболочки, причем $z'(0) = 0$.

$$T_0 \left(\frac{-z''}{\left(\sqrt{1 + (z')^2}\right)^3} + \frac{-z'}{x\sqrt{1 + (z')^2}} \right) = p_0 + \rho(H - z). \quad (3')$$

Умножим на $-1/T_0$ и положим $\alpha = p_0/T_0$, $\beta = \rho/T_0$. Получим дифференциальное уравнение

$$z'' = \frac{z'(x)}{x}(1 + (z')^2) - (\alpha + \beta(H - z))(\sqrt{1 + (z')^2})^3. \quad (4)$$

Особенность при $x = 0$ является устранимой, ибо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z''(x)}{1} = z''(0) = -1/R_1 \text{ (по формуле (3)).}$$

Для численного решения (4) введём функцию $y(x) = z'(x)$ и будем решать систему

$$\begin{cases} y' = F(x, y, z), \\ z' = y \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 0, z(0) = H$, где при $x > 0$.

$$F(x, y, z) = -\frac{y}{x}(1 + y^2)(\alpha + \beta(H - z))(\sqrt{1 + y^2})^3.$$

В начале метода Рунге-Кутты нужно вычислить $F(0, 0, H)$. Эта величина будет равна

$$F(0, 0, H) = \frac{1}{R_1} - \alpha.$$

Пусть $P(a, b)$ — крайне правая точка оболочки. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = \lim_{x \rightarrow a} z'(x) = -\infty$. Вычисления в методе Рунге-Кутты следует закончить, когда $|y| < M$, где M — большое число, например $M = 100$.

3. Уравнение нижней части меридиана

Нижняя часть меридиана задаётся функцией $z_1(x)$. Для неё $z_1'(x) \geq 0, z_1''(x) \geq 0$. Поэтому в формуле для R_1 будет знак «плюс»:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z_1''(x)}{(1 + (z_1')^2)^{3/2}}.$$

Для нижней части меридиана угол $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, поэтому в формуле (2) будет знак «минус», а в формуле для R_2 — знак «плюс»:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{z_1'(x)}{x\sqrt{1 + (z_1')^2}}.$$

Уравнение для z_1 примет вид

$$\frac{z_1''(x)}{(1 + (z_1')^2)^{3/2}} + \frac{z_1'(x)}{x\sqrt{1 + (z_1')^2}} = \alpha + \beta(H - z_1).$$

Решение этого уравнения находилось методом Рунге-Кутты, начиная с правой точки $P(a, b)$. В этой точке ставились условия $z_1(a) = b, z_1(a)' = M$. Вычисления проводятся, пока $z_1' > \varepsilon$, где ε — точность, например $\varepsilon = 0.01$.

4. Контрольный пример

Выясним, при каких условиях оболочка будет сферической. Положим $R = H/2$. Верхняя часть меридиана — это график

$$z = R + \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Для проведения численного эксперимента была написана программа на языке Python [4]. Примеры расчета приведены на рис. 2, 3. Так для сферы на рис. 2 радиусы кривизны R_1 и R_2 совпадают с радиусом сферы: $R_1 = R_2 = R$. В левой части уравнения (3') стоит выражение

$$\frac{-z''(x)}{(\sqrt{1+(z')^2})^3} + \frac{-z'(x)}{x\sqrt{1+(z')^2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} = \alpha.$$

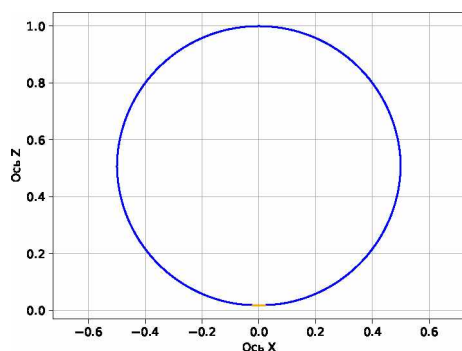


Рис. 2. Пример при $\beta = 0$

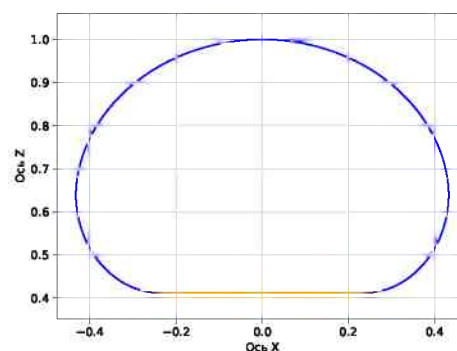


Рис. 3. Пример при $\beta = 5$

Сфера получается при $\alpha = 2/R = 4/H$, $\beta = 0$. При увеличении β сфера раздается вширь и принимает форму капли (см. рис. 3).

Список литературы

1. Ермоленко А. В., Кожгаельдиев Н. В. Графоаналитический метод расчета резервуара равного сопротивления // *Вестник Сыктывкарского университета Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 2 (35). С. 85–91.*
2. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. *Линейная теория тонких оболочек.* Л: Политехника, 1991. 656 с.

3. **Гордон Дж.** Конструкции, или Почему не ломаются вещи. М.: Мир, 1980. 390 с.
4. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.

Summary

Pevnyi A. B., Kozhagel'diev N. V. New equations for a reservoir of equal resistance

New equations for the shape of equal resistance reservoir are obtained. The reservoir has the shape of a drop. The results of computer experiments are given.

Keywords: shell, droplet form, reservoir.

References

1. **Yermolenko A. V., Kozhagel'diev N. V.** Graphoanalytical method for calculating an equal resistance reservoir, *Vestnik Syktyvkarского университета Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2020, 2 (35), pp. 85–91.
2. **Novozhilov V. V., Chernyh K. F., Mihajlovskij E. I.** *Linejnaya teoriya tonkih oboochek* [Linear theory of thin shells], L: Politekhnik, 1991, 656 p.
3. **Gordon J.** *Konstrukcii, ili Pochemu ne lomayutsya veshchi* [Structure, or why things do not break], M: Mir, 1980, 390 p.
4. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates, *Vestnik Syktyvkarского университета Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33), pp. 86–95.

Для цитирования: Певный А. Б., Кожгельдиев Н. В. Новые уравнения для резервуара равного сопротивления // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика.* 2021. Вып. 2 (39). С. 78–84. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_78

For citation: Pevnyi A. B., Kozhagel'diev N. V. New equations for a reservoir of equal resistance, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 78-84. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_78

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 21.05.2021

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО КУРСА ПРИ
ИЗУЧЕНИИ СТУДЕНТАМИ ОСНОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Н. И. Попов, Э. М. Арихин, И. А. Ермоленко

Переход к образовательным стандартам нового поколения в высшем учебном заведении предполагает обновление технологий, средств и форм обучения будущих учителей математики, физики и информатики. При проектировании в образовательной среде университета электронного курса «Краткий курс дифференциального исчисления» рассматривается проблема модульного обучения.

Ключевые слова: основы математического анализа, модульное обучение, электронный курс.

Переход в вузах к новым образовательным стандартам обуславливает необходимость разработки в электронном формате различных учебно-методических материалов как дополнительных средств для организации самостоятельной работы студентов, проведения практических и лекционных занятий по дисциплине [1; 2]. В профессиональной подготовке учителей математики, информатики и физики информационные технологии приобретают фундаментальный характер и активно используются, в частности, при проектировании образовательных блогов как эффективных средств организации процесса обучения [3]. Применение инновационных технологий подразумевает разработку новых форм и методик обучения с целью повышения эффективности учебного процесса в университете (см., например, [4; 5]).

Для обучения основам математического анализа студентов 1-го курса направления подготовки «Педагогическое образование» (профиль:

Математика и Физика) Сыктывкарского государственного университета был создан электронный ресурс «Краткий курс дифференциального исчисления» на основе модульного изложения учебного материала.

Электронный курс содержит теоретический материал для изучения темы: формулировки теорем с возможными иллюстративными пояснениями, необходимые формулы, определения изучаемых математических понятий. При введении основных понятий описывается их геометрический и физический смысл для дальнейшего осознанного понимания и усвоения их обучаемыми [6].

Несмотря на то что учебный материал по теории изложен в краткой форме, он сопровождается решениями типовых задач, полностью отвечает требованиям доступности и системности. В конце каждого модуля помещены упражнения для самостоятельного решения с указанием ответов, позволяющие обучаемым выработать практические навыки при использовании математических знаний в образовательной деятельности.

Кроме того, приводятся типовые задачи, требующие лишь стандартных умений и навыков при решении и предназначенные для аудиторных занятий, серьезное внимание в разработанных модулях курса уделяется заданиям, предлагаемым студентам для самостоятельного выполнения. В электронном курсе приведены укрупненные блоки заданий, содержащие однотипные задачи. Предлагаемые упражнения могут быть использованы для проведения аудиторных занятий с обучаемыми, использование такого набора задач позволяет преподавателю применить индивидуальный подход к студентам в образовательном процессе.

В учебном процессе вуза компьютерные обучающие средства удобны как студенту, так и педагогу-предметнику, поскольку преподавателю предоставляют дополнительную возможность коммуникации и облегчают работу по проверке знаний обучающихся, а студенту позволяют работать в выбранном им индивидуальном темпе. Опыт применения в образовательном процессе университета электронных курсов на базе LMS Moodle выявил широкие возможности указанной программной среды для использования различных форм диалогового общения. Последний фактор является важным с точки зрения минимизации временных затрат в условиях повышения эффективности процесса обучения студентов.

Список литературы

1. **Попов Н. И., Никифорова Е. Н.** Об эффективности использования электронного курса «Математика» при обучении студентов агроинженерных направлений подготовки вуза // *Вестник Московского городского педагогического университета. Сер. Информатика и информатизация образования.* 2017. № 2 (40). С. 45–50.
2. **Суворова Т. Н.** Анализ подходов к типологии электронных образовательных ресурсов // *Вестник Московского городского педагогического университета. Сер. Информатика и информатизация образования.* 2015. №1 (31). С. 70–84.
3. **Диков А. В., Родионов М. А., Чернецкая Т. А.** Образовательная блогосфера как эффективное средство организации учебного процесса // *Информатика и образование.* 2018. № 1 (290). С. 38–46.
4. **Kedra K., Rotidi G.** University Pedagogy: A New Culture is Emerging in Greek Higher Education // *International Journal of Higher Education.* 2017. Vol. 6. No. 3. Pp. 147–153.
5. **Попов Н. И.** Фундаментализация университетского математического образования : монография. Йошкар-Ола: МарГУ, 2012. 135 с.
6. **Попов Н. И., Никифорова Е. Н.** Краткий курс дифференциального исчисления : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. 85 с.

Summary

Popov N. I., Arihin E. M., Yermolenko I. A. The use of an electronic course when students study the basics of mathematical analysis

The transition to educational standards of a new generation in a higher educational institution involves the renewal of technologies, means and forms of training for future teachers of mathematics, physics and computer science. When designing an electronic course in the educational environment of the university «Short Course in Differential Calculus», the problem of

modular training is considered.

Keywords: fundamentals of mathematical analysis, modular training, electronic course.

References

1. **Popov N. I., Nikiforova E. N.** On the effectiveness of the use of the electronic course «Mathematics» in teaching students in agroengineering areas of training, *Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya Informatika i informatizatsiya obrazovaniya* [Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Series Informatics and informatization of education], 2017, No (40), pp. 45–50.
2. **Suvorova T. N.** Analysis of approaches to the typology of electronic educational resources, *Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya Informatika i informatizatsiya obrazovaniya* [Bulletin of the Moscow City Pedagogical University. Series Informatics and informatization of education], 2015, №1 (31), pp. 70–84.
3. **Dikov A. V., Rodionov M. A., Chernetskaya T. A.** The educational blogosphere as an effective means of organizing the educational process, *Informatika i obrazovaniye* [Computer science and education], 2018, No 1 (290), pp. 38–46.
4. **Kedra K., Rotidi G.** University Pedagogy: A New Culture is Emerging in Greek Higher Education, *International Journal of Higher Education*, 2017, Vol. 6, No 3, pp. 147–153.
5. **Popov N. I.** *Fundamentalizatsiya universitetskogo matematicheskogo obrazovaniya* [Fundamentalization of university mathematics education] : monograph, Yoshkar-Ola: MarSU, 2012, 135 p.
6. **Popov N. I., Nikiforova E. N.** *Kratkij kurs differentsial'nogo ischisleniya : uchebnoe posobie* [Differential Calculus Short Course: A Study Guide], Syktyvkar: Publishing house of SSU named after Pitirim Sorokin, 2019, 85 p.

Для цитирования: Попов Н. И., Арихин Э. М., Ермоленко И. А. Использование электронного курса при изучении студентами основ математического анализа // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 85–89. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_85*

For citation: Popov N. I., Arihin E. M., Yermolenko I. A. The use of an electronic course when students study the basics of mathematical analysis, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 85–89. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_85

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 01.06.2021

ПЕРСОНАЛИИ

Арихин Эдуард Михайлович – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: rorovnikolay@yandex.ru

Банников Александр Сергеевич – к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, e-mail: asbannikov@gmail.com

Голенев Илья Иванович – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Губарь Людмила Николаевна – старший преподаватель, кафедра физико-математического и информационного образования, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: lyudmila.336878@yandex.ru

Дубатовская Марина Валерьевна – к. ф.-м. н., доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: dubatovska@bsu.by

Ермоленко Андрей Васильевич – к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Ермоленко Илья Андреевич – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Кожгаельдиев Никита Вадимович – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Кораблёв Анатолий Юрьевич – преподаватель, Колледж экономики, права и информатики, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Котелина Надежда Олеговна – к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: nkotelina@gmail.com

Певный Александр Борисович – д. ф.-м. н., профессор, кафедра прикладной математики и информационных технологий в образовании,

Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: revnyi@syktsu.ru

Попов Николай Иванович – д. п. н., к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой физико-математического и информационного образования, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Примачук Леонид Платонович – к.ф.-м.н., доцент, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: dubatovska@bsu.by

Рогозин Сергей Васильевич – к. ф.-м. н., доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e-mail: rogosin@bsu.by

Шилов Сергей Владимирович – к. ф.-м. н., доцент кафедры ИФиТБ, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: shilovsykt@rambler.ru

Юркина Марина Николаевна – старший преподаватель, кафедры прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: yurkinamn@gmail.com

AUTHORS

Arihin Eduard – student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Bannikov Alexander – Ph.D., associate professor, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, e-mail: asbannikov@gmail.com

Golenev Ilya – student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Gubar Lyudmila – Senior Lecturer, Department of Physics, Mathematics and Information Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: lyudmila.336878@yandex.ru

Dubatovskaya Marina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Analytical Economics and Econometrics, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: dubatovska@bsu.by

Yermolenko Andrey – Ph.D., Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Yermolenko Ilya – student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Kozhageldiev Nikita – student, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Korablev Anatoly – Lecturer, College of Economics, Law and Informatics, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: ea74@list.ru

Kotelina Nadezhda – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: nkotelina@gmail.com

Pevny Alexander – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, University e-mail: pevnyi@syktsu.ru

Popov Nikolay – Doctor of Education, Ph.D. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of physics, mathematics and information education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Primachuk Leonid – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: dubatovska@bsu.by

Rogozin Sergey – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Analytical Economics and Econometrics, Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus, e-mail: rogosin@bsu.by

Shilov Sergey – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Physics and Technology, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: shilovsykt@rambler.ru

Yurkina Marina – Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: yurkinamn@gmail.com

Contents

Computer sciences

- Golenev I. I., Yermolenko A. V.** *Designing a neural network for recognizing handwritten cyrillic symbols* 4
- Yermolenko A. V., Korablev A. Yu., Kotelina N. K., Yurkina M. N. N. K.** *Popova and her contribution to the development of competitive programming* 13

Mathematics

- Bannikov A. S.** *To construction of the reachability set for a fractional-order linear control system* 20
- Rogosin S. V., Primachuk L. P., Dubatovskaya M. V.** *On solution to R-linear conjugation problem with rational coefficients* 27

Applied mathematics and mechanics

- Shilov S. V.** *Simulation of explosions of gas-air mixtures taking into account the cloud drift by wind* 44

Methodical materials

- Gubar L. N., Popov N. I.** *Implementation of the technology of guaranteed learning when students study the course of probability theory and mathematical statistics* 58

Tutor-follower

- Pevnyi A. B., Kozhagel'diev N. V.** *New equations for a reservoir of equal resistance* 78
- Popov N. I., Arihin E. M., Yermolenko I. A.** *The use of an electronic course when students study the basics of mathematical analysis* 85

- Authors** 90

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 2 (39) 2021

Гл. редактор О.А. Сотникова
Отв. редактор А.В. Ермоленко

Редактор Е.М. Насирова
Компьютерный макет М.Н. Юркина
Корректор Л.Н. Руденко

Подписано в печать 15.06.2021. Дата выхода в свет 02.07.2021.
Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern. Печать ризографическая. Усл. печ. л. 11,1.
Тираж 500 экз. Заказ № 76.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru

