МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (38). 2021

УДК 517.16 **DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_04**

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ЙЕНСЕНА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

С. И. Калинин, Д. А. Соколова

В настоящей статье рассматриваются уравнения и оптимизационные задачи, эффективно решаемые посредством обращения к неравенству Йенсена для выпуклых или вогнутых функций. Главной особенностью предложенных заданий является то, что при их формулировании и решении применяются такие выпуклые (вогнутые) функции, которые являются композициями или произведениями простых по аналитическому описанию выпуклых (вогнутых) функций. Данное обстоятельство позволяет определять характер выпуклости используемой в конкретном задании функции без обращения к её дифференцируемости или производной второго порядка.

Работа адресуется всем интересующимся вопросами выпуклых функций и тематикой неравенств. Ее содержание может быть полезным при организации исследовательской деятельности студентов и школьников профильных классов.

Ключевые слова: неравенство Йенсена, произведение функций, композиция функций, уравнение, оптимизационная задача.

Ранее в статьях [1], [2], посвящённых конструированию выпуклых и вогнутых (строго или нет) функций без обращения к дифференциальному исчислению, были рассмотрены некоторые приёмы, позволяющие строить примеры таких функций с опорой на свойства произведения и композиции выпуклых функций. В данной статье мы рассмотрим задачи, формулирование которых использует выпуклые или вогнутые функции, сконструированные по упоминаемым свойствам. Основным

© Калинин С. И., Соколова Д. А., 2021.

методом решения таких задач будет выступать метод неравенства Йенсена.

Напомним читателю вид и условия выполнения неравенства Йенсена (см., напр., [3, с. 9–12]).

Для функции f, выпуклой на промежутке l в строгом или нестрогом смысле, справедливо следующее неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda k f\left(x_k\right) \qquad \left(x_k \in l; k = 1, \ldots, n\right), \tag{1}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. Неравенство (1) и называется неравенством Йенсена для рассматриваемой функции f, при этом фигурирующие в его записи числа $x_1, \ldots, x_n$ называются узлами, а числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — весами.

Для вогнутой на промежутке l в строгом или нестрогом смысле функции f неравенство Йенсена имеет вид

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right) \qquad \left(x_k \in l; k = 1, \ldots, n\right), \tag{2}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — снова положительные весы, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$.

Подчеркнем, что если выпуклая или вогнутая (строго или нет) на промежутке l функция $f(x)$ не есть линейная функция, то для нее в неравенствах Йенсена (1) и (2) равенство будет достигаться лишь тогда, когда $x_1 = \ldots = x_n$.

С доказательством неравенства Йенсена (1) методом математической индукции читатель может познакомиться, например, по источникам [3], [4]. Кроме того, в статье [5] данное неравенство доказывается методом прямой и обратной индукции.

Перейдём к рассмотрению ряда задач, решение которых можно реализовать с помощью использования неравенства Йенсена для выпуклых или вогнутых функций. Сначала обратимся к задачам на решение уравнений.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$3e^{\sqrt[3]{e^{e^x} + \sqrt{1+x} + \cos x}} = e^{e^{e^x}} + e^{e^{\sqrt{1+x}}} + e^{e^{\cos x}}.$$

Решение. В области определения неизвестного, то есть на промежутке $[-1;+\infty)$, преобразуем уравнение следующим образом:

$$e^{e^{\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3}\sqrt{1+x}+\frac{1}{3}\cos x}}=\frac{1}{3}e^{e^{e^x}}+\frac{1}{3}e^{e^{\sqrt{1+x}}}+\frac{1}{3}e^{e^{\cos x}}. \tag{3}$$

Рассмотрим левую часть уравнения (3) и оценим ее сверху, используя неравенство Йенсена (1) для строго выпуклой функции $f(x)=e^{e^x}$ (строгая выпуклость f следует из того [2], что функция $y=e^x$ — строго выпуклая, а функция $z=e^y$ — строго выпуклая и возрастающая). Получим соотношение

$$e^{e^{\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3}\sqrt{1+x}+\frac{1}{3}\cos x}}\leqslant\frac{1}{3}e^{e^{e^x}}+\frac{1}{3}e^{e^{\sqrt{1+x}}}+\frac{1}{3}e^{e^{\cos x}}.$$

Так как равенство в нем может достигаться только при условии $e^x=\sqrt{1+x}=\cos x$, то отсюда находим единственный корень $x=0$ уравнения (3). В последнем легко убедиться, сравнив графики функций $y=e^x$, $y=\sqrt{1+x}$, $y=\cos x$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Замечание 1. Задача 1 навеяна задачей 4.2 из [6, с. 42].

Задача 2. *Докажите, что уравнение*

$$18x^3e^{3x}+9\,(2x+1)^3\,e^{6x+3}=(4x+1)^3\,e^{4x+1}$$

не имеет неотрицательных корней.

Решение. Анализ вида правой части уравнения и слагаемых его левой части подсказывает нам о введении в рассмотрение функции $f(t)=t^3e^t$. Если данное уравнение переписать в виде

$$2(3x)^3e^{3x}+(6x+3)^3\,e^{6x+3}=3\,(4x+1)^3\,e^{4x+1}, \tag{4}$$

то все входящие в него переменные величины будут композициями соответствующих линейных функций и функции f.

Заметим, функция f является строго выпуклой на промежутке $[0;+\infty)$. Это следует [1] из того, что функции t^3 и e^t являются строго выпуклыми, неотрицательными и возрастающими на указанном промежутке.

Очевидно, (4) равносильно уравнению

$$\frac{2}{3}(3x)^3e^{3x}+\frac{1}{3}\,(6x+3)^3\,e^{6x+3}=(4x+1)^3\,e^{4x+1}. \tag{5}$$

Левую часть (5) на промежутке $[0;+\infty)$ оценим снизу с помощью неравенства Йенсена:

$$\frac{2}{3}(3x)^3e^{3x}+\frac{1}{3}\left(6x+3\right)^3e^{6x+3}\geqslant\left(\frac{2}{3}3x+\frac{1}{3}\left(6x+3\right)\right)^3e^{\frac{2}{3}3x+\frac{1}{3}(6x+3)}=$$
$$=\left(4x+1\right)^3e^{4x+1}.$$

Поскольку (5) реализует равенство в произведённой оценке, то на множестве $[0;+\infty)$ исходное уравнение равносильно уравнению $3x = 6x+3$, которое, очевидно, не имеет неотрицательных корней. Требуемое показано.

Задача 3. *Решите уравнение* $e^{\left(2-x^2\right)^{2020}}+e^{x^{4040}}=2e$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}e^{\left(2-x^2\right)^{2020}}+\frac{1}{2}e^{\left(x^2\right)^{2020}}=e. \tag{6}$$

Так как функция $f(t)=e^{t^{2020}}$ является строго выпуклой [2], то левую часть уравнения (6) с помощью неравенства Йенсена можно оценить снизу так:

$$\frac{1}{2}e^{\left(2-x^2\right)^{2020}}+\frac{1}{2}e^{\left(x^2\right)^{2020}}\geqslant e^{\left(\frac{1}{2}\left(2-x^2\right)+\frac{1}{2}x^2\right)^{2020}}=e.$$

Таким образом, уравнение (6) реализует равенство в выполненной оценке. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$2-x^2=x^2,$$

из которого находим искомые корни $x=\pm1$.

Рассмотрим сейчас некоторые оптимизационные задачи, решение которых будет основываться не на методах дифференциального исчисления функций, а на использовании неравенства Йенсена.

Задача 4. *Вычислите* $\sup\limits_{x>0}f(x)$, *где*

$$f(x)=4\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}}{4}\right)^{\sqrt{2x}+\sqrt{x}+2\sqrt{2}}}-$$
$$-\left(\sqrt{2x}\right)^{\sqrt{2x}}-\left(\sqrt{x+1}\right)^{\sqrt{x+1}}.$$

Решение. Первое слагаемое выражения $f(x)$ обозначим $g(x)$. Его можно представить так:

$$g(x) = 4\left(\frac{1}{4}\sqrt{2x} + \frac{1}{4}\sqrt{x+1} + \frac{2}{4}\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt{2x}+\frac{1}{4}\sqrt{x+1}+\frac{2}{4}\sqrt{2}}.$$

Очевидно, с точностью до коэффициента $g(x)$ есть композиция функций $\frac{1}{4}\sqrt{2x} + \frac{1}{4}\sqrt{x+1} + \frac{2}{4}\sqrt{2}$ и $h(t) = t^t$, $t > 0$, определённая на интервале $(0; +\infty)$. Так как h — строго выпуклая функция (это следует [1] из представления $h(t) = e^{t\ln t}$, строгой выпуклости и возрастания экспоненты, а также строгой выпуклости функции $t\ln t$), то $g(x)$ можно оценить сверху по неравенству Йенсена следующим образом:

$$g(x) \leqslant 4\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{2x}\right)^{\sqrt{2x}} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}\right)^{\sqrt{x+1}} + \frac{2}{4}\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right). \tag{7}$$

Таким образом, для выражения f на интервале $(0; +\infty)$ имеем оценку:

$$f(x) \leqslant 2\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}.$$

В полученном соотношении равенство будет достигаться лишь тогда, когда будет иметь место равенство в оценке (7), а последнее возможно только при условии $\sqrt{2x} = \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$, то есть при $x = 1$.

В результате можем записать $\sup\limits_{x>0} f(x) = 2\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и отметить, что найденное значение достигается при $x = 1$.

Задача 5. *Вычислите* $\inf\limits_{x\neq 0} f(x)$, *где*

$$f(x) = \ln\ln^2\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt[4]{2+x^2}}{2} - \ln\ln\sqrt{1+x^2} - \ln\ln\sqrt[4]{2+x^2}.$$

Решение. Слагаемые выражения f описываются функцией $h(t) = \ln\ln t$, являющейся строго вогнутой на интервале $(0; +\infty)$ [2]. В силу неравенства Йенсена имеем оценку:

$$\ln\ln^2\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt[4]{2+x^2}}{2} = 2\ln\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt[4]{2+x^2}}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \ln\ln\sqrt{1+x^2} + \ln\ln\sqrt[4]{2+x^2}.$$

Следовательно, справедливо соотношение $f(x) \geqslant 0$, при этом равенство в нём будет достигаться только при условии $\sqrt{1+x^2} = \sqrt[4]{2+x^2}$, то есть при $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Таким образом, $\inf\limits_{x\neq 0} f(x) = 0$, при этом найденное значение достигается при $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 6. *Какое наименьшее значение может принимать функция*

$$g(x) = \frac{4e^{7-14x}}{14x-7} + \frac{3e^{-7x}}{7x} - \frac{7e^{4-11x}}{11x-4}$$

на интервале $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$*?*

Решение. Очевидно, функция g на интервале $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ определена. Так как функция $h(t) = \frac{1}{t}e^{-t}$, $t > 0$, является строго выпуклой [1], то для функции g в силу неравенства Йенсена будет справедлива на рассматриваемом интервале следующая оценка:

$$g(x) = 7\left(\frac{4}{7}\frac{1}{14x-7}e^{-(14x-7)} + \frac{3}{7}\frac{e^{-7x}}{7x}\right) - \frac{7e^{4-11x}}{11x-4} \geqslant$$
$$\geqslant 7\frac{1}{\frac{4}{7}(14x-7) + \frac{3}{7}7x}e^{-\left(\frac{4}{7}(14x-7)+\frac{3}{7}7x\right)} - \frac{7e^{4-11x}}{11x-4} = 0.$$

Равенство в данной оценке будет достигаться лишь при условии $14x - 7 = 7x$, то есть при $x = 1$.

Таким образом, наименьшее значение функции g на интервале $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ равно 0, оно принимается в точке $x = 1$.

Список литературы

1. **Калинин С. И., Соколова Д. А.** Конструирование выпуклых функций без обращения к производным // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : период. межвуз. сб. науч.-метод. работ. 2019. № 21. С. 146–153.*

2. **Соколова Д. А.** Об одном приёме конструирования сложных выпуклых функций без обращения к производным // *Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы (MATHEDU'2019) : м-лы IX Междунар. науч.-практ. конф. Казань: КФУ, 2019. С. 166–171.*

3. **Калинин С. И.** Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана : учеб. пособие по спецкурсу. Киров: Изд-во ВГГУ, 2002. 368 с.

4. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1. 607 с.

5. **Вычегжанин С. В.** Доказательство неравенства Йенсена методом прямой и обратной индукции // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. Вып. 15. С. 166–172.*

6. **Калинин С. И.** Метод неравенств решения уравнений : учеб. пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. М.: Московский Лицей, 2013. 112 с.

Summary

Kalinin S. I., Sokolova D. A. Application of Jensen's inequality to solving equations and optimization tasks

In this article, we consider equations and optimization tasks that can be effectively solved by using Jensen's inequality for convex or concave functions. The main feature of the proposed problems is that when formulating and solving them, the convex (concave) functions, which are compositions or products of convex (concave) functions that are simple according to the analytical description are used. This circumstance makes it possible to determine the character of the convexity of the function used in a specific task without referring to its differentiability or its second-order derivative. The work is addressed to everyone interested in the issues of convex functions and the themes of inequality. Its content can be useful in organizing the research activities of students and schoolchildren of specialized classes.

Keywords: Jensen's inequality, product of functions, composition of functions, equation, optimization tasks.

References

1. **Kalinin S. I., Sokolova D.A.** Konstruirovaniye vypuklykh funktsiy bez obrashcheniya k proizvodnym (Construction of convex functions without reference to derivatives), *Mathematical bulletin of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region: period. inter-university. Sat. scientific method. works*, 2019, No. 21, pp. 146–153.

2. **Sokolova D. A.** Ob odnom priyome konstruirovaniya slozhnykh vypuklykh funktsiy bez obrashcheniya k proizvodnym (On one method of constructing complex convex functions without referring to derivatives), *Mathematical education at school and university: experience, problems, prospects (MATHEDU'2019) M-ly IX Intern. scientific-practical conf.*, Kazan: Kazan Federal University, 2019, pp. 166–171.

3. **Kalinin S. I.** *Sredniye velichiny stepennogo tipa. Neravenstva Koshi i Ki Fana: Ucheb. posobiye po spetskursu* (Average values of power type. Cauchy and Ki Fan inequalities: Textbook. special course manual), Kirov: VGGU Publishing House, 2002, 368 p.

4. **Fikhtengol'ts G. M.** *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (A course in differential and integral calculus), Moscow: Nauka, 1966, Vol. 1, 607 p.

5. **Vychegzhanin S. V.** Dokazatel'stvo neravenstva Yyensena metodom pryamogo i obratnogo induktsii (Proof of Jensen's inequality by the method of direct and reverse induction), *Mathematical bulletin of pedagogical universities and universities of the Volga-Vyatka region. Issue 15: periodic interuniversity collection of scientific and methodological works*, Kirov: Publishing house of OOO «Raduga-PRESS», 2013, pp. 166–172.

6. **Kalinin S. I.** *Metod neravenstv resheniy uravneniy. Uchebnoye posobiye po elektivnomu kursu dlya klassov fiziko-matematicheskogo profilya* (Method of inequalities for solutions of equations. Textbook for an elective course for classes of physical and mathematical profile), Moscow: Publishing house «Moscow Lyceum», 2013, 112 p.

Для цитирования: Калинин С. И., Соколова Д. А. Применение неравенства Йенсена при решении уравнений и оптимизационных задач // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (38). С. 4–12. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_04.*

For citation: Kalinin S. I., Sokolova D. A. Application of Jensen's inequality to solving equations and optimization tasks, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 1 (38), pp. 4–12. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_1_04.

ФГБОУ ВО ВятГУ *Поступила 10.02.2021*