МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (38). 2021

УДК 517.968 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_19**

О СПЕКТРЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ БХАТНАГАРА – ГРОССА – КРУКА

В. В. Сушков

В статье рассмотрен вопрос о спектре характеристического уравнения при решении матричного интегродифференциального уравнения типа уравнения БГК (размерность $n = 2$). Построены собственные функции непрерывного спектра, исследован вопрос о собственных значениях дискретного спектра характеристического уравнения.

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения, модель Бхатнагара, Гросса и Крука, спектр характеристического уравнения, обобщенные функции.

Введение. При рассмотрении интегродифференциального уравнения, описывающего поведение разреженного газа (уравнение Больцмана, 1872), относительно функции распределения $f(x, \xi, t)$ молекул разреженного газа по координатам x и скоростям ξ в момент времени t

$$\partial f/\partial t + \xi \partial f/\partial x + \mathbf{X} \partial f/\partial \xi = Q(f, f),$$

где $Q(f, f)$ — билинейный оператор, называемый оператором столкновений, а $\mathbf{X}$ — действующая на молекулы внешняя сила, отнесенная к единице массы, основные трудности обусловлены сложной структурой интеграла столкновений.

Поэтому в практических целях используются модели интеграла столкновений, наиболее известная из которых называется моделью Бхатнагара, Гросса и Крука (БГК-моделью) [1]. Основным преимуществом при использовании БГК-оператора является возможность сведения любой задачи к линейной системе интегральных уравнений, что делает указанное модельное уравнение одним из наиболее популярных при применении как аналитических, так и численных методов.

Несмотря на то что аналитическое решение скалярного случая было построено еще в 60-х годах XX века благодаря использованию аппарата комплексного анализа, обобщение результатов на матрично-векторный случай оказалось крайне затруднительным из-за необходимости исследования поведения решения краевых задач в окрестности точек ветвления. Поэтому, несмотря на активное использование указанной модели [2–4], общего метода аналитического решения задачи в общем виде не существует. В работе [5] был предложен метод построения аналитического решения для семейства матрично-векторных уравнений, к которым сводится следование задачи Смолуховского для одно-, двух- и полиатомных газов.

Для обобщения подходов [5] на максимально широкий класс задач необходимо определение границ применимости метода. В частности, его использование подразумевает поиск решения в виде разложения по собственным функциям соответствующего характеристического уравнения. Специфика задачи заключается в том, что спектр уравнения, как правило, разделяется на непрерывную и дискретную части, причем дискретный спектр может содержать как конечные значения, так и бесконечно удаленную точку.

Вывод характеристического уравнения и непрерывный спектр. В зависимости от рассматриваемой задачи линеаризованное БГК-уравнение может сводиться как к скалярному, так и векторному случаю. В частности, в работе [5] рассмотрено решение начально-граничной задачи для семейства матрично-векторных интегродифференциальных уравнений размерности 2, получаемых при исследовании задачи Смолуховского о температурном скачке:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\mu)+Y(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}Q(\mu)\int_{-\infty}^{+\infty}Q_1(\mu')Y(x,\mu')e^{-\mu'^2}\mathrm{d}\mu'. \tag{1}$$

Решение задачи вне зависимости от начально-граничных условий должно стремиться к нулю при удалении x к бесконечности, что подразумевается физическими условиями задач, в рамках которых рассматривается уравнение. Матрицы-функции $Q(\mu)$ и $Q_1(\mu)$ в [5] представляют собой матрицы полиномов порядка 2, определяемые из физических условий и описывающие, в зависимости от выбора параметра, модель задачи Смолуховского для одно-, двух- и полиатомного газа:

$$Q(\mu) = \begin{bmatrix} \gamma(\mu^2 - 1/2) & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_1(\mu) = \begin{bmatrix} \gamma(\mu^2 - 1/2) & l\gamma \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос о структуре спектра задачи в более общем случае, когда $Q(\mu)$ и $Q_1(\mu)$ представляют собой двумерные матрицы с произвольными полиномиальными элементами.

Разделяя переменные с помощью анзаца Кейза:

$$Y_\eta(x, \mu) = e^{-x/\eta}\Phi(\eta, \mu),$$

где $\eta \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$, придем к характеристическому уравнению:

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta Q(\eta)n(\eta), \text{ где } \eta \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где вектор-функция $n(\eta)$ определяется как

$$n(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} Q_1(\mu)\Phi(\eta, \mu)\mathrm{d}\mu.$$

Вектор-функции $\Phi(\eta, \mu)$ называют собственными функциями, а соответствующие им значения η — собственными значениями характеристического уравнения (2). Из последнего уравнения находим:

$$\Phi(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\eta}{\eta - \mu}Q(\mu)n(\eta).$$

При подстановке полученного результата в исходное уравнение очевидно, что для сходимости интегралов на действительной оси необходимо регуляризовать вектор-функцию $\Phi(\eta, \mu)$, то есть определить непрерывный функционал, совпадающий с ней всюду в комплексной плоскости, за исключением случая $\eta = \mu$. При этом функция $\Phi(\eta, \mu)$ будет пониматься как линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций D, то есть как обобщенная функция. Общее решение характеристического уравнения (2) в классе обобщенных функций можно записать в виде

$$\Phi(\eta,\mu)=F(\eta,\mu)n(\eta),$$

где

$$F(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\mathbf{P}\frac{1}{\eta-\mu}Q(\mu)+B(\eta)\delta(\eta-\mu) \tag{3}$$

есть собственная матрица непрерывного спектра. Здесь и далее символ $\mathbf{P}\frac{1}{x}$ означает распределение — главное значение интеграла Коши от x^{-1}, $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, а $B(\eta)$ — произвольная матрица-функция, параметрически зависящая от η и удовлетворяющая условию Гельдера. При этом функция $B(\eta)$ полностью определяется из условий нормировки:

$$n(\eta)=(\Phi(\eta,\mu),e^{-\mu^2}Q_1(\mu)).$$

Или, иначе говоря,

$$e^{-\eta^2}Q_1(\eta)B(\eta)=I+\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mu^2}\frac{Q_1(\mu)Q(\mu)}{\mu-\eta}\mathrm{d}\mu,$$

где I — единичная матрица. Введем в рассмотрение матрицу-функцию (дисперсионную матрицу)

$$\Lambda(z)=I+\frac{z}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mu^2}\frac{Q_1(\mu)Q(\mu)}{\mu-z}\mathrm{d}\mu, \tag{4}$$

заданную на всей комплексной плоскости с разрывом вдоль вещественной оси. Ее определитель $\lambda(z)$ называется дисперсионной функцией задачи. В новых обозначениях можем записать, что искомая матрица-функция $B(\eta)$ определяется равенством

$$B(\eta)=e^{\eta^2}Q_1^{-1}(\eta)\Lambda(\eta),$$

$\eta\in\mathbb{R}$, а обобщенные собственные функции непрерывного спектра собственных значений $\eta\in\mathbb{R}$ характеристического уравнения (2) приобретают вид:

$$F(\eta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta\mathbf{P}\frac{1}{\eta-\mu}Q(\mu)+e^{\eta^2}Q_1^{-1}(\eta)\Lambda(\eta)\delta(\eta-\mu),$$

где функция $\Lambda(z)$ определяется равенством (4).

Дискретный спектр характеристического уравнения. Как было показано, непрерывный спектр характеристического уравнения (2) представляет собой континуум значений вещественной оси, которому соответствует континуальное же множество обобщенных собственных функций. Для исследования дискретного спектра преобразуем дисперсионную матрицу $\Lambda(z)$, определенную равенством (4), записав ее в явном виде:

$$\Lambda(z) = \lambda_c(z)Q_1(z)Q(z) + \frac{1}{2}\gamma Q_0(z),$$

где $\lambda_c(z) = 1 + \frac{z}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu - z}$ есть известная дисперсионная функция Черчиньяни, свойства которой подробно описаны в монографии [6], а $\gamma Q_0(z)$ – полиномиальная матрица степени меньшей, чем $Q_1(z)Q(z)$. Как известно, в окрестности бесконечно удаленной точки функция Черчиньяни раскладывается в ряд Лорана:

$$\lambda_c(z) = -\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-4} - \frac{15}{8}z^{-6} - ..., |z| \to \infty.$$

Исходя из этого можно расписать разложение дисперсионной матрицы-функции $\Lambda(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\Lambda(z) = -\frac{z^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\mathrm{d}\mu + I - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\mathrm{d}\mu -$$

$$-\frac{z^{-2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^4 e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\mathrm{d}\mu - \frac{z^{-4}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^6 e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\mathrm{d}\mu - \ldots$$

В силу необходимости убывания функции $Y(x,\mu)$ на бесконечности потребуем, чтобы $\Lambda(z)$ стремилась к нулю в окрестности бесконечно удаленной точки. Это подразумевает, что:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\mathrm{d}\mu = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 e^{-\mu^2}Q_1(\mu)Q(\mu)\mathrm{d}\mu = I,$$

где равенства понимаются в матричном смысле. Сформулированные требования являются необходимыми для разрешимости начально-граничной задачи для уравнения (1) в принятых условиях. При этом бесконечно удаленная точка оказывается как минимум четырехкратным нулем дисперсионного уравнения $\lambda(z) = 0$. Следовательно, дискретный спектр характеристического уравнения состоит из бесконечно удаленной точки и, возможно, набора конечных точек комплексной плоскости. Полное определение спектра уравнения возможно путем исследования поведения дисперсионной функции

$$\lambda(z) = a(z)\Omega_1(z)\Omega_2(z),$$

где $\Omega_{1,2}(z) = \lambda_c(z) \pm r(z)$, а под $r(z)$ понимается радикал, определенный структурой матриц-функций $Q_1(z)$ и $Q(z)$.

Заключение. Таким образом, мы показали, что методика, примененная в частном случае решения задачи для одно-, двух- и полиатомных газов, может быть эффективно распространена на более широкий класс задач, в частности, возникающих при решении краевых задач для уравнения Больцмана с интегралом столкновения в форме Бхатнагара – Гросса – Крука. Исследован случай векторно-матричного интегродифференциального уравнения с полиномиальным ядром, определена структура непрерывного спектра характеристического уравнения, описана структура дискретного спектра с условиями принадлежности к нему бесконечно удаленной точки. Построены собственные функции непрерывного спектра.

Список литературы

1. **Бхатнагар П. Л., Гросс Е. П., Крук М.** Модель процессов столкновений в газах // *Проблемы современной физики. М.: ИЛ, 1956. № 2. С. 82–107.*

2. **Бедрикова Е. А., Латышев А. В.** Решение задачи о течении Куэтта для Ферми-газа с почти зеркальными граничными условиями // *Известия высших учебных заведений. Физика. 2016. 59. № 2. С. 53–61.*

3. **Хачатрян А. К., Хачатрян К. А.** Качественное различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // *Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 180. № 2. С. 272–288*

4. **Жвик В. В.** Расход разреженного газа в течении Пуазейля сквозь круглый капилляр // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 5. С. 130–140.*

5. **Сушков В. В., Латышев А. В.** Аналитическое решение граничных задач для семейства БГК-уравнений методом канонической матрицы // *Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. 2002. № 4. С. 72–85.*

6. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов. М.: Наука, 1973. 245 с.

Summary

Sushkov V. V. About the discrete spectrum of the characteristic equation in case of the Bhatnagar – Gross – Crook model

The objective of the publication is to show that the technique used in the particular case of solving the problem for one-, two- and polyatomic gases can be effectively extended to a wider class of problems, in particular, arising when solving boundary problems for the Boltzmann equation with the collision integral in the form of Bhatnagar-Gross-Crook. The case of a vector-matrix integrodifferential equation with a polynomial kernel is investigated, the structure of the continuous and discrete spectrum of the characteristic equation is determined. Eigenfunctions of the continuous spectrum are found.

Keywords: integrodifferential equations, Bhatnagar, Gross and Crook model, spectrum of characteristic equation, distributions.

References

1. **Bhatnagar P. L., Gross E. P., Crook M.** Model' processov stolknovenij v gazah (Gas Collision Process Model), *Problems of modern physics*, Moscow, 1956, No. 2, pp. 82–107.

2. **Bedrikova E. A., Latyshev A. V.** Reshenie zadachi o techenii Kuetta dlya Fermi-gaza s pochti zerkal'nymi granichnymi usloviyami (Solution of the problem of the Couette flow for a fermi gas with almost specular boundary conditions), *Russian Physics Journal*, 2016, V. 59, No. 2, pp. 217–230.

3. **Khachatryan A. K., Khachatryan K. A.** Kachestvennoe razlichie reshenij dlya stacionarnyh model'nyh uravnenij Bol'cmana v linejnom i nelinejnom sluchayah (Qualitative difference between solutions of stationary model Boltzmann equations in the linear and nonlinear cases), *Theoretical and Mathematical Physics*, 2014, V. 180, No. 2, pp. 272–288.

4. **Zhvick V. V.** Raskhod razrezhennogo gaza v techenii Puazejlya skvoz' kruglyj kapillyar (Rarefied gas flow rate in Poiseuille flow through a circular capillary), *Fluid Dynamics*, 2015, V. 50, No. 5, pp. 711–720.

5. **Sushkov V. V., Latyshev A. V.** Analiticheskoe reshenie granichnyh zadach dlya semejstva BGK-uravnenij metodom kanonicheskoj matricy (Analytical solution of boundary problems for a family of BGK equations obtained by the application of the canonical matrix method), *Izvestia: Herzen University Journal of Humanities & Sciences*, 2002, No. 4, pp. 72–85.

6. **Cercignani C.** *Matematicheskie metody v kineticheskoj teorii gazov* (Mathematical methods in the kinetic theory of gases), Moscow: Nauka, 1973, 245 p.

Для цитирования: Сушков В. В. О спектре характеристического уравнения в рамках модели Бхатнагара – Гросса – Крука // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1 (38). С. 19–26. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_19.*

For citation: Sushkov V. V. About the discrete spectrum of the characteristic equation in case of the Bhatnagar – Gross – Crook model, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 1 (38), pp. 19–26. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_19.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 28.02.2021*