МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (38). 2021

УДК 517.544 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_13**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОЦЕНКИ ПЛОЩАДИ ПРИ ЛОКАЛИЗАЦИИ МАКСИМУМА КОНФОРМНОГО РАДИУСА

Н. И. Попов

Получено условие единственности критической точки конформного радиуса с использованием неравенства изопериметрического характера.
Ключевые слова: оценка площади, конформный радиус, критическая точка конформного радиуса, единственность решения внешней обратной краевой задачи.

Приведем одно условие единственности решения внешней обратной краевой задачи в постановке Ф. Д. Гахова [1], используя неравенство изопериметрического типа. Как показано в [2], единственность решения такой задачи будет обеспечена при требовании единственности критической точки конформного радиуса для решения внутренней задачи [3] с теми же краевыми данными. Результаты аналогичного характера ранее получены, в частности, в работах [4–5].

Пусть функции $f(z)$ и $F(z)$ регулярны в единичном круге E и $f(z) \prec \prec F(z)$, $z \in E$, т. е. $f(z) = F(\varphi(z))$, где $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца [6, с. 319]. Приведем решение одной задачи [7, с. 97], результат которой в дальнейшем будет использован.

Задача 1. Пусть функции $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ и $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ регулярны в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$, $f(z) \prec F(z)$, $z \in E$ и $|ImF(z)| \leq l$ в круге E. Доказать, что при этом

$$|a_n| \leq \frac{4l}{\pi}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

Для решения найдем функцию $w = F_1(z)$, конформно отображающую круг $|z| < 1$ на полосу $|Imw| \le l$. Искомой функцией является

$$F_1(z) = \frac{2l}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{4l}{\pi} z + \dots,$$

обозначим $A_1 = \frac{4l}{\pi}$. В силу того что область $|Imw| \le l$ выпуклая, по теореме 2.25 [7, с. 94] имеем $|a_n| \le |A_1|$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, доказана оценка $|a_n| \le \frac{4l}{\pi}$, $n \ge 1$.

Пусть далее S — класс регулярных и однолистных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ и $\sigma[f(E_r)] = \iint_{|z|<r} |f'(z)|^2 dxdy = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta$ — площадь образа круга $E_r = \{z : |z| < r\}$, $z = x + iy = re^{i\theta}$, при отображении функцией $f(z)$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть функция*

$$f(z) = z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^k, \quad a_3 \ne 0, \tag{2}$$

регулярна в E,

$$g(z) = 6a_3 z^2 \frac{f'(z)}{f''(z)}. \tag{3}$$

Тогда справедлива оценка

$$\sigma\left[\frac{6a_3 z}{g(z)}(E_r)\right] = \sigma\left[\frac{f''(z)}{zf'(z)}(E_r)\right] \le 4\pi \tag{4}$$

при условии, что $g(z) \in S$ и

$$|Imf(z)| \le \frac{\pi}{12\sqrt{6}}. \tag{5}$$

Доказательство. Вставим производные от функции (2) в соотношение, полученное из (3), $f''(z)g(z) = 6a_3 z^2 f'(z)$, в котором учтем ряд для $g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$ с неопределенными коэффициентами. Сравним выражения при одинаковых степенях z в равенстве

$$\sum_{k=3}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} \left(z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k\right) = 6a_3 z^2 \left(1 + \sum_{k=3}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right),$$

получим $6a_3 = 6a_3$ (при z^2), $c_2 = -\frac{2a_4}{a_3}$ (при z^3). Далее воспользуемся тем, что функция $g(z)$ является однолистной, следовательно, можно использовать внешнюю теорему площадей [6, с. 49] к функции

$$\frac{1}{g(\frac{1}{\varsigma})} = \varsigma - c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\varsigma^k} = \varsigma + \frac{2a_4}{a_3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\varsigma^k}, \quad z = \frac{1}{\varsigma},$$

и применить в дальнейших вычислениях известную оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|A_k|^2 \leq 1. \tag{6}$$

Найдем оценку для площади образа круга, когда осуществляется отображение функцией

$$\frac{6a_3 z}{g(z)} = 6a_3 + 12a_4 z + \sum_{k=1}^{\infty} 6a_3 A_k z^{k+1},$$

при вычислениях учтем неравенства (1), (5), (6) и $(k+1)/2 \leq k$. Получаем

$$\sigma\left[\frac{6a_3 z}{g(z)}(E_r)\right] = \left(144|a_4|^2 r^2 + 72|a_3|^2 r^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2}|A_k|^2 r^{2k-2}\right)\pi \leq$$

$$\leq \pi[(144|a_4|^2 + 72|a_3|^2)r^2] \leq 4\pi r^2 \leq 4\pi, \quad 0 < r \leq 1,$$

так как в этом случае $|a_3| \leq \frac{\sqrt{6}}{18}$ и $|a_4| \leq \frac{\sqrt{6}}{18}$ (в силу (1) и (5)).

Таким образом, доказана оценка (4). □

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 функция (2) порождает конформный радиус $R(z) = |f'(z)|(1 - |z|^2)$ с единственной критической точкой (максимумом) $z = 0$.*

Доказательство. Воспользуемся вспомогательным утверждением.

Лемма [8]. *Для любой регулярной в E функции $g(z)$ справедливо неравенство*

$$|g(w)| \leq \frac{1}{\pi} \iint_E |g(z)| dxdy (1 - |w|^2)^{-2}, \quad w \in E. \tag{7}$$

Оценка (7) из леммы при условии, что $g(w) = (F'(w))^2$, $w \in E$, позволяет получить

$$|F'(w)| \leq \sqrt{\frac{\sigma(F)}{\pi}}/(1 - |w|^2), \quad w \in E. \tag{8}$$

Применим оценку (8) к функции $F(z) = \frac{f''(z)}{zf'(z)}$, получим

$$\left|\left(\frac{f''(z)}{zf'(z)}\right)'\right| \leq \frac{\sqrt{\pi^{-1}\sigma[f''(z)/zf'(z)\{E\}]}}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{1-|z|^2},$$

так как в нашем случае подкоренное выражение не превосходит числа 4 в силу условия (4) теоремы (1). При интегрировании учтем, что

$$\int_0^z \left(\frac{f''(z)}{zf'(z)}\right)' dz = \frac{f''(z)}{zf'(z)} - 6a_3.$$

Условие (5) теоремы 1 дает оценку $|a_3| \leq \sqrt{6}/18$, поэтому

$$\left|\frac{f''(z)}{zf'(z)}\right| \leq 6|a_3| + 2\int_0^{|z|} \frac{d|z|}{1-|z|^2} < \frac{2}{1-|z|^2} \text{ при } 0 < |z| < 1.$$

Окончательная оценка $\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{2|z|}{1-|z|^2}$ оказывается строгой в проколотом круге $E \setminus \{0\}$. Поэтому уравнение Гахова $\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}$ не имеет корней в $E \setminus \{0\}$, единственный корень $z = 0$ в силу $f''(0) = 0$ дает точку максимума для $R(z) = |f'(z)|(1-|z|^2)$ [2]. $\square$

Список литературы

1. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.

2. **Аксентьев Л. А.** Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // *Изв. вузов. Математика. 1984. № 2. С. 3–11.*

3. **Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.** Обратные краевые задачи и их приложения. 2-е изд. Казань: Казан ун-т, 1965. 333 с.

4. **Аксентьев Л. А., Казанцев А. В., Попов Н. И.** Экстремальные задачи для площадей при конформном отображении и их применение // *Изв. вузов. Математика. 1995. № 6. С. 3–15.*

5. **Попов Н. И.** Об одном условии подчиненности при локализации максимума конформного радиуса // *Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Казанский ун-т, 2013. Т. 46. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. С. 368–369.*

6. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: Наука, 1966. 628 с.

7. **Хейман У., Кеннеди П.** Субгармонические функции. М.: Мир, 1980. 304 с.

8. **London D.** On the zeros of the solutions of $w''(z) + p(z)w(z) = 0$ // *Pacif. I. Math. 1962. V. 12. № 3. С. 979–991.*

Summary

Popov N. I. Using the area estimate for localizing the maximum of the conformal radius

A condition for the uniqueness of the critical point of the conformal radius is obtained using an isoperimetric inequality.

Keywords: area estimate, conformal radius, critical point of conformal radius, uniqueness of the solution to the exterior inverse boundary value problem.

References

1. **Gakhov F. D.** *Krayevyye zadachi* (Boundary problems), 3rd ed., Moscow: Nauka, 1977, 640 p.

2. **Aksent'ev L. A.** Svyaz' vneshney obratnoy krayevoy zadachi s vnutrennim radiusom oblasti (Connection of the outer inverse boundary value problem with the inner radius of the domain), *Izv. universities. Mathematics*, 1984, no. 2, pp. 3–11.

3. **Tumashev G. G., Nuzhin M. T.** *Obratnyye krayevyye zadachi i ikh prilozheniya* (Inverse boundary value problems and their applications), 2nd ed., Kazan: Kazan. un-t, 1965, 333 p.

4. **Aksent'ev L. A., Kazantsev A. V., Popov N. I.** Ekstremal'nyye zadachi dlya ploshchadey pri konformnom otobrazhenii i ikh primeneniye (Extremal problems for areas under conformal mapping and their application), *Izv. universities. Mathematics*, 1995, no. 6, pp. 3–15.

5. **Popov N. I.** Ob odnom uslovii podchinennosti pri lokalizatsii maksimuma konformnogo radiusa (On one condition of subordination in the localization of the maximum of the conformal radius), *Trudy Matematicheskogo tsentr im. N. I. Lobachevsky*, Kazan: Kazan. un-t, 2013, V. 46, Theory of functions, its applications and related issues, pp. 368–369.

6. **Goluzin G. M.** *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* (Geometric theory of functions of a complex variable), 2nd ed., Moscow: Nauka, 1966, 628 p.

7. **Hayman W., Kennedy P.** *Subgarmonicheskiye funktsii* (Subharmonic functions), Moscow: Mir, 1980, 304 p.

8. **London D.** On the zeros of the solutions of $w"(z) + p(z)w(z) = 0$, *Pacif. J. Math.*, 1962, V. 12, no. 3, pp. 979–991.

Для цитирования: Попов Н. И. Использование оценки площади при локализации максимума конформного радиуса // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1 (38). С. 13–18. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_13.*

For citation: Popov N. I. Using the area estimate for localizing the maximum of the conformal radius, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 1 (38), pp. 13–18. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_13.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 05.03.2021*