ISSN 1992-2752

Вестник Сыктывкарского университета

Серия 1:
Математика
Механика
Информатика

4(37) выпуск **20**

Вестник Сыктывкарского университета Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	Серия 1: *Математика Механика Информатика*	12+ ISSN 1992-2752 Выпуск 4 (37) 2020

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. — Выпуск 4 (37). 2020. — 92 с.

Рецензируемый научный журнал. Основан в 1995 г.

Журнал «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» включён Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук». Журнал публикует научные статьи по следующим научным специальностям: 01.00.00 — Физико-математические науки; 05.13.00 — Информатика, вычислительная техника и управление; 13.00.02 — Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) (См.: Список журналов на сайте ВАК при Минобрнауки России).

The peer-reviewed journal was founded in 1995

«Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics» is included by the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation into «the List of leading reviewed academic journals and periodicals recommended for publishing in corresponding series basic research thesis results for a Ph.D. Candidate or Doctorate Degree» on the following scientific specialities: 01.00.00 — Physical and mathematical Sciences; 05.13.00 — computer Science, computer engineering and management; 13.00.02 — Theory and methods of teaching and education (by areas and levels of education) (See: the online List of journals at the site of the Supreme Certifying Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation).

Адрес редакции
Вестника Сыктывкарского университета
167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55
Тел. (8212)390-308.
Электронный адрес: http://vestnik-mmi.syktsu.ru/

Свободная цена

© ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2020.

Редакционная коллегия

Главный редактор

Сотникова О.А., д.п.н., ректор ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина»

Ответственный редактор

Ермоленко А.В., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

Члены редакционной коллегии

Асланов Р.М., к.ф.-м.н., д.п.н., профессор (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан),
Беляева Н.А., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),
Головач П.А., к.ф.-м.н., доцент (Университет Бергена, Норвегия),
Григорьев С.Г., чл.-корр. РАО, д.т.н., профессор (МГПУ),
Калинин С.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),
Колпак Е.П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),
Котов Л.Н., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Одинец В.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Попов Н.И., д.п.н., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Певный А.Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Петров Н.Н., д.ф.-м.н., профессор (УдмГУ),
Петраков А.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),
Рудикова Л.В., к.ф.-м.н., доцент (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь),
Тихомиров А.Н., д.ф.-м.н., профессор (Коми НЦ УрО РАН),
Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

Техническая редакция

Гудырева Л.В., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Котелина Н.О., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Мазур В.В. (СГУ им. Питирима Сорокина),
Хозяинов С.А., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),
Юркина М.Н. (СГУ им. Питирима Сорокина).

Журнал включён в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ), имеет полнотекстовую сетевую версию в Интернете на платформе Научной электронной библиотеки (www.elibrary.ru).

При цитировании ссылка на «Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика» обязательна.

Содержание

Математика

Бабенко М. В. *О полукольце многочленов над полукольцом Безу* 5

Ефимов Д. Б. *Об одном методе вычисления гафниана* 16

Методические материалы

Габова М. Н., Мужикова А. В. *Контекстный подход в преподавании математики будущим инженерам* 26

Одинец В. П. *Судьба двух математиков: отца и сына Перельманов* 51

Певный А. Б., Юркина М. Н. *Сложность решета Эратосфена и распределение простых чисел* 66

Попов Н. И., Яковлева Е. В. *Использование метода схематизации при обучении студентов и школьников математике* 73

Персоналии **88**

МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (37). 2020

УДК 512.55 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_05**

О ПОЛУКОЛЬЦЕ МНОГОЧЛЕНОВ НАД ПОЛУКОЛЬЦОМ БЕЗУ

М. В. Бабенко

В статье исследуется полукольцо многочленов над риккартовым полукольцом Безу. Именно пусть все левые аннуляторные идеалы полукольца S являются идеалами. Тогда полукольцо многочленов $R = S[x]$ является полукольцом без нильпотентных элементов и каждый конечно порожденный левый монический идеал из R является главным в точности тогда, когда S — риккартово слева левое полукольцо Безу и любой неделитель нуля полукольца S обратим в S. Этот результат является аналогом утверждения для колец, если условие «каждый конечно порожденный левый монический идеал из R является главным» заменить на «R — левое кольцо Безу». Левый монический идеал полукольца многочленов — это левый идеал, который содержит каждый одночлен своего многочлена. Получено описание главных левых монических идеалов над риккартовым слева левым полукольцом Безу.
Ключевые слова: полукольцо многочленов, риккартово полукольцо, полукольцо Безу, монический идеал.

Введение. Известно [1, теорема 1], что если A — кольцо, в котором каждый левый аннуляторный идеал является идеалом, то кольцо многочленов $A[x]$ является левым кольцом Безу тогда и только тогда, когда A — риккартово слева левое кольцо Безу, каждый неделитель нуля которого обратим в A. В классе полуколец этот результат неверен — свойство «быть полукольцом Безу» плохо переносится с полукольца коэффициентов на полукольцо многочленов. Для описания полукольца многочленов над полукольцом Безу мы используем монические идеалы полукольца многочленов (m-идеалы), введенные в рассмотрение Л. Дэйлом [2; 3]. Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть все левые аннуляторные идеалы полукольца S являются идеалами, $R = S[x]$. Тогда равносильны утверждения:*

© Бабенко М. В., 2020.

1. *R — полукольцо без нильпотентных элементов, и каждый конечно порожденный левый m-идеал из R является главным;*

2. *S — риккартово слева левое полукольцо Безу, любой неделитель нуля полукольца S обратим в S.*

Основные понятия. Следуя Дж. Голану [4], под *полукольцом* мы понимаем алгебраическую структуру $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой с единицей относительно умножения, умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения, нуль мультипликативен (т. е. справедливо условие $a0 = 0 = 0a$ для любого $a \in S$).

Левым идеалом полукольца S называется такое непустое подмножество $A \subseteq S$, что $a + b, sa \in A$ для любых $a, b \in A$, $s \in S$; идеалом называется непустое подмножество, являющееся как левым, так и правым идеалом. Основным объектом в нашей статье является полукольцо многочленов $R = S[x]$ со стандартно определяемыми операциями сложения и умножения. Для изучения полуколец многочленов, особенно в вопросах, связанных с некоторыми условиями конечности, часто помогают монические идеалы, которые мы в нашей работе будем называть m-идеалами. Именно, левый идеал A полукольца R называется *левым m-идеалом*, если $f_0 + f_1x + \ldots + f_kx^k \in A$ влечет $f_ix^i \in A$ для всех $i = 0, \ldots, k$. Дадим схему описания левых m-идеалов, детали можно найти в [2; 3]. Пусть A — произвольный левый идеал полукольца $R = S[x]$. Через $A_i = \{a \in S : \exists f = \ldots + ax^i + \ldots \in A\}$ обозначим *левые коэффициентные идеалы* для A. Легко заметить, что для любого левого идеала A из R его левые коэффициентные идеалы образуют возрастающую цепь $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$. Пусть сейчас $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$ — произвольная возрастающая цепь левых идеалов из S, необязательно связанная с каким-либо левым идеалом. Тогда $B^* = \{\sum b_ix^i : b_i \in B_i$, суммы конечные$\}$ — левый m-идеал. Через A^* мы договоримся также обозначать левый m-идеал, порождаемый коэффициентными идеалами левого идеала A. В этих терминах получаем, что *левый идеал A полукольца $S[x]$ является левым m-идеалом в точности тогда, когда $A = A^*$.*

Идемпотент e полукольца S называется *дополняемым*, если для некоторого $e^\perp \in S$ выполняется $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = 0$. Если при этом идемпотент e является центральным (т. е. выполняется $se = es$ для любого $s \in S$), то его дополнение $e^\perp$ задается однозначно и также является центральным дополняемым идемпотентом. Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S обозначим через BS. Со сложением $e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f$ и обычным полукольце-

вым умножением получаем булево кольцо $\langle BS, \oplus, \cdot \rangle$. Множество BS также можно представить как булеву решетку $\langle BS, \vee, \wedge \rangle$, если точную нижнюю грань $\wedge$ элементов взять совпадающей с полукольцевым умножением, а точную верхнюю грань определить следующим образом: $e \vee f = e + e^{\perp} f = e f^{\perp} + f$. Информацию о дополняемых идемпотентах полукольца можно найти также в [5].

Левый идеал $\mathrm{ann}_l(A) = \{s \in S : sa = 0$ для любого $a \in A\}$ полукольца S называется *левым аннуляторным идеалом* множества $A \subseteq S$; левый аннулятор элемента обозначается через $\mathrm{ann}_l(a)$.

Определение. *Полукольцо S называется* ***риккартовым слева****, если для любого $a \in S$ найдется такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $\mathrm{ann}_l(a) = Se$.*

Определение. *Полукольцо называется* ***левым полукольцом Безу****, если каждый его конечно порожденный левый идеал является главным левым идеалом.*

Пример. Пусть A — риккартово слева левое кольцо Безу, каждый левый аннуляторный идеал в в этом кольце является идеалом, и каждый неделитель нуля в A обратим. Известно, что тогда кольцо многочленов над A является левым кольцом Безу. Покажем, что для полуколец это не так. Действительно, пусть S является двухэлементной цепью. Тогда S — коммутативное полукольцо Безу, риккартово, 1 — единственный как неделитель нуля, так и обратимый элемент в S. Однако $R = S[x]$ не является полукольцом Безу; например, $Rx + R(1 + x)$ не является главным идеалом.

Вспомогательные утверждения, главные левые m-идеалы. Для характеризации полукольца многочленов $R = S[x]$ над риккартовым слева левым полукольцом Безу нам потребуется описание главных левых m-идеалов в R. Начнем со следующих примеров.

Примеры. 1) Rax^i — главный левый m-идеал полукольца $R = S[x]$ для любых $a \in S$ и $i \geq 0$.

2) Сумма левых m-идеалов является левым m-идеалом.

3) Не каждый главный левый идеал полукольца многочленов является левым m-идеалом. Так, главный идеал $R(1 + x)$ не является m-идеалом для полукольца многочленов $R = \mathbb{N}[x]$ над полукольцом целых неотрицательных чисел.

4) С другой стороны, главные левые m-идеалы могут быть устроены более сложно, чем указанные в примере 1). Пусть B — 8-элементная булева алгебра с атомами a, b, c, $R = B[x]$ и $A = R(a + cx)$ — главный

левый идеал. Поскольку $a(a+cx)=a$ и $c(a+cx)=cx$, то $a, cx \in A$. Непосредственно проверяется, что коэффициентные идеалы у A следующие: $A_0=\{0,a\}$ — идеал свободных членов, $A_i=\{0,a,c,b^{\perp}\}$ — все остальные коэффициентные идеалы. Также легко заметить, что для любого $a_i \in A_i$ одночлен $a_i x^i$ лежит в A, поэтому A является m-идеалом. Очевидно, A не порождается как левый идеал многочленом a. Следовательно, A — главный левый m-идеал, порождающий элемент которого не является одночленом.

Отметим простое свойство, которое будем использовать в дальнейшем: если в полукольце элемент представим в виде произведения центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля, то идемпотент определяется однозначно. Действительно, пусть $ed=fd$ для $e,f \in BS$ и неделителя нуля d. Тогда $0=e^{\perp}fd$, откуда получаем $e^{\perp}f=0$ и $f \le e$. Симметричным образом получаем $e \le f$.

Лемма 1. *В полукольце S справедливы утверждения:*

1. *Пусть $a, g_0, g_1 \in S$ и $a=ud, g_0=u_0d_0, g_1=u_1d_1$ для $u, u_i \in BS$ и неделителей нуля d, d_i. Тогда $Sg_0+Sg_1=Sa$ влечет $u=u_0 \vee u_1$; в частности, при $g_1=0$ получаем, что из $Sg_0=Sa$ следует $u_0=u$.*

2. *Если $a,b,c \in BS$ и $a \vee b=c$, то $Sa+Sb=Sc$.*

Доказательство. 1) Пусть $a=s_0g_0+s_1g_1$ для некоторых $s_i \in S$. Тогда $u(u_0 \vee u_1)d=s_0u_0(u_0 \vee u_1)d_0+s_1u_1(u_0 \vee u_1)d_1=ud$. Так как идемпотент определяется однозначно, то из равенства $u(u_0 \vee u_1)d=ud$ следует $u(u_0 \vee \vee u_1)=u$, поэтому $u \le u_0 \vee u_1$. Далее, в силу того, что $Sg_0 \subseteq Sa$, можем записать $g_0=ta$ для некоторого $t \in S$, откуда $u_0d_0=ta=tud= =utud=uta=ug_0=uu_0d_0$. Получаем $u_0 \le u$. Аналогично, $u_1 \le u$, следовательно, $u=u_0 \vee u_1$. По индукции утверждение справедливо для любого конечного числа элементов $g_0, \ldots, g_i \in S$.

2) Из условия следует $a+a^{\perp}b=c$, поэтому $Sc \subseteq Sa+Sb$. Из $a,b \le c$ получаем $ac=a, bc=b$, поэтому $sa+tb=(sa+tb)c$, откуда $Sa+Sb \subseteq \subseteq Sc$. □

Полукольцо S называется *полукольцом без нильпотентных элементов*, если $a^2=0$ влечет $a=0$ для любого $a \in S$; полукольцо с квазитождеством $ab=0 \Longrightarrow ba=0$ называется *коммутативным в нуле*. Нетрудно заметить, что полукольцо без нильпотентных элементов коммутативно в нуле. Действительно, если $ab=0$, то $(ba)^2=baba=0$, следовательно, $ba=0$.

Лемма 2. *Для риккартова слева полукольца S, в котором произвольный левый аннуляторный идеал является идеалом, справедливы утверждения:*

1. *каждый дополняемый идемпотент является центральным, а S — полукольцо без нильпотентных элементов;*

2. *каждый элемент из S является произведением однозначно определенного центрального дополняемого идемпотента и неделителя нуля.*

Доказательство. 1) Пусть e — дополняемый идемпотент, тогда $e^{\perp} \in \in \operatorname{ann}_l(e)$. В силу условия $e^{\perp}se = 0$ для произвольного $s \in S$. Поэтому $ese = ese + e^{\perp}se = (e + e^{\perp})se = se$. С другой стороны, $e \in \operatorname{ann}_l(e^{\perp})$, что влечет $ese = es$. Следовательно, e — центральный элемент в S. Далее, пусть $a^2 = 0$. Тогда $a \in \operatorname{ann}_l(a) = Se$ для некоторого $e \in BS$, откуда получаем $a = ea = 0$, и S — полукольцо без нильпотентных элементов.

2) Пусть $a \in S$, и $\operatorname{ann}_l(a) = Se$ для некоторого $e \in BS$. Из $ea = 0$ следует $a = e^{\perp}a$. Положим $d = a + e$. Получаем $a = e^{\perp}a = e^{\perp}(a+ +e) = e^{\perp}d$. Покажем, что d — неделитель нуля. Пусть $b \in \operatorname{ann}_l(d)$. Тогда $0 = bd = b(a + e) = b(e^{\perp}a + e) = e^{\perp}ba + be$. Учитывая, что $0 = e0 = = e(e^{\perp}ba + be) = be$, получаем $e^{\perp}ba = 0$. Следовательно, $ba = be^{\perp}a = 0$ и $b \in \operatorname{ann}_l(a) = Se$, поэтому $b = be$, откуда $b = 0$. Показали, что d — правый неделитель нуля. Полукольцо без нильпотентных элементов является коммутативным в нуле, поэтому d является также и левым неделителем нуля. Наконец, единственность идемпотента в представлении $a = e^{\perp}d$ была показана выше. □

Предложение 3. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, все левые аннуляторные идеалы из S являются идеалами, d — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$, $R = S[x]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если для любого $i = 0, \ldots, k-1$ выполнено $f_{i+1} \in \operatorname{ann}_l(Sf_0 + \ldots + +Sf_i)$, то $R(f_0 + \ldots + f_kx^k)$ — главный левый m-идеал полукольца R, коэффициентные левые идеалы которого образуют цепь $Sf_0 \subseteq Sf_0 + Sf_1 \subseteq \ldots \subseteq Sf_0 + \ldots + Sf_k = Sf_0 + \ldots + Sf_k = \ldots$;*

2. *если L — главный левый m-идеал в R, то найдется такой многочлен $f = f_0 + \ldots + f_kx^k$, что $f_i \in BS$, $L = Rf$ и $f_{i+1} \in \in \operatorname{ann}_l(Sf_0 + \ldots + Sf_i)$ для всех $i = 0, \ldots, k-1$.*

Доказательство. 1) Непосредственно проверяется, что множества

$$\begin{aligned} L_0 &= Sf_0, \\ L_1 &= Sf_0 + Sf_1, \\ &\dots \\ L_k &= Sf_0 + \ldots + Sf_k \end{aligned}$$

являются коэффициентными левыми идеалами левого идеала Rf для $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$. Полукольцо S является левым полукольцом Безу, поэтому $L_i = Sf_0 + \ldots + Sf_i = Sa_i$ для некоторого $a_i \in S$. Нам надо показать $Sa_i x^i \subseteq Rf$. Проведем индукцию по i.

Получаем такую цепь: $Sa_0 \subseteq Sa_1 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k = Sa_k = \ldots$. Поскольку каждый левый аннуляторный идеал является идеалом, то $\mathrm{ann}_l(a) = \mathrm{ann}_l(Sa)$. Поэтому $\mathrm{ann}_l(a_k) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_{k-1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{ann}_l(a_0)$. Полукольцо S — риккартово слева, поэтому по лемме 2 $\mathrm{ann}_l(a_i) = Se_i$ для подходящих $e_i \in BS$. Для любого $i \geq 1$ выполняется $f_i \in \mathrm{ann}_l(a_{i-1}) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_0) = Se_0$. Следовательно, $f_i e_0^{\perp} = 0$ для всех $i \geq 1$. Кроме того, $f_0 e_0 = 0$, поэтому $f_0 e_0^{\perp} = f_0$. Получаем $e_0^{\perp}(f_0 + \ldots + f_k x^k) = f_0 \in Rf$, поэтому $Sa_0 \subseteq Rf$.

Пусть $Sa_i x^i \subseteq Rf$ — индуктивное предположение. Из $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(a_i) = Se_i$ получаем $f_{i+1} = f_{i+1} e_i$, откуда $f_{i+1} e_i^{\perp} = 0$. Для любого $j = 0, \ldots, i$ справедливо $f_j \in Sa_i$, т. е. $f_j = s_j a_i$ для некоторого $s_j \in S$. Из $e_i a_i = 0$ следует $e_i f_j = 0$. Далее, для любого $j = i+2, \ldots, k$ из $f_j \in \mathrm{ann}_l(a_{j-1}) \subseteq \mathrm{ann}_l(a_{i+1}) = Se_{i+1}$ следует $f_j = t_j e_{i+1}$, откуда $e_{i+1}^{\perp} f_j = 0$. Получаем:

$$e_i e_{i+1}^{\perp} f = 0 + \ldots + 0x^i + e_i e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} + 0x^{i+2} + \ldots + 0x^k = e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} \in Rf.$$

Пусть $a_{i+1} = sa_i + tf_{i+1}$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда

$$e_{i+1}^{\perp} sx \cdot a_i x^i + t \cdot e_{i+1}^{\perp} f_{i+1} x^{i+1} = e_{i+1}^{\perp}(sa_i + tf_{i+1}) x^{i+1} = e_{i+1}^{\perp} a_{i+1} x^{i+1} \in Rf.$$

Поскольку $\mathrm{ann}_l(a_{i+1}) = Se_{i+1}$, то $a_{i+1} = e_{i+1}^{\perp} a_{i+1}$. Следовательно, $a_{i+1} x^{i+1} \in Rf$, и $Sa_{i+1} x^{i+1} \subseteq Rf$.

2) Пусть $L = R(g_0 + \ldots + g_k x^k)$ — главный левый m-идеал. Рассуждая как и в пункте 1), получаем, что $Sa_i = Sg_0 + \ldots + Sg_i$ — коэффициентные левые идеалы левого m-идеала L. Каждый элемент a_i имеет вид $a_i = u_i d_i$ для однозначно определенного $u_i \in BS$ и неделителя нуля $d_i \in S$ по лемме 2. Идемпотенты образуют цепь $u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_k$. Положим $f_0 = u_0$ и для любого $i \geq 1$ пусть $f_i \in BS$ — относительное дополнение идемпотента u_{i-1} в интервале $[0, u_i] \subseteq BS$. Уточним,

что f_i существует, поскольку любая булева решетка является решеткой с относительными дополнениями. Покажем, что $R(f_0 + \ldots + f_k x^k)$ является левым m-идеалом, совпадающим с L. Воспользуемся тем, что $u_i = u_{i-1} \vee f_i = f_0 \vee \ldots \vee f_i$, а по лемме 1 $Sa_i = Su_i = Sf_0 + \ldots + Sf_i$. По этой причине коэффициентные левые идеалы левого идеала Rf — в точности Sa_i. Непосредственно из конструкции следует $f_{i+1} \in \mathrm{ann}_l(u_i) = \mathrm{ann}_l(Sf_0 + \ldots + Sf_i)$, а из пункта 1) предложения вытекает, что Rf, где $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, является левым m-идеалом. Поскольку у левых m-идеалов L и Rf совпадают их коэффициентные левые идеалы (а именно, они равны Sa_i), то $L = Rf$. □

Конструкция, применяемая в предложении 3, позволяет рассмотреть ее в более общей ситуации.

Лемма 4. *Пусть S — произвольное полукольцо, $c_0 \leq c_1 \leq \ldots \leq c_k$ — произвольная цепь идемпотентов из BS. Тогда левый m-идеал L, задаваемый цепью $Sc_0 \subseteq Sc_1 \subseteq \ldots \subseteq Sc_k = Sc_k \ldots$, является главным левым m-идеалом полукольца $R = S[x]$.*

Доказательство. Положим $f_0 = c_0$ и f_{i+1} — относительное дополнение идемпотента c_i в интервале $[0, c_{i+1}]$ булевой решетки BS. Рассмотрим $f = f_0 + \ldots + f_k x^k \in R$. Для любых $j < i \leq k$ выполняется $f_j \leq c_j \leq c_{i-1}$, поэтому $f_j \wedge f_i \leq c_{i-1} \wedge f_i = 0$. Получаем, что идемпотенты f_i, $i = 0, \ldots, k$ образуют ортогональную систему. Вспомним, что операция $\wedge$ в BS совпадает с полукольцевым умножением в S. Поэтому $f_i f = f_i x^i \in Rf$ для любого $i \geq 0$, и Rf — главный левый m-идеал полукольца R. Пусть L_i — его произвольный коэффициентный левый идеал. Несложно понять, что $L_i x^i$ состоит из одночленов вида $s_0 f_0 x^i, \ldots, s_k f_k x^i$ и их конечных сумм. По лемме 1 $L_i = Sf_0 + \ldots + Sf_k = S(f_0 \vee \ldots \vee f_i) = Sc_i$. Отсюда получаем, что $L = Rf$. □

Лемма 5. *Пусть S — риккартово слева левое полукольцо Безу, каждый левый аннуляторный идеал является идеалом, d — обратимый в S элемент для каждого неделителя нуля $d \in S$. Тогда каждый конечно порожденный левый m-идеал полукольца $R = S[x]$ является главным левым m-идеалом.*

Доказательство. Пусть $Rf + Rg$ — сумма главных левых m-идеалов, $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, $g = g_0 + \ldots + g_k x^k$, где $k = \max\{\deg f, \deg g\}$. По предложению 3 коэффициентные левые идеалы для Rf и Rg образуют цепи $Sa_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k = Sa_k \ldots$ и $Sb_0 \subseteq \ldots \subseteq Sb_k = Sb_k \ldots$ соответственно. Левый идеал $Rf + Rg$ является левым m-идеалом, коэффициентные

левые идеалы которого образуют цепь $Sa_0 + Sb_0 \subseteq \ldots \subseteq Sa_k + Sb_k = Sa_k + Sb_k \ldots$. Полукольцо S является левым полукольцом Безу, поэтому $Sa_i + Sb_i = Sc_i$ для некоторого $c_i \in S$, причем, по лемме 2, без ограничения общности можно считать, что $a_i, b_i \in BS$ и $c_i = a_i \vee b_i$. Выполнены все условия леммы 4, следовательно, $Rf + Rg$ — главный левый m-идеал полукольца R. □

Доказательство теоремы.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) По лемме 2 полукольцо S является полукольцом без нильпотентных элементов. Понятно, что в этом случае и R — полукольцо без нильпотентных элементов. Поэтому доказательство импликации завершается применением леммы 5.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $a, b \in S$. Левые идеалы Ra и Rb являются левыми m-идеалами, поэтому левым m-идеалом будет и их сумма. По условию $Ra + Rb$ — главный левый m-идеал Rf для некоторого многочлена $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$. Поскольку у равных левых идеалов полукольца R совпадают их соответствующие коэффициентные левые идеалы, получаем $Sa + Sb = Sf_0$. Следовательно, S является левым полукольцом Безу.

Конечно порожденнный левый m-идеал $Ra + Rx$ является главным, поэтому $Ra + Rx = Rh$ для некоторого $h = h_0 + \ldots + h_n x^n \in R$. Тогда $a = uh$, $x = vh$ и $h = fa + gx$ для подходящих $f, g, u, v \in R$. Пусть $f = f_0 + \ldots + f_k x^k$, и аналогичные обозначения используем для других многочленов. Получаем:

$$a = u_0 h_0 = u_0 f_0 a, \tag{1}$$

$$0 = v_0 h_0 = v_0 f_0 a, \tag{2}$$

$$1 = v_0 h_1 + v_1 h_0 = v_0(f_1 a + g_0) + v_1 f_0 a = v_0 g_0 + ba, \tag{3}$$

где $b = v_0 f_1 + v_1 f_0$. Поскольку $v_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$ — идеал в S, то $v_0 g_0 u_0 \in \mathrm{ann}_l(f_0 a)$, откуда получаем $0 = v_0 g_0 u_0 f_0 a = v_0 g_0 a$. Полукольцо R, а следовательно и S, является полукольцом без нильпотентных элементов, поэтому S коммутативно в нуле, и из (3) следует $a = a v_0 g_0 + aba = aba$. Получили $ba = (ba)^2$ и $v_0 g_0 ba = 0$. Таким образом, ba — дополняемый идемпотент, а $v_0 g_0 = (ba)^\perp$ — его дополнение. Покажем, что идемпотент ba является центральным. Умножая (3) на bas слева и на sba справа, получаем: $bas = bas(ba)^\perp + basba = (ba)^\perp sba + basba = ((ba)^\perp + ba)sba = sba$ для любого $s \in S$. Наконец, если $c \in \mathrm{ann}_l(a)$, то $c = cv_0 g_0 + cba = cv_0 g_0$. Следовательно, $\mathrm{ann}_l(a) = Sv_0 g_0$, и S — рикартово слева полукольцо.

Пусть d — неделитель нуля в S. По доказанному выше $d = dbd$ для некоторого $b \in S$, при этом $bd \in BS$. Тогда $d(bd)^{\perp} = 0$, поэтому $(bd)^{\perp} = 0$ и $bd = 1$. Показали, что d — обратимый слева элемент в S. Обозначим $u = db$. Тогда $u = ucu$ для некоторого $c \in S$; заметим, что u, а значит, и c являются неделителями нуля. Рассуждая, как и выше, получаем $cu = 1$, поэтому элемент c обратим справа. Но поскольку c — неделитель нуля, то он обратим и слева. Отсюда следует, что u — обратимый элемент. Получаем $1 = uc = dbc$ и d — обратимый справа и поэтому обратимый в S элемент. □

Заключение. Полученный в статье основной результат является полукольцевым аналогом теоремы А. А. Туганбаева [1, теорема 1]. Более точно, у Туганбаева рассматривается кольцо косых многочленов $R[x, \varphi]$, поэтому наша теорема — аналог частного случая при тождественном автоморфизме φ. Поэтому интересным будет дальнейшее развитие идей нашей статьи при рассмотрении полукольца косых многочленов (исследование полуколец косых многочленов начато в [6]). Основные трудности, на первый взгляд, будут связаны с описанием односторонних монических идеалов. Также пока не понятно, будут ли принципиально отличаться левосторонний и правосторонний случаи в полукольце косых многочленов.

Список литературы

1. **Туганбаев А. А.** Кольца Безу, многочлены и дистрибутивность // *Математические заметки. 2001. 70:2. С. 270–288.*

2. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings // *Proc. Amer. Math. Soc. 1976. 56. P. 45–50.*

3. **Dale L.** The structure of monic ideals in a noncommutative polynomial semirings // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1982. 39:1–3. P. 163–168.*

4. **Golan J. S.** Semirings and their applications. *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.*

5. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings // *J. Math. Sci. (New York). 2012. 187:2. P. 187–267.*

6. **Масляев Д. А., Чермных В. В.** Полукольца косых многочленов Лорана // *Сибирские электронные матем. известия. 2020. Т. 17. С. 512–533.*

Summary

Babenko M. V. On the polynomial semiring over a Bezout semiring

The article examines a polynomial semiring over a Bezout Rickart semiring. Namely, let all left annihilator ideals of the semiring S be ideals. Then the semiring of polynomials $R = S[x]$ is a semiring without nilpotent elements and every finitely generated left monic ideal from R is principal iff S is a left Rickart left Bezout semiring and any non-zero divisor of the semiring S is convertible to S. This result is analogous to the statement for rings, if the condition «each finitely generated left monic ideal of R is principal» replaced by «R is left Bezout ring». The left monic ideal of a polynomial semiring is a left ideal that contains each monomial of its polynomial. The principal left monic ideals over a left Rickart left Bezout semiring are described.

Keywords: polynomial semiring, Rickart semiring, Bezout semiring, monic ideal.

References

1. **Tuganbaev A. A.** Kol'ca Bezu, mnogochleny i distributivnost' (Bezout rings, polynomials and distributivity) *Mathematical notes*, 2001, 70:2, pp. 270–288.

2. **Dale L.** Monic and monic free ideals in polynomial semirings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, No 56, pp. 45–50.

3. **Dale L.** The structure of monic ideals in a noncommutative polynomial semirings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 1982, 39:1-3, pp. 163–168.

4. **Golan J. S.** Semirings and their applications, *Kluwer Acad. Publ.*, Dordrecht, 1999.

5. **Chermnykh V. V.** Functional representations of semirings, *J. Math. Sci.*, New York, 2012, 187:2, pp. 187–267.

6. **Maslyaev D. A., Chermnykh V. V.** Polukol'ca kosyh mnogochlenov Lorana (Semirings of skew Laurent polynomials), *Siberian electronic mat. reports.*, 2020, Vol. 17, pp. 512–533.

Для цитирования: Бабенко М. В. О полукольце многочленов над полукольцом Безу // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 5–15. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_05.*

For citation: Babenko M. V. On the polynomial semiring over a Bezout semiring, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 4 (37), pp. 5–15.
DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_05.

ВятГУ *Поступила 20.11.2020*

МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (37). 2020

УДК 519.1, 512.64 DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_16

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГАФНИАНА

Д. Б. Ефимов

Понятие гафниана по аналогии с пфаффианом было первоначально введено Э. Р. Каяньелло в качестве удобного математического аппарата для работы с определенными квантово-механическими величинами. С комбинаторной точки зрения гафниан симметричной матрицы равен сумме весов совершенных паросочетаний графа с данной матрицей инцидентности. В отличие от пфаффиана гафниан обладает меньшим набором «хороших» свойств, и определение его значения — это один из примеров труднорешаемой вычислительной задачи. В представленной работе рассмотрен новый метод вычисления гафниана матрицы через перманенты ее подматриц. Приведено его сравнение с другими методами с точки зрения вычислительной сложности. Лежащее в основе метода свойство может бы использовано также вне контекста скорости вычисления, например для оценки гафниана неотрицательной матрицы, исходя из известных оценок перманента.
Ключевые слова: гафниан, перманент, вычислительная сложность.

1. Введение

Несмотря на стремительное развитие вычислительной техники, существует много задач, которые не поддаются эффективному решению даже на современных мощностях. К такого рода вопросам относятся задачи моделирования сложных квантово-механических систем, задачи оптимизации сложных систем, криптографии и т. д. Если от общих понятий перейти на более конкретный уровень, то можно увидеть, что в основе каждой такой проблемы лежит зачастую очень просто формулируемая, но труднорешаемая с точки зрения вычислений математическая задача. В качестве примера можно привести знаменитую задачу о коммивояжере поиска оптимального в некотором смысле маршрута между

© Ефимов Д. Б., 2020.

городами. В данной статье мы хотим обратить внимание на другую, менее известную, но достаточно важную для приложений сложную вычислительную задачу — подсчет гафниана матрицы.

Напомним, что если $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица четного порядка n над ассоциативным коммутативным кольцом, то ее *гафниан* определяется следующим образом:

$$\mathrm{Hf}(A) = \sum_{(i_1 i_2 | \ldots | i_{n-1} i_n)} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{n-1} i_n}, \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на непересекающиеся пары $(i_1, i_2), \ldots, (i_{n-1}, i_n)$ с точностью до порядка пар и порядка элементов в каждой паре. Заметим, что диагональные элементы матрицы не участвуют в определении гафниана, поэтому далее для удобства мы будем считать их равными нулю. Так,

$$\mathrm{Hf}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix} = af + be + cd.$$

В квантовой теории поля гафниан естественным образом возникает при выражении ожидаемого значения произведения свободных бозонных полей [1–3]. В статистической механике с вычислением гафниана связана *задача димеров*, заключающаяся в определении числа всевозможных комбинаций двухатомных молекул на различных периодических решетках [4]. В более общем виде на языке теории графов данная задача переформулируется как поиск числа *совершенных паросочетаний* графа: если A — матрица смежности графа, то ее гафниан как раз равен такому числу.

Нетрудно подсчитать, что количество слагаемых в сумме (1) равно $(n-1)!!$. Соответственно, чтобы вычислить гафниан, необходимо выполнить $(n/2-1)(n-1)!!$ умножений. С ростом n это число стремительно растет и уже для небольших значений вычисление гафниана непосредственно по определению становится весьма затруднительным. Известно [3], что для гафниана справедлив следующий аналог свойства разложения по строке (столбцу) для определителя:

$$\mathrm{Hf}(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \mathrm{Hf}(A(i,j)),$$

где $A(i,j)$ — матрица, которая получается из матрицы A удалением строк и столбцов с номерами i, j. При вычислении гафниана по данной формуле необходимо будет произвести $n!!$ умножений, что в пределе дает более хороший результат по скорости, чем прямое вычисление по определению. В данной статье мы рассмотрим еще один метод вычисления гафниана, который дает дополнительную прибавку в скорости по сравнению с указанными выше методами. Назовем его условно *методом перманентов*. Косвенное указание на данный метод сделано в работе [2], но явно он там и, насколько известно автору, где бы то еще не рассматривался.

2. Вычисление гафниана методом перманентов

Прежде чем перейти к описанию метода, сделаем несколько необходимых определений. Напомним, что *перманентом* матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом называется следующее выражение:

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по перестановкам множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим также алгебру Pim_n, порожденную над произвольным ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, R-единицей и образующими $\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n$, удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям:

$$\iota_k \iota_l = (1 - \delta_{kl}) \iota_l \iota_k, \ (\iota_k \iota_l) \iota_m = \iota_k (\iota_l \iota_m), \ 1 \le k, l, m \le n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Нетрудно видеть, что Pim_n является свободным R-модулем ранга 2^n и любой ее элемент однозначно представляется в следующем виде:

$$p = p_0 + \sum_{t=1}^{n} \sum_{k_1 < \dots < k_t} p_{k_1 \dots k_t} \iota_{k_1} \dots \iota_{k_t}, \quad p_0, p_{k_1 \dots k_t} \in R. \tag{2}$$

Между перманентом, гафнианом, с одной стороны, и алгеброй Pim_n, с другой, существует связь, аналогичная той, которая существует между определителем, пфаффианом и алгеброй Грассмана. А именно пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица n-го порядка над кольцом R. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \iota_j = \mathrm{Per}(A) \iota_1 \iota_2 \dots \iota_n. \tag{3}$$

Если же A дополнительно симметрична и $n = 2m$, то

$$\frac{1}{2^m m!}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\iota_i\iota_j\right)^m = \frac{1}{m!}\left(\sum_{i<j} a_{ij}\iota_i\iota_j\right)^m = \mathrm{Hf}(A)\iota_1\iota_2\ldots\iota_n. \qquad (4)$$

Пусть $Q_{k,n}$ обозначает множество всех неупорядоченных k-элементных подмножеств множества $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Если A — матрица порядка n и $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, то через $A[\alpha|\beta]$ обозначим подматрицу в A, стоящую над пересечением строк с номерами из α и столбцов с номерами из β.

Предложение 1. *Пусть A — симметричная матрица порядка $n = 2m$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей. Тогда*

$$\mathrm{Hf}(A) = \frac{1}{2^m}\sum_{\alpha\subset Q_{m,n}} \mathrm{Per}(A[\alpha|I\backslash\alpha]). \qquad (5)$$

Доказательство. Применяя (4) и производя стандартные операции над элементами в алгебре Pim_n, получаем:

$$\mathrm{Hf}(A)\iota_1\iota_2\ldots\iota_n =$$
$$= \frac{1}{2^m m!}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\iota_i\iota_j\right)^m = \frac{1}{2^m m!}\left(\sum_{i=1}^{n}\iota_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\iota_j\right)\right)^m =$$
$$= \frac{1}{2^m m!}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\prod_{i=1}^{n}\iota_i^{k_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\iota_j\right)^{k_i}.$$

Если $k_i > 1$ хотя бы для одного i, то в силу определяющих соотношений алгебры Pim_n соответствующее слагаемое зануляется. Поэтому надо рассматривать только случаи, когда $k_i = 0, 1$, точнее, когда m индексов k_i равны 1, а остальные равны 0. Продолжая предыдущую цепочку равенств и используя (3), мы можем записать:

$$\frac{1}{2^m m!}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\prod_{i=1}^{n}\iota_i^{k_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\iota_j\right)^{k_i} =$$
$$= \frac{1}{2^m}\sum_{\alpha\subset Q_{m,n}}\prod_{k\in\alpha}\iota_k\left(\sum_{l\in I\backslash\alpha} a_{kl}\iota_l\right) = \frac{1}{2^m}\sum_{\alpha\subset Q_{m,n}}\mathrm{Per}(A[\alpha|I\backslash\alpha])\iota_1\iota_2\ldots\iota_n.$$

Первое и последнее выражение представленной последовательности равенств являются элементами алгебры Pim_n, записанными в виде (2).

Два таких элемента равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты перед соответствующими базисными элементами. Приравнивая коэффициенты при $\iota_1\iota_2\ldots\iota_n$ в первом и последнем выражении, получаем требуемое равенство. $\square$

Пример 1.

$$\mathrm{Hf}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{Per}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} + \mathrm{Per}\begin{pmatrix} b & d \\ c & e \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. +\mathrm{Per}\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} + \mathrm{Per}\begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix} + \mathrm{Per}\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} + \mathrm{Per}\begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(be + cd + be + cd + af + cd + af + cd + af + be + af + be\right) =$$

$$= af + be + cd.$$

Приведенное выше свойство можно несколько модифицировать. Обозначим через A' матрицу, которая получается из матрицы A путем зануления всех элементов на главной диагонали и ниже ее. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть A — симметричная матрица порядка $n = 2m$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей. Тогда*

$$\mathrm{Hf}(A) = \sum_{\alpha\subset Q_{m,n}} \mathrm{Per}(A'[\alpha|I\backslash\alpha]). \tag{6}$$

Доказательство. В точности повторяет предыдущее, только (4) надо использовать с вариантом суммирования по $i < j$.

$$\mathrm{Hf}(A)\iota_1\iota_2\ldots\iota_n = \frac{1}{m!}\left(\sum_{i<j} a_{ij}\iota_i\iota_j\right)^m = \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n}\iota_i\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\iota_j\right)\right)^m =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\prod_{i=1}^{n}\iota_i^{k_i}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\iota_j\right)^{k_i}.$$

Можно считать, что все a_{ij}, не вошедшие в суммирование, равны 0, т. е. мы переходим к $A' = (a'_{ij})$.

$$\frac{1}{m!}\sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}\prod_{i=1}^{n}\iota_i^{k_i}\left(\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\iota_j\right)^{k_i}=$$

$$=\sum_{\alpha\subset Q_{m,n}}\prod_{k\in\alpha}\iota_k\left(\sum_{l\in I\setminus\alpha}a'_{kl}\iota_l\right)=\sum_{\alpha\subset Q_{m,n}}\mathrm{Per}(A'[\alpha|I\setminus\alpha])\iota_1\iota_2\dots\iota_n.$$

□

Пример 2.

$$A=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\a&0&d&e\\b&d&0&f\\c&e&f&0\end{pmatrix}\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Hf}(A)=\mathrm{Per}\begin{pmatrix}b&c\\d&e\end{pmatrix}+\mathrm{Per}\begin{pmatrix}a&c\\0&f\end{pmatrix}+\mathrm{Per}\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}+$$

$$+\mathrm{Per}\begin{pmatrix}0&e\\0&f\end{pmatrix}+\mathrm{Per}\begin{pmatrix}0&d\\0&0\end{pmatrix}+\mathrm{Per}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=af+be+cd.$$

Из примера видно, что большинство перманентов имеют нулевое значение. Формулу (6) можно оптимизировать, убрав из рассмотрения часть нулевых перманентов. Пусть $i_1<i_2<\dots<i_m$; $j_1<j_2<\dots<j_m$; $i_k\neq j_l$, $k,l=1,\dots m$ — номера соответственно строк и столбцов очередного рассматриваемого перманента подматрицы матрицы A'. Для того чтобы он не был равен 0, необходимо, чтобы выполнялись условия $j_1\neq 1$, $i_m\neq n$. Отсюда следует, что в формуле (6) достаточно проводить суммирование только по тем подматрицам матрицы A', номера строк и столбцов которых удовлетворяют условиям $i_1=1$, $j_m=n$. Введем обозначения: $J=\{2,3,\dots,n-1\}$, $Q_{m-1,J}$ — множество всех $(m-1)$-элементных неупорядоченных подмножеств множества J. Тогда с учетом вышесказанного получаем следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть A — симметричная матрица порядка $n=2m$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей. Тогда*

$$\mathrm{Hf}(A)=\sum_{\alpha\in Q_{m-1,J}}\mathrm{Per}(A'[\{1\}\cup\alpha|I\setminus\alpha\cup\{n\}]). \tag{7}$$

Пример 3. Пусть A — 4×4 матрица из предыдущего примера. В данном случае имеются только два набора номеров строк и столбцов, удовлетворяющие условиям $i_1 = 1$, $j_2 = 4$: $(1, 2; 3, 4)$, $(1, 3; 2, 4)$. Поэтому

$$\mathrm{Hf}(A) = \mathrm{Per}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} + \mathrm{Per}\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & f \end{pmatrix} = af + be + cd.$$

Формулы (5) и (6) сводят вычисление гафниана матрицы порядка $2m$ к вычислению $\binom{2m}{m}$ перманентов матриц порядка m. Формула (7) сводит вычисление гафниана матрицы порядка $2m$ к вычислению $\binom{2m-2}{m-1}$ перманентов матриц порядка m. Перманент — это также сложновычислимая функция. Задача его нахождения относится к классу $\#P$-полных задач [5]. Вот уже долгое время наиболее быстрым методом вычисления перманента остается метод Райзера. Применяя его, можно определить значение перманента матрицы порядка n за время $O(n2^n)$ [4]. Отсюда следует, что с помощью формул (5)–(7) гафниан матрицы n-го порядка можно вычислить за время $O(\sqrt{n}2^{3n/2})$. Это существенно быстрее, чем вычисление гафниана методами, указанными во Введении. Но, с другой стороны, существуют и более быстрые методы. Так, в работе [6] описан алгоритм для точного вычисления гафниана произвольной комплексной $n \times n$ матрицы, работающий за время $O(n^3 2^{n/2})$.

3. Заключение

Мы рассмотрели метод вычисления гафниана матрицы, основанный на представлении гафниана в виде суммы перманентов подматриц данной матрицы. Это не самый медленный, но и далеко не самый быстрый метод вычисления гафниана. Здесь надо отметить, что в случае вычисления перманента и гафниана рассуждения о скорости алгоритмов довольно относительны. Все известные алгоритмы работают в лучшем случае за экспоненциальное время, и с большой долей уверенности можно сказать, что существенно улучшить этот показатель не удастся. Например, сложность вычисления перманента и гафниана играет ключевую роль в эксперименте по отбору бозонов, который является одним из главных претендентов для демонстрации так называемого квантового превосходства, т. е. существенного вычислительного преимущества квантовых компьютеров перед классическими [7; 8]. Тем не менее, рассмотренные в данной статье формулы, связывающие гафниан матрицы с перманентами его подматриц, можно рассматривать и безотносительно к задаче на скорость вычисления. Данные зависимости можно понимать как самостоятельные свойства и использовать, например, для

оценки гафниана неотрицательных матриц исходя из известных оценок перманентов.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные замечания, способствующие улучшению качества статьи.

Список литературы

1. **Caianiello E. R.** On quantum field theory - I: Explicit solution of Dyson's equation in electrodynamics without use of Feynman graphs // *IL Nuovo Cimento. 1953. V. 10(12). Pp. 1634–1652.*

2. **Caianiello E. R.** Theory of coupled quantized fields // *Supplemento Nuovo Cimento. 1959. V. 14(1). Pp. 177–191.*

3. **Caianiello E. R.** Regularization and Renormalization // *IL Nuovo Cimento. 1959. V. 13(3). Pp. 177–191.*

4. **Минк Х.** Перманенты. М.: Мир. 1982. 216 с.

5. **Valiant L. G.** The complexity of computing the permanent // *Theoretical Computer Science. 1979. V. 8(2). Pp. 187–201.*

6. **Björklund A., Gupt B., Quesada N.** A faster hafnian formula for complex matrices and its benchmarking on a supercomputer // *ACM Journal of Experimental Algorithmics. 2019. V. 24(1). 17 p.*

7. **Aaronson S., Arkhipov A.** The computational complexity of linear optics // *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2011. Pp. 333–342.*

8. **Kruse R., Hamilton C. S., Sansoni L., Barkhofen S., Silberhorn C., Jex I.** Detailed study of Gaussian boson sampling // *Physical Review A. 2019. V. 100(3). 032326.*

Summary

Efimov D. B. A method for computing the hafnian

The hafnian was initially introduced by E.R. Caianiello, by analogy with the Pfaffian, as a convenient mathematical apparatus for working with certain quantum-mechanical quantities. From a combinatorial point of view, the hafnian of a symmetric matrix is equal to the sum of weights of perfect matchings of a graph with the given incidence matrix. In contrast to the Pfaffian, the hafnian has a smaller set of «good» properties, and determining its value is an example of a complex computational problem. We consider a new method for calculating hafnian of a matrix in terms of permanents of its submatrices. We also give a comparison with other methods in terms of computational complexity. The property underlying the method could also be used outside the context of the computation speed, for example, to estimate the hafnian of a nonnegative matrix based on known estimates of the permanent.
Keywords: hafnian, permanent, computational complexity.

References

1. **Caianiello E. R.** On quantum field theory - I: Explicit solution of Dyson's equation in electrodynamics without use of Feynman graphs, *IL Nuovo Cimento*, 1953, V. 10(12), pp. 1634–1652.

2. **Caianiello E. R.** Theory of coupled quantized fields, *Supplemento Nuovo Cimento*, 1959, V. 14(1), pp. 177–191.

3. **Caianiello E. R.** Regularization and Renormalization, *IL Nuovo Cimento*, 1959, V. 13(3), pp. 177–191.

4. **Mink H.** *Permanenty* (Permanents), M.: Mir, 1982, 216 p.

5. **Valiant L. G.** The complexity of computing the permanent, *Theoretical Computer Science*, 1979, V. 8(2), pp. 187–201.

6. **Björklund A., Gupt B., Quesada N.** A faster hafnian formula for complex matrices and its benchmarking on a supercomputer, *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 2019, V. 24(1), 17 p.

7. **Aaronson S., Arkhipov A.** The computational complexity of linear optics, *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 2011, pp. 333-342.

8. **Kruse R., Hamilton C. S., Sansoni L., Barkhofen S., Silberhorn C., Jex I.** Detailed study of Gaussian boson sampling, *Physical Review A*, 2019, V. 100(3), 032326.

Для цитирования: Ефимов Д. Б. Об одном методе вычисления гафниана // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 16–25. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_16.*

For citation: Efimov D. B. A method for computing the hafnian, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 4 (37), pp. 16–25. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_16.

ФМИ КомиНЦ УрО РАН *Поступила 18.11.2020*

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (37). 2020

УДК 378.147 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_26**

КОНТЕКСТНЫЙ ПОДХОД В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ БУДУЩИМ ИНЖЕНЕРАМ

М. Н. Габова, А. В. Мужикова

Существует проблема снижения математической образованности выпускников школ и, как следствие, отсутствие у первокурсников мотивации и познавательной активности при изучении математики в вузе. Математика, лишенная профессиональной направленности, не представляет интереса для большинства студентов технического вуза. Эффективность процесса обучения может быть достигнута за счет использования контекстного подхода. Контекстное обучение – это обучение, в котором на языке наук и с помощью всей системы форм, методов и средств обучения моделируется предметное и социальное содержание усваиваемой студентами профессиональной деятельности. Рассматривая контекстное обучение как целостную систему, удовлетворяющую соответствующим ему принципам, в работе представлено разработанное методическое и организационное обеспечение учебной деятельности.

Основной идеей при разработке содержания является постепенный переход от абстрактных математических понятий к их прикладному значению в смежных науках, а далее к их применению в профессиональных областях. Принципы контекстного обучения наилучшим образом реализуются при использовании активных и интерактивных форм обучения и соответствующих им методов. Наибольшую эффективность с точки зрения достижения целей обучения, развития и воспитания показали такие методы, как проблемная лекция, взаимопередача тем в парах сменного состава, поабзацное изучение теоретического материала в малых группах, взаимообмен заданиями на практических занятиях и др.

Применение контекстного подхода позволяет развивать у обучающегося социальное взаимодействие, мотивацию и познавательную активность, математическую грамотность, способность

© Габова М. Н., Мужикова А. В., 2020.

применять математический аппарат в своей учебной и профессиональной деятельности и вносить свой вклад в формирование современного инженера, способного к творческой деятельности и самореализации.
Ключевые слова: математика для инженеров, контекстный подход, активные и интерактивные методы обучения.

Введение. Постановка проблемы

Обучение студентов математике в Ухтинском государственном техническом университете осуществляется на 1-м и 2-м курсах. Дисциплина «Высшая математика» реализуется на направлениях подготовки: «Экология и природопользование», «Архитектура», «Строительство», «Информатика и вычислительная техника», «Информационные системы и технологии», «Электроэнергетика и электротехника», «Технологические машины и оборудование», «Техносферная безопасность», «Нефтегазовое дело», «Землеустройство и кадастры», «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», «Стандартизация и метрология», «Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств», «Экономика», «Менеджмент», а также специальностях: «Прикладная геология», «Технология геологической разведки», «Нефтегазовые техника и технологии». Под будущими инженерами в данной работе будем иметь в виду обучающихся на направлениях бакалавриата и специальностях области образования «Инженерное дело, технологии и технические науки».

Недавние выпускники школ, выбрав соответствующее направление в обучении в техническом вузе, задаются вопросами о взаимосвязи высшей математики с их будущей инженерной профессией и необходимости ее изучения. В то же время большинство студентов испытывают трудности в освоении математики. Причиной этого является критическое снижение уровня математической образованности школьников. Это подтверждается научными исследованиями. В своей статье «Эволюция качества математического образования» канд. физ.-мат. наук И. П. Костенко представил детальные результаты исследования качества знаний за 80 лет начиная с 1931 года, основанные на результатах сдачи различных официальных экзаменов школьников и абитуриентов, характеризующие падение качества математического образования школьников практически до нуля [1]. Результаты такой тенденции мы наблюдаем и в нашем университете. Преподаватели констатируют, что у первокурсников недостаточно развит вычислительный навык, навык арифметических действий с обыкновенными и десятичными дробями, наблюдается незнание тригонометрии, функций, их свойств и графиков. Ма-

тематическая речь первокурсников развита слабо: часть студентов не способна объяснить выполненное самостоятельно учебное задание, обосновать выбранный способ решения, прочитать математическую запись, записать математическим языком словесно сформулированное утверждение, сформулировать математическое утверждение. Проблеме математической образованности студентов нашего университета посвящено несколько работ авторов [2; 3].

Преподаватели других российских и зарубежных вузов также наблюдают низкий уровень математической подготовки обучающихся. Так, С. А. Розанова [4], Е. П. Богомолова [5], В. С. Сенашенко, Н. А. Вострикова [6], Р. М. Зайниев [7], И. П. Егорова [8], E. Lobos, J. Macura [20], A. Zeidmane, T. Rubina [21], T. Steyn, I. D. Plessis [22] и др. отмечают разрыв между слабым знанием школьного курса и высокими требованиями по математике в техническом вузе, необходимость понижения планки для студентов вуза в связи с их недостаточными школьными знаниями, необходимость проведения дополнительных учебных занятий, восполняющих пробелы школьных знаний, отрыв математики от получаемой студентами специальности.

Студенты нашего университета хотели бы видеть в математике не только абстрактную науку, которая вызывает трудности при изучении, но и один из возможных инструментов решения профессиональных задач. В свою очередь, профессиональная направленность в преподавании математики является одним из требований большинства образовательных программ. В соответствии с учебными планами технических направлений бакалавриата и специальностей основными компетенциями, закрепленными за дисциплиной «Высшая математика», являются общепрофессиональная компетенция ОПК-1 «Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественно-научные и общеинженерные знания» и универсальная компетенция УК-1 «Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач» (по ФГОС 3++), а также общекультурная компетенция ОК-7 «Способность к самоорганизации и самообразованию» (по ФГОС 3+). Обеспечение требований образовательных программ, удовлетворение интересов студентов, а также повышение их мотивации к изучению математики и познавательной активности возможно, на наш взгляд, через последовательное включение в содержание учебного материала профессионального контекста и использование активных и интерактивных методов обучения. Взаимосвязь профессионально направленного содержания и личностно ори-

ентированных методов обучения, при ведущей роли межличностного взаимодействия обучающихся, является основой методической системы контекстного подхода в обучении.

Контекстный подход имеет много преимуществ, но мнения преподавателей о целесообразности его применения разнятся. Часть преподавателей считает, что при обучении высшей математике на начальных курсах нет необходимости дифференцировать разделы и их содержание для разных направлений, а также включать в рассмотрение вопросы применения математики в профессиональной области. Данная позиция обусловлена постоянным снижением аудиторной нагрузки и отсутствием закрепления преподавателей за определенными направлениями, не позволяющим преподавателю углубить свои знания по использованию математического аппарата в специальных дисциплинах. Тем самым преподавание математики во взаимосвязи с будущей профессией представляется практически невозможным. Но, несмотря на указанные трудности, в соответствии с государственными образовательными стандартами инженер должен быть подготовлен к применению математики в решении широкого круга задач, возникающих в профессиональной деятельности. Наше мнение состоит в том, что эффективность обучения будущих инженеров математике достигается за счет серьезного внимания не только алгоритмическим методам решения математических задач, но и более глубокому пониманию теоретических понятий и методов и их связи с профессиональным направлением.

Исследование вопроса

Концепция контекстного обучения разработана в 1991 году доктором педагогических наук, профессором А. А. Вербицким. Контекстное обучение — это обучение, в котором на языке наук и с помощью всей системы форм, методов и средств обучения — традиционных и новых — моделируется предметное и социальное содержание усваиваемой студентами профессиональной деятельности. Основополагающей категорией контекстного обучения является контекст. Контекст — это система внутренних и внешних факторов и условий поведения и деятельности человека в конкретной ситуации, определяющая смысл и значение этой ситуации как целого и входящих в него компонентов. В образовательном процессе важен контекст профессионального будущего, который наполняет познавательную деятельность студентов личностным смыслом, что способствует повышению уровня мотивации и активности студента [9].

А. А. Вербицкий выделяет основные принципы контекстного обучения:

1) психолого-педагогическое обеспечение личностного включения студента в учебную деятельность;

2) последовательное моделирование в учебной деятельности студентов целостного содержания, форм и условий профессиональной деятельности специалистов;

3) проблемность содержания обучения и его развертывания в образовательном процессе;

4) адекватность форм организации учебной деятельности студентов целям и содержанию образования;

5) ведущая роль совместной деятельности, межличностного взаимодействия и диалогического общения субъектов образовательного процесса (преподавателя и студентов, студентов между собой);

6) педагогически обоснованное сочетание новых и традиционных педагогических технологий;

7) открытость — использование для достижения конкретных целей обучения и воспитания любых педагогических технологий, предложенных в рамках других теорий и подходов;

8) единство обучения и воспитания личности профессионала.

Кроме А. А. Вербицкого, очень многие педагоги-исследователи рассматривали различные аспекты контекстного обучения: общие вопросы, средства, формы, способы и методы контекстного обучения. Контекстный подход нашел свое применение и в преподавании высшей математики. Общие направления его реализации описаны в работах Н. В. Воропаевой, В. А. Далингера, Г. А. Костиной, О. Г. Ларионовой, И. Г. Мергикян, Н. А. Рыбалко, И. Ю. Мацкевич и др. Опыт применения контекстного обучения высшей математике в инженерно-техническом образовании описывается в достаточно небольшом количестве работ [10; 11; 12; 23; 24]. Их анализ показал, что основным средством реализации контекстного подхода является включение в содержание курса высшей математики профессионально ориентированных задач. Так, Е. В. Колбина в своих работах сформулировала ряд требований к составлению профессионально ориентированных задач, а также разработала технологию проведения лекционных и практических занятий в рамках компетентностно-контекстного подхода на примере направления «Строительство» [10]. А. С. Гребенкина также считает, что обучение высшей математике студентов технических специальностей должно быть профессионально направленным и предлагает обязательное включение в курс прикладных задач, приводит примеры задач для направлений подготовки, связанных с экологией, химическими технологиями, электротехникой [11]. Е. Г. Пахомова рассматривает

контекстные задачи как средство формирования компетенций, выделяет характеристические особенности контекстных задач, при этом основной формой организации учебного процесса, используемой для обучения студентов составлению и решению контекстных задач, является самостоятельная работа студентов вне учебных занятий [12]. Вопросу включения в содержание обучения высшей математике профессионально ориентированных задач посвящено множество работ, в том числе ряд диссертационных исследований: Р. П. Исаевой, С. И. Федоровой, И. Г. Михайловой, В. А. Шершневой, М. В. Хохловой, Л. В. Васяк, Н. В. Скоробогатовой, Т. И. Федотовой, Е. А. Зубовой (1994–2009).

Типичная постановка профессионально ориентированной задачи такова: дан некоторый объект (например, техническая система) с заданными параметрами, требуется найти значения параметров системы так, чтобы она удовлетворяла определенным условиям, например оптимальности по некоторым своим характеристикам. Приведем пример задачи из учебного пособия для студентов первого курса направления «Нефтегазовое дело» по разделу «Дифференциальные уравнения».

Задача. *Для очистки газа для некоторой газообразной смеси его пропускают через скруббер (сосуд, содержащий тот или иной поглотитель). Количество газообразной примеси, поглощаемое тонким слоем поглотителя при установившемся режиме аппарата, пропорционально концентрации примеси, а также толщине и площади поперечного сечения слоя. Скруббер имеет форму конуса с радиусом основания R и высотой H. Газ поступает через вершину конуса. Определить концентрацию газообразной примеси в скруббере на расстоянии H_0 от вершины конуса, если концентрация примеси в поступающем газе равна a %, а в выходящем b %.*

Безусловно, включение такой задачи в содержание учебного материала вызывает у студентов познавательный интерес и мотивацию к изучению математики как науки, применяемой в профессиональных дисциплинах и их будущей профессиональной деятельности. При решении профессионально ориентированных задач возможны следующие трудности. Во-первых, студенты начальных курсов не владеют знаниями в соответствующей профессиональной области, необходимыми для понимания объекта задачи и его свойств. Во-вторых, возникают сложности в определении математического аппарата, используемого при решении поставленной проблемы в задаче, какие именно математические знания и методы понадобятся студенту для ее решения. Преодоление этих трудностей возможно за счет организации и осуществления последовательной подготовки студентов к решению профессиональных задач.

Она заключается в постепенном переходе от абстрактных математических понятий к их прикладному значению в смежных науках (физике, технических науках), а далее к их применению в профессиональных областях. Речь идет о последовательном моделировании содержания учебного материала, которое является основным принципом контекстного обучения.

С точки зрения дидактики любой процесс обучения представляет собой целостную систему Цель – Принципы – Содержание – Методы – Средства – Формы (П. И. Пидкасистый). Системообразующими понятиями процесса обучения как системы выступает цель обучения, деятельность учителя (преподавание), деятельность учащихся (учение, познавательная деятельность ученика) и результат. Переменными составляющими этого процесса будут средства управления. Они включают содержание учебного материала, методы обучения, средства обучения, организационные формы обучения как процесса и учебной деятельности учащихся [13].

Основоположником контекстного обучения А. А. Вербицким и его последователями были определены основные составляющие методической системы контекстного обучения [9; 14]:

1) смысл и цели (учебно-результативные, компетентностные, профессионально-компетентностные);

2) содержание (содержательное сочетание общенаучных математических знаний и методов, а также знаний, необходимых для осуществления дальнейшего обучения и профессиональной деятельности);

3) образовательная среда (создание условий для познавательной, творческой, профессионально ориентированной деятельности студентов средствами контекстной образовательной среды, сформированной преподавателями);

4) методы обучения (объяснительно-иллюстративные, репродуктивные, эвристические, исследовательские и т. п.);

5) технологии обучения (моделирование предметного и социального содержания будущей профессиональной деятельности студентов, семиотическая, имитационная и социальная обучающие модели, создание и использование в аудиторной и самостоятельной работе учебных пособий, имеющих профессиональный контекст, выполнение заданий с использованием компьютерной техники, сети «Интернет» и т. п.);

6) средства и способы обучения (учебные пособия контекстного содержания, справочная литература, компьютерная техника, мультимедийные средства и т. п.);

7) формы обучения (аудиторные занятия по высшей математике раз-

личных типов, спецкурсы, организация самостоятельной работы студентов);

8) формы, методы, средства оценивания знаний, умений и навыков, сформированности компетенций студентов (тестирование, выполнение самостоятельных или контрольных работ; самостоятельное решение и составление предметно-профессиональных задач, выполнение задач профессионального и профессионально-исследовательского уровней).

Результаты исследования и авторские разработки

Рассматривая контекстное обучение как систему, удовлетворяющую соответствующим ему принципам, определим основной фактор — цель обучения. Выделим три основных аспекта цели обучения математике будущих инженеров:

1) обучающая цель (овладение знаниями, выработка умений и навыков по математике, формирование необходимого уровня математической подготовки для решения прикладных и профессиональных задач);

2) развивающая цель (развитие логического и критического мышления, грамотной математической речи, способности к постановке цели и выбору путей ее достижения);

3) воспитательная цель (создание благоприятных условий для самореализации личности, развития познавательной активности, самостоятельности, ответственности, духовно-нравственной, образованной и культурной личности, способной к осуществлению своей профессиональной деятельности).

Именно применение в обучении математике контекстного подхода позволяет достигать поставленных целей и вносить свой вклад в формирование современного инженера, способного к творческой деятельности и самореализации. Разработка методического и организационного обеспечения учебной деятельности в рамках контекстного подхода ведется нами в нескольких направлениях: разработка содержания обучения, подбор форм и методов обучения и их адаптация в учебном процессе.

При разработке содержания обучения математике мы руководствуемся принципом постепенного перехода от абстрактных математических понятий к их прикладному значению в смежных науках (физике, технических науках), а далее к их применению в профессиональных областях. Такое моделирование содержания обеспечивает усиление междисциплинарных связей при сохранении теоретической и практической ценности каждой из учебных дисциплин.

Теоретико-методологической основой наших идей являются труды выдающихся ученых и педагогов. Среди них «Математика для инжене-

ров» (Г. М. Фихтенгольц, 1933), «Математика для электро- и радиоинженеров» (профессор А. Анго, 1949), «Математика для ВТУЗов: специальные курсы» (А. Д. Мышкис, 1971), «Элементы прикладной математики» (Я. Б. Зельдович и А. Д. Мышкис, 1972), «Лекции по высшей математике» (А. Д. Мышкис, 1973), «Высшая математика для начинающих физиков и техников» (Я. Б. Зельдович и И. М. Яглом, 1982) и др. Содержание этих учебников является глубоко продуманным с точки зрения экспериментальной ментальности инженера. Без формальной строгости классической математики и громоздких доказательств в них рассмотрены понятия, методы и способы расчетов, необходимые инженеру. Стоить отметить, что были и есть те ученые, которые считают, что преподавание математики будущим инженерам не должно принципиально отличаться от преподавания будущим математикам. Поддерживая сторонников инженерной математики, мы считаем, что студенту необходимо понимать теоретические понятия и методы математики и их связь с практическим применением в профессиональных дисциплинах и будущей профессиональной деятельности, но не углубляться в логические тонкости изложения теории.

К настоящему времени преподавателями кафедры высшей математики разработано несколько учебных изданий, имеющих профессиональный контекст. Среди них методические указания С. Е. Зубковой, А. В. Мужиковой, Е. Н. Мотрюк «Производная функций одной и нескольких переменных и ее приложения» (представлены краткие теоретические сведения и примеры решения конкретных задач из различных разделов физики и теоретической механики), учебное пособие О. М. Прудниковой, Е. В. Хабаевой, И. И. Волковой, Е. В. Пластининой «Вероятностные методы исследования зависимостей в нефтяной и газовой промышленности» для бакалавров направления «Нефтегазовое дело» (описаны теория и методы теории вероятностей и математической статистики, представлены задачи нефтегазового содержания), учебное пособие Е. В. Хабаевой, М. Г. Рочевой, М. С. Хозяиновой «Тренировочные задачи и упражнения по математике для студентов технических вузов. Начала математического анализа» (приведены задачи прикладного содержания). В данных изданиях математические понятия и методы проиллюстрированы задачами прикладного и профессионального содержания. Они являются вспомогательным средством в виде банка задач при разработке содержания контекстного обучения.

В курсе математики мы выделяем основные элементы содержания, контекстное изложение которых облегчит дальнейшее применение математики в других дисциплинах и, возможно, в будущей профессио-

нальной деятельности. Это такие понятия, как вектор, функция, производная, определенный интеграл, дифференциальное уравнение, частная производная, аппроксимация функций, криволинейный интеграл, кратный интеграл, поверхностный интеграл, ряд и др. Излагая эти понятия, мы делаем акцент на их смысле, стараясь показать их практическое использование, так как будущая профессиональная деятельность инженера имеет больше прикладной характер: наблюдение, измерение, эксперимент, сравнение, проектирование, разработка и т. п. При этом большинство математических суждений приводится без доказательств. В ситуации постоянного снижения аудиторной нагрузки данное допущение является неизбежным.

При выборе форм и методов обучения, адекватных целям и содержанию контекстного обучения, предпочтение отдается нами активным и интерактивным формам обучения и соответствующим им методам. В отличие от активных форм интерактивные формы обучения ориентированы на более широкое взаимодействие обучающихся не только с преподавателем, как в активных, но и друг с другом и на доминирование активности обучающихся в процессе обучения [15]. Именно применение активных и интерактивных форм обучения позволяет реализовывать принципы контекстного обучения, поскольку использование этих форм направлено на решение многих задач обучения, в том числе:

1) пробуждение интереса к обучению и готовности к самостоятельной познавательной деятельности;

2) самостоятельный поиск обучающимися путей и вариантов решения поставленной учебной задачи;

3) непосредственное применение знаний при обучении и эффективное усвоение учебного материала;

4) установление взаимодействия между обучающимися и реализацию своей роли в команде;

5) развитие грамотной речи и коммуникативных навыков;

6) развитие навыков самоорганизации при подготовке к учебным занятиям;

7) формирование других жизненных и профессиональных навыков.

Основными видами аудиторных учебных занятий по математике в университете являются лекции и практические занятия. В настоящее время существует множество методов проведения учебных занятий, которые динамически развиваются и адаптируются преподавателями к конкретным индивидуальным условиям учебного процесса.

Среди методов проведения лекции как способа изучения нового материала мы выделяем такие активные лекции, как:

1) объяснительно-иллюстративная лекция (использование наглядности и практических примеров в процессе формирования понятий и изучения математических методов);

2) проблемная лекция (открытие новой информации в форме диалога с обучающимися, развитие исследовательских способностей).

Опираясь на принципы контекстного обучения, нами разработаны конспекты лекций и практических занятий по некоторым темам. Например, для введения понятия «производная функции» может быть использован конкретно-индуктивный метод. На этапе подведения под понятие рассматриваются различные задачи, приводящие к определению производной: нахождение мгновенной скорости неравномерного прямолинейного движения материальной точки; нахождение мгновенной скорости наполнения сосуда; нахождение линейной плотности материальной линии как скорости изменения массы нити, отнесенной к единице пройденного пути; определение теплоемкости тела, отвечающей фиксированной температуре тела. Найденные соотношения в каждой из задач имеют одинаковую математическую структуру при варьировании вида физической величины, что дает основание для рассмотрения функции и введения понятия производной функции. Такое введение понятия производной позволяет студентам впоследствии устанавливать связь между изменением некоторого процесса (физического, химического, экономического и т. д.) и производной функции при построении математических моделей реальных объектов.

Ниже представлен содержательный фрагмент лекции с элементами проблемного изложения «Понятие о дифференциальном уравнении». В ходе изложения преподаватель ведет исследовательский диалог со студентами посредством наводящих вопросов.

Понятие о дифференциальном уравнении

Из школьного курса физики вам известны многие законы. Например, закон Ньютона, в котором сила пропорциональна ускорению, или закон Гука, в котором сила пропорциональна смещению, и т. д. Математической основой этих законов является прямая пропорциональность величин, которая была выявлена в ходе эксперимента. И скорее всего, такие простые законы уже исчерпаны. В настоящее время наука занимается более детальными исследованиями.

Существуют уравнения, которые позволяют установить ту теоретическую взаимосвязь, которую потом можно проверить в ходе эксперимента. Откуда они могут взяться?

Рассмотрим ситуацию, в которой требуется найти зависимость между двумя величинами и в явном виде $y = \Phi(x)$, например, между темпе-

ратурой тела и температурой внешней среды, фактической стоимостью производственного оборудования и временем его использования, работой по опорожнению емкости с нефтью и параметрами этой емкости и т. д.

Нахождение этой зависимости сразу является сложной задачей. Однако если рассматривать эту зависимость не между самими этими величинами, а между их достаточно малыми приращениями Δy и Δx, то она будет иметь вид не $y = \Phi(x)$, а $\Delta y \approx \varphi(x; y) \cdot \Delta x$. Преимущество и причины такого перехода состоят в том, что на малом промежутке любая функция близка к прямолинейной зависимости, которая является более простой функцией, нежели исходная.

Что означает малость приращений Δy и Δx? Это означает, что Δy и Δx стремятся к нулю и при этом $\Delta y \approx dy$, $\Delta x = dx$. Это позволяет нам получить соотношение между дифференциалами $\frac{dy}{dx} \approx \varphi(x; y)$ или $y' \approx \varphi(x; y)$.

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются дифференциальными.

Перейдем к определению понятия дифференциального уравнения. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение вида

$$F(x;\ y;\ y') = 0.$$

Основная сложность состоит в том, что произвольное уравнение не решается. Не создано общих методов, подходящих для любого дифференциального уравнения. На занятиях по высшей математике мы будем изучать методы решений дифференциальных уравнений для конкретных типов уравнений. Дифференциальные уравнения появились в конце XVII века, и их появление связывается с именами Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница, создателями дифференциального и интегрального исчислений.

После ознакомления с основными понятиями теории дифференциальных уравнений (общего и частного решения, интегральной кривой и т. д.) целесообразно представить пример математического моделирования несложного, но реального технического процесса, возникающего на производстве, например очистку газа в скруббере (задача представлена выше). На этапе построения модели необходимо выполнить чертеж, поясняющий суть задачи, а затем выявить основные особенности явлений, характеризующих рассматриваемый процесс, и связи между ними. Затем сформулировать найденные зависимости математическим языком

и получить математическую модель в виде дифференциального уравнения. Решив составленное уравнение, можно исследовать изменение полученного закона при различных параметрах модели. В качестве задания для самостоятельной работы, направленного на расширение кругозора и включение студентов в активную познавательную деятельность, можно предложить студентам выполнить учебно-исследовательские работы: подготовить исторические экскурсы, выполнить и представить расчеты математической модели в пакетах прикладных программ и др.

Отметим, что изучение нового материала может быть организовано не только в активной, но и в интерактивной форме. Речь идет о некоторых методиках коллективных учебных занятий: взаимопередачи тем в парах сменного состава и поабзацного изучения теоретического материала в малых группах. Коллективные учебные занятия являются основной организационной формой коллективного способа обучения, основоположником которого является выдающийся дидакт XX века В. К. Дьяченко. В 1984 году коллективные учебные занятия впервые стали внедряться в Красноярском государственном университете на физическом факультете, а затем, пройдя успешную апробацию, и в малокомплектных сельских школах. Методики коллективных учебных занятий были усовершенствованы М. А. Мкртчаном [16]. Нами осуществляется адаптация методик к использованию их при обучении математике в нашем университете.

Методика взаимопередачи тем состоит в том, что обучающиеся, изучившие одну тему, обучают ей других в парах сменного состава. Несколько тем в рамках одного раздела распределяются между обучающимися. Например, выбрав раздел «Приложение определенного интеграла», можно разбить его на шесть тем: площадь фигуры; длина дуги; объем тела вращения; работа переменной силы; путь, пройденный телом с переменной скоростью; центр тяжести и статические моменты. При этом обучающиеся делятся на группы по шесть человек. Взаимодействие в группе осуществляется следующим образом: одну тему обучающийся изучает индивидуально и самостоятельно, затем, после сдачи ее преподавателю, допускается к обучению другого члена группы в паре (передаче темы). Аналогичным образом его напарник передает ему свою тему. Передав одну тему, а затем, приняв другую от напарника, обучающийся передает принятую тему в новой паре с другим обучающимся. Учебную деятельность каждого студента можно охарактеризовать следующей повторяющейся последовательностью: учусь, учу, учусь, учу, учусь и т. д. К составлению конспектов по изучаемой теме предъявляются следующие требования: наличие в структуре конспекта

основных теоретических сведений, разобранных примеров решения задач, контрольных вопросов на понимание учебного материала, а также краткость, четкость и ясность изложения.

Методика поабзацного изучения теоретического материала в малых группах реализуется нами следующим образом. Преподаватель представляет обучающимся текст лекции, который состоит из пронумерованных фрагментов. Техника взаимодействия в малой группе должна быть такой, чтобы каждый обучающийся был вовлечен в совместную работу, причем в меняющихся ролях. Например, при изучении теоретического материала порядок работы должен быть таким: один обучающийся читает первый фрагмент текста вслух (остальные — про себя); затем сидящий от него слева повторяет, что понял, объясняет ключевые термины; третий по кругу — формулирует и задает вопросы на понимание прочитанного фрагмента (или приводит примеры); и т. д.

Что касается методик, которые могут быть использованы для проведения практических занятий, то наибольшую эффективность с точки зрения результативности контекстного обучения показали методики интерактивных коллективных учебных занятий, которые применяются наряду с традиционными практическими занятиями.

Среди них:

1) взаимообмен заданиями (обучающийся, научившийся выполнять задания определенного типа, учит другого их решению);

2) взаимопроверка индивидуальных заданий (самостоятельно выполнив задания, обучающиеся обнаруживают, исправляют ошибки других);

3) взаимодиктант — проверка и отработка знаний основных определений, теорем и формул (обучающийся диктует напарнику задания, сверяя ответы по своей карточке);

Методика взаимообмена заданиями состоит в том, что, работая в паре, обучающийся, научившийся решать задания определенного типа, учит их решать своего напарника. Отработав в паре, обучающиеся меняют напарников. Обязательным условием является выбор новых напарников не из одной пары, а из разных пар. Иначе это может привести к тому, что у какой-то пары не найдется смены. Для реализации данной методики преподаватель готовит специальный дидактический материал — карточки, содержащие по два или три однотипных задания (третье задание является резервным и выполняется, если смена напарника пока невозможна). Для учета прохождения карточек и выбора следующего напарника целесообразно вести таблицу учета, в которой можно отмечать отданные и принятые карточки с указанием напарников. Ко-

личество карточек выбирается в зависимости от времени выполнения заданий и количества студентов в учебной группе. Предполагается также деление группы на подгруппы из 4–6–8 человек. Ниже представлены две карточки для работы в паре по теме «Нормальный закон распределения».

Карточка № 1	Карточка № 2
А. Суточный дебит скважины на газовом промысле можно считать случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 1 \cdot 10^6$ м^3 / сут и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2 \cdot 10^6$ м^3 / сут. Найдите вероятность того, что суточный дебит будет заключен в пределах $(0{,}8 \div 1{,}2) \cdot 10^6$ м^3 / сут.	**А.** Случайная величина X – пластовое давление, замеряемое при насосном способе эксплуатации скважины (кгс/см^2), распределена нормально с математическим ожиданием равным 161 и дисперсией 791. Найдите интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.
Б. Плотность различных образцов керна можно считать случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 5{,}40$ г/см^3 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$ г/см^3. Найдите вероятность того, что в результате исследований физико-химических свойств образцов керна значения плотности будут заключены в интервале $(5{,}38; 5{,}41)$ г/см^3.	**Б.** Случайная величина X – величина проходки долота за рейс (м) при бурении мягких пород распределена нормально с математическим ожиданием равным 72 и дисперсией 49,33. Найдите интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены величины проходки долота.
Выполнив расчеты, проанализируйте результат. Опишите ход выполнения задания, сделайте выводы о возникших сложностях при решении задачи.	Сформулируйте правило, необходимое для решения задачи. Выполнив расчеты, проанализируйте результат. Опишите ход выполнения задания, сделайте выводы о возникших сложностях при решении задачи.

Нами практикуется следующий порядок работы в паре:

1. Прочитай напарнику задание из своей карточки.

2. Выполни в тетради напарника задание «А» из своей карточки, объясняя его решение.

3. Проследи, как твой напарник выполняет задание «Б» из твоей карточки, задавая уточняющие вопросы на выявление понимания напарником метода решения задачи.

4. Поменяйся ролями с напарником: пусть теперь он объяснит тебе задание «А» своей карточки, работая по пунктам 1–3.

5. Поблагодари напарника за работу. Возьми себе его карточку. Смени партнера.

Учебный процесс становится увлекательным и познавательно активным. Самое затруднительное в применении данной методики и методики взаимопередачи тем состоит в том, что в начале их применения необходимо осуществлять так называемый «запуск». Работая по методике взаимообмена заданиями, преподаватель выдает студентам карточки,

которые необходимо решить самостоятельно, показать и объяснить решение преподавателю. Индивидуальная работа с каждым студентом происходит вне учебных занятий. Возможность индивидуального обучения и консультаций предусмотрена рабочей программой дисциплины. Стоить отметить, что студенты быстро осваивают технику работы в паре и дальше с удовольствием вовлекаются в подобную работу.

Различные методики интерактивных учебных занятий применяются нами на протяжении нескольких лет и доказали свою эффективность при решении многих задач обучения, развития и воспитания. Они позволяют развивать грамотную математическую речь студентов, способствуют развитию общекультурных, универсальных и общепрофессиональных компетенций. Разработке организационного и методического обеспечения, а также практической реализации интерактивных учебных занятий посвящен ряд наших работ [3; 17; 18; 19].

В процессе преподавания математики особое внимание мы уделяем развитию грамотной математической речи, поскольку без навыков владения математическим языком и речью невозможно развивать математическое мышление и, как следствие, невозможно применять математический аппарат в своей учебной и профессиональной деятельности. Указанные умения и навыки характеризуют математическую грамотность обучающегося, которая является ключевой компонентой контекстного обучения.

Одной из форм работы со студентами, неразрывно связанной с учебной деятельностью, является организация научно-исследовательской работы. Как осознанно выбранный обучающимися вид деятельности, научно-исследовательская работа погружает студента в глубокий смысл математических понятий и методов и их связь с профессиональной деятельностью, развивает способность использовать современные информационные технологии и программные средства, коммуникативные способности и навыки самоорганизации, позволяет понять свои потенциальные возможности и самоопределиться с предпочтениями к какому-либо типу профессиональной деятельности. Данная работа ведется нами в двух направлениях. Первое направление — это подготовка студентами рефератов по темам прикладной направленности. Например, «Псевдовекторы и псевдоскаляры», «Криволинейные системы координат», «Физические приложения кратных интегралов» и др. В соответствии с рабочими программами по высшей математике подготовка рефератов является одним из видов учебной деятельности в рамках самостоятельной работы студентов, способствующим достижению высокого (продвинутого) уровня овладения компетенциями. Второе направ-

ление, в которое вовлекаются студенты, заинтересованные в успешном освоении дисциплины, расширении своего кругозора и интересующиеся научной работой, — это подготовка научно-исследовательских работ под руководством преподавателя. Для представления результатов научно-исследовательских работ в университете в рамках ежегодной Международной молодежной научной конференции «Севергеоэкотех» работает секция «Математическое моделирование». Большинство докладов имеют прикладной характер из различных предметных областей, а некоторая часть из них в содержательном плане ориентирована на профессиональные направления, по которым обучаются студенты (экология, экономика, геология, нефтегазовое дело, информационные технологии и др.). Например, в 2019 году были представлены доклады: «Дифференциальные уравнения процессов воздухообмена помещений», «О некоторых особенностях использования математических методов в геологии», «Линейный закон фильтрации», «Вероятность утечки и перехвата информации» и др. Ведение научно-исследовательской работы со студентами по математике является частью эффективной реализации контекстного подхода в обучении.

В завершение отметим, что контекстный подход в преподавании высшей математики полностью соответствует компетентностному подходу, являющемуся концептуальным основанием стандартов высшего образования. В соответствии с ФГОС 3++ среди общепрофессиональных компетенций, связанных с применением фундаментальных знаний, по ряду направлений выделяются такие, как «Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественно-научные и общеинженерные знания», «Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата», «Способен применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач» и т. п. Именно контекстный подход, основными элементами которого являются прикладное и профессиональное содержание образования, современные формы и методы организации учебного процесса, является эффективным средством формирования компетенций будущего инженера.

Успешность применения контекстного подхода в значительной мере зависит от преподавателя, его личностных и профессиональных качеств. Преподаватель должен обладать грамотной математической ре-

чью, быть эмоциональным, способным заинтересовать студентов содержанием, целями и задачами обучения, концентрировать и удерживать внимание студентов на занятиях, владеть различными методиками и приемами обучения, быть способным повышать свою квалификацию в вопросах применения математики в различных профессиональных областях.

Заключение

Математика для будущих инженеров не должна преподаваться как абстрактная наука, лишенная прикладной и профессиональной направленности. Эффективность обучения будущих инженеров математике может быть достигнута за счет более глубокого понимания теоретических понятий и методов и их связи с профессиональным направлением. Именно профессиональный контекст содержания образования и применение контекстного подхода как целостной системы обучения позволяет развивать у студентов социальное взаимодействие, мотивацию и познавательную активность, математическую грамотность, способность применять математический аппарат в своей учебной и профессиональной деятельности.

Список литературы

1. **Костенко И. П.** Эволюция качества математического образования (1931–2009 гг.) // *Известия ВГПУ. 2013. № 2 (261). С. 81–87.*

2. **Мужикова А. В.** Математическая образованность студентов: проблемы и перспективы // *Коммуникации. Общество. Духовность-2019 : материалы XIX Международной научно-практической конференции (25–26 апреля 2019 г.) : в 4 ч. / под общ. ред. М. С. Хозяиновой. Ухта: УГТУ, 2019. Ч. 3. С. 141–144.*

3. **Мужикова А. В., Габова М. Н.** Развитие грамотной математической речи студентов в техническом вузе // *Высшее образование в России. 2020. № 1. С. 66–75.*

4. Розанова С. А. Математическая культура студентов технических университетов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 176 с.

5. **Богомолова Е. П.** Диагноз: математическая малограмотность // *Математика в школе. 2010. № 4. С. 3–9.*

6. **Сенашенко В. С., Вострикова Н. А.** О преемственности среднего и высшего математического образования // *Материалы Международной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». Плоцк (Польша), 2006. С. 103–106.*

7. **Зайниев Р. М.** Преемственность математической подготовки в инженерно-техническом образовании. Казань: Казанский государственный университет, 2009. 366 с.

8. **Егорова И. П.** Проектирование и реализация системы профессионально-направленного обучения математике студентов технических вузов: автореф. дис. ...канд. пед. наук. Тольятти, 2002. 24 с.

9. **Вербицкий А. А.** Активное обучение в высшей школе: контекстный подход : методическое пособие. М.: Высшая школа, 1991. 207 с.

10. **Гребёнкина А. С.** Особенности контекстного обучения высшей математике студентов технических специальностей // *Психология и педагогика XXI века: теория, практика и перспективы : материалы II Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 12 марта 2015 г.) / редкол. : О. Н. Широков [и др.]. Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2015. С. 24–30.*

11. **Колбина Е. В.** Методика формирования математической компетентности студентов технических вузов в проблемно-прикладном контексте обучения : дис. ...канд. пед. наук / Сиб. федер. ун-т. Барнаул, 2016. 221 с.

12. **Янущик О. В., Шерстнёва А. И., Пахомова Е. Г.** Контекстные задачи как средство формирования ключевых компетенций студентов технических специальностей // *Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 376.*

13. Педагогика : учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / под ред. П. И. Пидкасистого. М.: Педагогическое общество России, 1998. 640 с.

14. **Нижников А. И., Растопчина О. М.** Обучение высшей математике: контекстный подход // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2018. № 3. С. 184–193.*

15. **Сорокопуд Ю. В.** Педагогика высшей школы. Ростов н/Д: Феникс, 2011. 541 с.

16. **Мкртчян М. А.** Методики коллективных учебных занятий // *Справочник заместителя директора школы. 2011. № 1. С. 55–64.*

17. **Прудникова О. М., Габова М. Н., Канева Е. А.** К вопросу формирования у студентов критически-рефлексивного стиля мышления // *Сборник научных трудов : материалы научно-технической конференции (20–23 сентября 2011, г. Ухта) : в 3 ч. Ухта: УГТУ, 2011. Ч. 3. С. 226–229.*

18. **Мужикова А. В.** Интерактивное обучение математике в вузе // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 1 (20). С. 74–90.*

19. **Мужикова А. В.** Исследование эффективности коллективных учебных занятий по высшей математике // *Вестник Томского государственного педагогического университета. 2018. № 7 (196). С. 174–181.*

20. **Łobos E., Macura J.** Mathematical competencies of engineering students // *In ICEE-2010, International Conference on Engineering Education. July 18-22, 2010, Gliwice, Poland. Silestian University of Technology.*

21. **Zeidmane A., Rubina T.** Student — Related factor for dropping out in the first year of studies at LLU engineering programmes // *Engineering for Rural Development. 2017. N 16. P. 612–618. doi:10.22616/ERDev2017.16.N122.*

22. **Steyn T., Plessis I. D.** Competence in mathematics-more than mathematical skills? // *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2007. Vol. 38. Issue 7. P. 881–890. doi:10.1080/00207390701579472.*

23. **Ravn O., Bo Henriksen L.** Engineering mathematics in context – learning university mathematics through problem based learning // *International Journal of Engineering Education. 2017. Vol. 33. Issue 3. P. 956–962.*

24. **Firouzian S., Kashefi H., Yusof Y. M., Ismail Z., Rahman R. A.** Mathematical competencies as perceived by

engineering students, lecturers, and practicing engineers // *International Journal of Engineering Education. 2016. Vol. 33. Issue 6. P. 2434–2445.*

Summary

Gabova M. N., Muzhikova A. V. Context approach in the teaching of mathematics future engineers

There is a problem of reducing the mathematical education of school graduates, and as a result, the lack of motivation and cognitive activity of first-year students when studying mathematics in higher school. Mathematics, devoid of professional direction, is not of interest to most students of a technical higher school. The effectiveness of the teaching process can be achieved by using a context approach. Context teaching is teaching in which the subject and social content of students' professional activity is modeled in the language of science and with the help of the entire system of forms, methods and means of teaching. Considering context teaching as an integral system that meets the corresponding principles, the article presents the developed methodological and organizational support for educational activities.

The main idea in developing the content is a gradual transition from abstract mathematical concepts to their applied meaning in related sciences, and then to their application in professional fields. The principles of context teaching are best implemented when using active and interactive forms of teaching and their corresponding methods. The most effective methods in terms of achieving the goals of teaching, development and education were shown by such methods as problem-based lecture format, swapping of topics in pairs and partners rotation, paragraph-by-paragraph study of theoretical material in small groups, task swapping in practical classes, etc.

The use of a context approach allows students to develop social interaction, motivation and cognitive activity, mathematical literacy, the ability to apply mathematics in their educational and professional activities and contribute to the formation of a modern engineer capable of creative activity and self-realization.

Keywords: mathematics for engineer, context approach, active and interactive methods of teaching.

References

1. **Kostenko I. P.** Evolyuciya kachestva matematicheskogo obrazovaniya (1931–2009 gg.) (Evolution of the quality of mathematics education (1931–2009)), *Izvestija VGPU*, 2013, No 2 (261), pp. 81–87.

2. **Muzhikova A. V.** Matematicheskaya obrazovannost' studentov: problemy i perspektivy (Mathematical education of students: problems and prospects), *XIX mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija «Kommunikacii. Obshhestvo. Duhovnost'–2019»*, Ukhta: UGTU,2019, Vol. 3, pp. 141–144.

3. **Muzhikova A. V., Gabova M. N.** Razvitie gramotnoj matematicheskoj rechi studentov v tekhnicheskom vuze (Development of Competent Mathematical Speech of Students in a Technical University), *Vysshee obrazovanie v Rossii*, 2019, Vol. 28, no. 12, pp. 66–75, doi:10.31992/0869-3617-2019-29-1-66-75.

4. **Rozanova S. A.** *Matematicheskaja kul'tura studentov tehnicheskih universitetov* (Mathematical culture of students of technical universities), Moscow: FIZMATLIT Publ., 2003, 176 p.

5. **Bogomolova E. P.** Diagnoz: matematicheskaya malogramotnost' (Diagnosis: mathematical illiteracy), *Matematika v shkole*, 2010, No 4, pp. 3–9.

6. **Senashenko V. S., Vostrikova N. A.** O preemstvennosti srednego i vysshego matematicheskogo obrazovaniya (On the continuity of secondary and higher mathematics education), *Mezhdunarodnaja konferencija «Obrazovanie, nauka i jekonomika v vuzah. Integracija v mezhdunarodnoe obrazovatel'noe prostranstvo»*, Plock (Poland), 2006, pp. 103–106.

7. **Zajniev R. M.** *Preemstvennost' matematicheskoj podgotovki v inzhenerno-tehnicheskom obrazovanii* (Continuity of mathematical training in engineering and technical education), Kazan: Kazan State University Publ., 2009, 366 p.

8. **Egorova I. P.** *Proektirovanie i realizacija sistemy professional'no-napravlennogo obuchenija matematike studentov tehnicheskih vuzov* (Design and implementation of a system of professional-oriented learning mathematics to students of technical universities: Cand. Sci. Thesis), Tolyatti, 2002, 24 p.

9. **Verbickij A. A.** *Aktivnoe obuchenie v vysshej shkole: kontekstnyj podhod* (Active learning in higher education: context approach), Moscow: Vysshaja shkola Publ., 1991, 207 p.

10. **Grebenkina A. S.** Osobennosti kontekstnogo obucheniya vysshej matematike studentov tekhnicheskih special'nostej (Features of context learning of higher mathematics to students of technical specialties), *II mezhdunarodnaja nauchno-prakticheskaja konferencija «Psihologija i pedagogika XXI veka: teorija, praktika i perspektivy»*, Cheboksary: CNS «Interaktiv pljus» Publ., 2015, pp. 24–30.

11. **Kolbina E. V.** *Metodika formirovanija matematicheskoj kompetentnosti studentov tehnicheskih vuzov v problemno-prikladnom kontekste obuchenija. Kand. Diss.* (Methods of forming mathematical competence of students of technical universities in the problem-applied context of learning: Cand. Diss.), Barnaul, 2016, 221 p.

12. **Janushhik O. V., Sherstnjova A. I., Pahomova E. G.** Kontekstnye zadachi kak sredstvo formirovaniya klyuchevyh kompetencij studentov tekhnicheskih special'nostej (Context tasks as a means of forming key competencies of students of technical specialties), *Sovremennye problemy nauki i obrazovanija*, 2013, No. 6, p. 376.

13. **Pidkasistij P. I.** *Pedagogika* (Pedagogics: textbook for students of pedagogical universities and pedagogical colleges), Moscow: Pedagogicheskoe obshhestvo Rossii Publ., 1998, 640 p.

14. **Nizhnikov A. I., Rastopchina O. M.** Obuchenie vysshej matematike: kontekstnyj podhod (Learning higher mathematics: the context approach), *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta*, 2018, No 3, pp. 184–193, doi:10.18384/2310-7219-2018-3-184-193.

15. **Sorokopud Ju. V.** *Pedagogika vysshej shkoly* (Pedagogy of Higher School), Rostov-on-Don: Feniks Publ., 2011, 541 p.

16. **Mkrtchjan M. A.** *Metodiki kollektivnyh uchebnyh zanyatij* (Methods of Collective Training), Spravochnik zamestitelja direktora shkoly, 2011, No 1, pp. 55–64.

17. **Prudnikova O. M., Gabova M. N., Kaneva E. A.** K voprosu formirovaniya u studentov kriticheski-refleksivnogo stilya myshleniya (To the Question of Formation of Students Critical-Reflexive Style of

Thinking), *Nauchno-tehnicheskaja konferencija*, Ukhta: UGTU, 2011, Vol. 3, pp. 226–229.

18. **Muzhikova A. V.** Interaktivnoe obuchenie matematike v VUZe (Interactive Teaching of Mathematics in Higher School), *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Serija 1: Matematika. Mehanika. Informatika*, 2015, Vol. 1 (20), pp. 74–90.

19. **Muzhikova A. V.** Issledovanie effektivnosti kollektivnyh uchebnyh zanyatij po vysshej matematike (Study the Interactive Teaching Effectiveness in Higher Mathematics), *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta*, 2018, No 7 (197), pp. 174–181.

20. **Łobos E., Macura J.** Mathematical competencies of engineering students, *In ICEE-2010, International Conference on Engineering Education*, July 18–22, 2010, Gliwice, Poland, Silestian University of Technology.

21. **Zeidmane A., Rubina T.** Student — Related factor for dropping out in the first year of studies at LLU engineering programmes, *Engineering for Rural Development*, 2017, N 16, pp. 612–618, doi:10.22616/ERDev2017.16.N122.

22. **Steyn T., Plessis I. D.** Competence in mathematics-more than mathematical skills?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2007, Vol. 38, Issue 7, pp. 881–890, doi:10.1080/00207390701579472.

23. **Ravn O., Bo Henriksen L.** Engineering mathematics in context - learning university mathematics through problem based learning, *International Journal of Engineering Education*, 2017, Vol. 33, Issue 3, pp. 956–962.

24. **Firouzian S., Kashefi H., Yusof Y. M., Ismail Z., Rahman R. A.** Mathematical competencies as perceived by engineering students, lecturers, and practicing engineers, *International Journal of Engineering Education*, 2016, Vol. 33, Issue 6, pp. 2434–2445.

Для цитирования: Габова М. Н., Мужикова А. В. Контекстный подход в преподавании математики будущим инженерам // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика.*

Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 26–50.
DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_26.

For citation: Gabova M. N., Muzhikova A. V. Context approach in the teaching of mathematics future engineers, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 4 (37), pp. 26–50. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_26.

УГТУ *Поступила 31.08.2020*

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (37). 2020

УДК 519.29 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_51**

СУДЬБА ДВУХ МАТЕМАТИКОВ: ОТЦА И СЫНА ПЕРЕЛЬМАНОВ

В. П. Одинец

Впервые описываются результаты научной работы Якова Исидоровича Перельмана (1882–1942) в области математики и её приложения к теории упругости, полученные накануне Великой Отечественной войны. Описаны также жизнь и научные работы его сына Михаила Яковлевича Перельмана (1919–1942).
Ключевые слова: Я. И. Перельман, метод Галеркина, М. Я. Перельман, модуль непрерывности, вес и псевдовес топологического пространства.

1. Известно, что Михаил Яковлевич Перельман перед началом Великой Отечественной войны был аспирантом математико-механического факультета Ленинградского государственного университета (ЛГУ). А вот о том, что его отец к этому времени также стал фактически уже профессиональным математиком (точнее, механиком), я не знал. В известных книгах и статьях о Якове Исидоровиче Перельмане[1] (1882–1942) пишется о нём только как о выдающемся популяризаторе науки, пропагандисте идей К. Э. Циолковского о межпланетных путешествиях, развития ракетной техники в СССР, бережного отношения к природе[2] (см., например [1]).

В списке литературы в сборнике «Математика в СССР за тридцать лет 1917–1947» [2, с. 847] приводится статья М. Я. Перельмана, которой почему-то нет в книге [3, с. 814], изданной десятилетие спустя. Ошибки

[1] Яков (Соломон) Перельман родился 4 декабря 1882 года в городе Белостоке (ныне в Польше) Гродненской губернии в семье счетовода Исидора (Исаака) Перельмана (умер в 1883 г.) и преподавательницы начальных классов Генриетты Исааковны Эрлих (умерла в 1903 г).

[2] Он ведь был выпускником Лесного института в Санкт-Петербурге (1908), поступив туда в 1901 году по окончании Белостокского реального училища.

© Одинец В. П., 2020.

не было. Статья, о которой идет речь, поступила в журнал «Прикладная математика и механика» 26 декабря 1940 года и была опубликована в т. V, вып. 3 (1941), с. 345–358, принадлежит не Михаилу Перельману, а его отцу Якову Исидоровичу (Я. И.).

Вернёмся к этой истории позже, а сейчас перенесемся в осень 1938 года. Близится конец «ежовщины». В октябре 1938 года, опасаясь ареста, Я. И. уходит из редакции общества «Знание». Академик Борис Григорьевич Галеркин[3], давно знавший[4] Якова Перельмана, предлагает ему занять должность научного сотрудника Научно-исследовательского института гидротехники[5]. В 1939 году Я. И. под руководством Галеркина завершил исследование «напряженного и дифференцированного состояния кругового цилиндрического трубопровода, лежащего на двух опорах и частично или полностью заполненного тяжелой жидкостью»[6] [4, с. 160].

При этом были получены численные значения перемещений и напряжений в цилиндрическом трубопроводе в двух частных случаях: а) полного заполнения; б) половинного его заполнения.

Кроме того, в статье были представлены более 30 эпюр[7] напряжений и усилий и 11 таблиц значений различных, необходимых при исследовании напряжений функций.

Приглашая Я. И. в НИИ гидротехники Борис Григорьевич Галеркин хорошо знал, что Яков Исидорович защитил в Лесном институте в 1908 году дипломную работу по теме «Старорусский казенный лесопильный завод. Его оборудование и работа» и имел звание «ученый — лесовод I разряда», так что технически Я. И. к работе был готов. Что касает-

[3]Б. Г. Галёркин (по рождению Берка Гиршевич: 1871–1945) — крупнейший довоенный механик и математик в области упругости — окончил Петербургский технологический институт (1899), академик АН СССР (1935), участник 1-го Всесоюзного съезда математиков в Харькове (1930) (См., [5, с. 200]).

[4]Б. Г. Галеркин жил, так же как и Перельман, на Петроградской стороне по адресу: Кронверкская ул., д. 20б.

[5]Основанный в 1921 году НИИ гидротехники в 1940 году получил статус Всесоюзного НИИ. В 1946 году был назван именем академика Б. Е. Веденеева. Сейчас: ОАО ВНИИГ им Б. Е. Веденеева.

[6]В ходе этого исследования Я. И. пригодились знания, полученные им в процессе освоения курса высшей математики и механики, читавшегося профессором Аркадием Семеновичем Домогаровым (1863–1907), ставшим первым заведующим кафедрой высшей математики (1899) в Лесном институте, значительные труды которого посвящены механике и астрономии.

[7]Эпюр (или эпюра) — это чертёж, на котором пространственная фигура изображена в виде трёх или другого числа проекций, как правило, фронтальной горизонтальной и профильной.

ся необходимых знаний по математике, механике и физике, то своими книгами Я. И. доказал, что он в них разбирается. При этом начала высшей математики Я. И. освоил еще в реальном училище в Белостоке[8] у преподавателя Бунимовича.

Акад. Б. Г. Галеркин и научн. сотр. Я. И. Перельман

НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТРУБОПРОВОДЕ

1. Предметом настоящей работы является исследование напряженного и деформированного состояния кругового цилиндрического трубопровода, лежащего на 2 опорах, частично или полностью заполненного тяжелой жидкостью. В основу работы положено общее решение вопроса о равновесии цилиндрической оболочки, данное акад. Б. Г. Галеркиным [1].

Пользуясь аналогичными методами, можно учесть влияние заделки, а также рассчитать неразрезной трубопровод.

Рассмотрим цилиндрический трубопровод длины l, свободно лежащий на двух опорах, частично или полностью заполненный тяжелой жидкостью.

Наружный и внутренний радиусы цилиндра — b, a; U_0, V_0, W_0 — перемещения срединной цилиндрической поверхности радиуса c, где $c = \frac{a+b}{2}$; U_0 — перемещение по радиусу, V_0 — по дуге (перпендикулярно радиусу), W_0 — параллельно оси z-ов; ось z-ов принята за ось цилиндра. Полагаем $z = c\zeta$; $\frac{\delta}{c} = \alpha$ (где $\delta = b - a$ — толщина оболочки).

Фиг. 1. Схема цилиндрического трубопровода с углом заполнения β.

U_0, V_0, W_0 должны удовлетворять трем диференциальным ур-иям:

$$\frac{a^2}{6}\frac{\partial^2 U_0}{\partial \zeta^2} - \sigma\frac{\partial U_0}{\partial \zeta} - \frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial \theta\, \partial \zeta} - \frac{1-\sigma}{2\alpha}\ln\frac{1+\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \zeta^2} = 0; \qquad (a)$$

Рис. Начало статьи Б. Галёркина и Я. Перельмана

В 1940 году Яков Перельман защищает в Ленинградском индустриальном институте (ЛИИ)[9] кандидатскую диссертацию на тему: «Метод академика Галеркина в вариационном исчислении и теории упругости» (научный руководитель — академик Б.Г. Галеркин). Представление о диссертации[10] даёт статья Я. И. Перельмана практически под тем же названием [6], опубликованная в журнале «Прикладная математика и механика» в 1941 году. Остановимся подробнее на этой статье.

---

[8] Я. И. Перельман учился там с 1895 по 1901 год; в 1901 году он поступает в Лесной институт в Петербурге.

[9] С конца 1940 года ЛИИ вновь стал называться Политехническим институтом.

[10] В литературе к статье [2] Я. И. Перельман цитирует рукопись защищенной диссертации в литературе под номером 35.

В статье семь пунктов. В пункте 1 рассмотрен сам метод Галеркина, введенный им еще в 1915 году в ставшей классической работе «Стержни и пластины» из «Вестника инженеров» № 19, и даётся сравнение с методом Ритца[11]. В конце пункта отмечается, «что метод Ритца не применим к неконсервативной системе, а метод Галеркина, применяющийся непосредственно к дифференциальному уравнению [упругой поверхности изогнутой пластинки] сохраняет свою силу» [6, с. 247]. при этом даются ссылки на работы шотландского профессора Уильяма Донкана (William Jolly Duncan: 1894–1960) и немецкого инженера Генриха Генки (Heinrich Hencky: 1885–1951).

В пункте 2 рассмотрена задача о минимуме тройного интеграла по ограниченному объему и применение для решения этой задачи метода Галеркина. Рассмотрены также различные расширения этой задачи и её решения по методам Лейбензона [12] и Треффца[13], которые, как доказывает Я. И. Перельман, эквивалентны.

В четвертом и пятом пунктах рассмотрено приближенное решение пространственной задачи теории упругости и применение к её решению вариационных уравнений Галеркина.

В шестом пункте рассмотрена статическая задача теории упругости и видоизменение метода Галеркина, данное для её решения Л. В. Канторовичем[14]. (Это видоизменение метода Галеркина Я. И. Перельман называет методом Канторовича – Галеркина.) Как пишет Перельман, этот метод применён, в частности, к задаче кручения трёхгранной призмы (Б. Г. Галёркин, 1937) и прямоугольных пластин (В. З. Власов[15], 1939), а также в задаче изгиба стержня (А. И. Лурье[16],

[11]Ритц, Вальтер (Ritz Walter: 1878–1909) — швейцарский физик и математик. В 1908 году создал метод решения вариационных задач, известный как метод Ритца.

[12]Лейбензон Леонид Самойлович (1879–1951), один из виднейших довоенных специалистов по теории упругости; окончил Московский университет (1901) и Московское высшее техническое училище (1906), академик АН СССР (1943). В том же году вышла его знаменитая книга [4].

[13]Треффц, Эрих (Trefftz Erich: 1888–1937) — видный немецкий математик и механик. Учился в Гёттингене, Колумбийском университете (Нью Йорк) и Страсбурге. Профессор в Технической школе (Аахен) с 1919 года, а с 1922 года профессор в Высшей технической школе Дрездена (ныне Технический университет).

[14]Я. И. Перельман ссылается на подробное изложение этого метода в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» (с. 248–257). М.; Л., 1936, 528 с.

[15]Власов Василий Захарович (1906–1958) — крупный специалист по механике тонких пластин и пространственных колебаний тонкостенных стержней-оболочек, д-р тех. н. (1937), чл.-корр. АН СССР (1953).

[16]Лурье Анатолий Исаакович (1901–1980) — видный советский ученый в области

1939). В этом же пункте даётся отсылка к совместной работе Б. Г. Галеркина и Я. И. Перельмана [7].

Наконец, в седьмом пункте описано применение метода Галеркина и его многочисленных приложений к вопросам колебаний упругих и неизменяемых систем. Перечислены, в частности, результаты немецкого профессора Рихарда Граммеля (Richard Grammel: 1889–1964), Е. П. Гроссмана[17] по применению метода Галеркина к интегрированию уравнений флаттера, Г. И. Петрова[18] в задаче об устойчивости течения вязкой жидкости, Д. Ю. Панова[19] по применению к некоторым нелинейным задачам теории упругости и ряда других работ.

Б. Г. Галеркин

Я. И. Перельман (1934)

Откуда же взялась ошибка в книге [2], приписавшая статью [8] Михаилу Перельману. Думается, это связано с выходом в 1943 году. в Москве книги Л. С. Лейбензона [4], где на стр. 35 впервые возникает ошибка (вместо Я. И. статья [10] приписывается его сыну Михаилу). Эту ошибку повторили позже Л. В. Канторович и В. И. Крылов в сборнике [2].

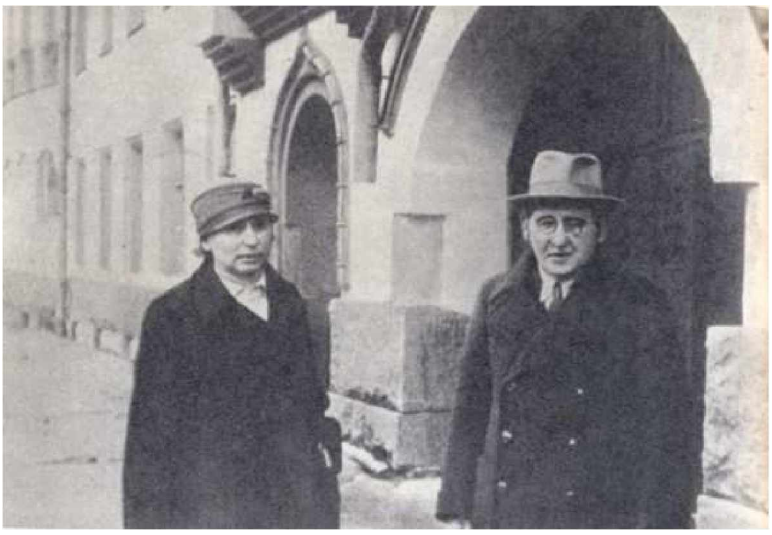
теоретической и прикладной механики. Окончил Ленинградский политехнический институт (1925), профессор (1935), чл.-корр. АН СССР (1960) по Отделению технических наук.

[17]Гроссман Евгений Павлович(1910–1953) — один из основателей советской научной школы аэроупругости, д-р тех. н. (1940), профессор (1949), лауреат Сталинской премии (1942).

[18]Петров Григорий Иванович (1912–1987) — советский ученый в области математики и механики, ракетостроения, окончил механико-математический ф-т МГУ (1935), академик АН СССР (1958).

[19]Панов Дмитрий Юрьевич (1904–1975) — советский ученый в области математики и её приложений, окончил математическое отделение физ.-мат. факультета МГУ (1927), работал в ЦАГИ, профессор, декан физ.-тех. ф-та МГУ (1947–1951), участник математического Конгресса в Амстердаме (1954).

С другой стороны А. А. Марков, который знал статьи Михаила Перельмана, должен был писать в разделе «Топология» сборника [2] только о работах по топологии, а их у Якова Исидоровича не было.



Я. И. Перельман и А. Д. Перельман (1941)

Как сообщила И. И. Демидова, в ЛИИ в 1940 году диссертацию на звание кандидата технических наук по теме «Метод академика В. Г. Галеркина в вариационном исчислении...» действительно защитил Яков Перельман, правда, с отчеством Шаевич (но, вероятно, так восприняли рукописное отчество Исаевич), и год рождения указан 1900[20]. (Возможное объяснение — в начале 1940 года вышло указание не брать к защите диссертации у лиц старше 40 лет.)

С началом Великой Отечественной войны Я. И. Перельман и его жена Анна Давидовна Перельман (Каминская) остаются в Ленинграде. Анна Давидовна работает врачом в госпитале, а дома, на ул. Плуталова, подкармливает старшую сестру Якова Исидоровича тоже Анну (1879–1942) и свою младшую сестру Марию. 18 января 1942 года Анна Давидовна умирает во время дежурства в госпитале от истощения [9, с. 320]. 16 марта 1942 года умирает сам Яков Исидорович [9, с. 321]. В апреле 1942 года умирает его старшая сестра Анна[21] [9, с. 320]. Все трое похоронены на Пискаревском мемориальном кладбище.

[20]ЦГА СПб, фонд Р-3121, опись 22, дело 1043.

[21]В годы Второй мировой войны погибает и их старший брат Герман, уехавший ещё до 1895 года на заработки в Германию и помогавший матери Г. И. Перельман (Эрлих) растить троих детей (Анну, Якова и Сору) после смерти Исидора (Исаака) Перельмана в 1883 году.

2. Вернёмся в 1918 год, год, когда в Петрограде впервые в XX веке люди массово умирали от недоедания[22]. Спасаясь от голода, беременная Анна Давидовна Перельман–Каминская (1884–1942) едет в Псков, где живут её родители и где недалеко от Пскова, в 55 километрах, в старинном городе Остров, родилась она сама [1, с. 36].

21 февраля 1919 года у неё родился сын, названный Михаилом. Так местом рождения Михаила Перельмана стал Псков. В Петрограде Яков Исидорович Перельман жил с 1914 года по адресу: улица Плуталова 2, кв. 12., у Большого проспекта Петроградской стороны. В этой квартире и провел своё детство и юность Михаил. Хозяйством в доме Перельманов занимались две тётки Михаила, старшая сестра отца Анна и младшая сестра матери Мария. Миша рос любознательным, но болезненным мальчиком. В 6 лет он пошел в школу.

Из многочисленных гостей отца Мишу особо увлекали беседы отца об астрономии, физике, биологии, а позже о математике, с «дядей Осей» (Овсеем Вольбергом[23]), который жил с конца 1922 года неподалёку на Петроградской стороне. По окончании школы в 1935 году Михаил поступил в Ленинградский государственный университет им. А. С. Бубнова[24] (ЛГУ) на математико-механический факультет.

По окончании университета (1939) Михаил Яковлевич Перельман поступил в аспирантуру ЛГУ по кафедре геометрии, которой руководил тогда Андрей Андреевич Марков–младший (1903–1979)[25]. Ещё со студенческой скамьи Михаил дружил со своим земляком (тоже родом из Пскова) Николаем Шаниным[26], который также поступил в 1939 году

---

[22]У автора статьи прадед умер в Петрограде от дистрофии 3-й степени в октябре 1918 года.

[23]Овсей Аронович Вольберг (1895–1942), заведующий естественно-математической секцией Отдела реформы школы Народного комиссариата просвещения РСФСР (Наркомпроса) в 1918–1922 годах (см. [10, с. 13–16]). В это же время инспектором Наркомпроса РСФСР работал Я. И. Перельман, писавший программы для школы по математике физике и астрономии (см. подробнее, [10 или 8, с. 13–21]).

[24]Андрей Сергеевич Бубнов (1884–1938) — советский политический деятель, в 1929–1937 годах — нарком просвещения СССР. В октябре 1937 года арестован и в 1938 году расстрелян. Реабилитирован в 1956 году.

[25]Андрей Андреевич Марков–младший, сын академика Андрея Андреевича Маркова (1856–1922). Окончил физико-математический факультет ЛГУ (1924), д-р физ.-мат. наук (1935), профессор (1936), зав. кафедрой геометрии в ЛГУ (1936–1953); зав. кафедрой логики в МГУ (1959–1979), чл.-корр. АН СССР (1953), специалист в области оснований анализа, общей теории динамических систем, теории кос и небесной механики, заложил основы теории сложности алгоритмов и конструктивной математики, получил значительные результаты в криптографии.

[26]Николай Александрович Шанин (1919–2011) — видный советский и российский

в аспирантуру к А. А. Маркову.

А. А. Марков

Н. А. Шанин (1956)

Первой большой работой Михаила Перельмана была статья «О модуле непрерывности аналитических функций»[27], опубликованная в 1941 году [6].

В этой работе получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная функция могла рассматриваться как модуль непрерывности аналитической функции. Помимо установления того факта, что модуль непрерывности есть аналитическая функция, в работе решена задача установления вида этой функции. Отметим также, что в 23-страничной работе [11] имеется лишь единственная ссылка на 2-й том (стр. 241) классического «Курса математического анализа» Э. Гурса[28], перевод которого издан в СССР в 1936 году (см. сноску на стр. 64 в [11]).

Следующей работой М. Я. Перельмана, опубликованной в том же номере[29] «Ученых записок ЛГУ. Сер. математических наук», [12], была заметка «Об одном свойстве последовательности полиномов». Цель

математик, кандидат (1942) и доктор (1946) физико-математических наук; основные труды в области топологии, конструктивной математики, построения финитарной концепции математического анализа.

[27]Напомним, что **аналитическая функция** — это функция, которая совпадает со своим рядом Тейлора в окрестности любой точки области определения; **модулем непрерывности** произвольной функции f, заданной на множестве E, называют функцию $\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : (x, y \in E) \wedge |x - y| < \delta\}$.

[28]Эдуард Гурса (Édouard Goursat: 1858–1936) — французский математик, окончил École Normale Supérieure, где позже он развил свой курс анализа, известна теорема Коши – Гурса, дающая характеризацию аналитических функций.

[29]Заметим, что в этом номере 6 работ из 10 принадлежат математикам, погибшим в блокаду.

заметки — доказательство следующей теоремы: *Даны две последовательности полиномов:*

$$P_1(x_1, \ldots, x_k),\ P_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots$$

$$Q_1(x_1, \ldots, x_k),\ Q_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots$$

Тогда существует такое целое $n_0 > 0$, *что для любых двух систем* $x_1^*, \ldots, x_k^*$ *и* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ *вещественных или комплексных чисел, для которых*

$$P_i(x_1^*, \ldots, x_k^*) = Q_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k), \quad i = 1, 2, \ldots, n_0,$$

имеет место

$$P_i(x_1^*, \ldots, x_k^*) = Q_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k), \quad \text{где } i \text{ любое.}$$

Интересно, что в самом конце заметки М. Я. Перельман делает следующее Примечание [12, с. 97]: «как мне удалось выяснить лишь непосредственно перед выходом журнала в свет (благодаря указанию И. Н. Санова[30]) теорема, доказанная в данной работе, представляет следствие теоремы Гильберта о структуре идеалов в кольцах (см. Math. Ann. 36 (1890), S. 473–534)».

На первый взгляд кажется удивительным, что аспирант Маркова занимается не топологией, не геометрией, а скорее анализом. Но удивление пропадает, так как А. А. Марков в это же время сам интересуется анализом и публикует на английском языке в «Математическом сборнике» (т. 7 (1940), с. 3–7) заметку « О нахождении числа корней алгебраического уравнения, принадлежащих данной области».

Дальнейшая часть результатов, полученных М. Я. Перельманом, связана с его неопубликованной работой 1941 года «Мощности в топологии» (с. 1–361), о которой[31] написал А. А. Марков в обзоре «Топология» [7, с. 183–242].

Напомним несколько определений. Будем говорить, что семейство Ω открытых множеств пространства X есть база этого пространства, если всякое открытое множество пространства X может быть получено путем суммирования некоторых элементов семейства Ω (в любом числе).

[30] Санов Иван Николаевич (1919–1968) — специалист в области алгебры и стохастической криптографии, победитель Первой математической олимпиады по математике в Ленинграде 1934 года [13, с. 6], учился на курс младше М. Перельмана, участник ВОВ. Будучи студентом, решил проблему Бернсайда для показателя 4., к.ф.-м.н. (1947), в 1952 году переехал в Москву. В 1952—57 годах преподавал в МГУ.

[31] См. сноску к с. 186 в [2].

Среди мощностей различных баз пространства X имеется наименьшая. Она называется **весом** пространства X.

Говорят, что множество A плотно в топологическом пространстве X, если замыкание A в X совпадает с X. Наименьшая из мощностей множеств, плотных в X, называется **псевдовесом** этого пространства. Псевдовес пространства не превосходит веса его, но может быть и меньше веса.

Наконец, **логарифмом** кардинального[32] числа τ назовём наименьшее из кардинальных чисел σ, таких, что $\tau < 2^{\sigma}$.

Следующую теорему, полученную М. Я. Перельманом, А. А. Марков называет *важной* (см. [2, с. 186]):

Вес произведения системы пространств равен сумме весов пространств — сомножителей, если эта сумма бесконечна, а каждое слагаемое больше единицы.

Следующий результат М. Я. Перельмана А. А. Марков называет интересным:

Псевдовес произведения бесконечной системы пространств Хаусдорфа[33], *каждое из которых состоит более чем из одной точки, равен supremum'у псевдовесов пространств-сомножителей и логарифма числа этих сомножителей* (см. [2, с. 188–189]).

Следующие четыре теоремы М. Я. Перельмана А. А. Марков называет замечательными (см. [2, с. 199–200]). Пусть τ — произвольное трансфинитное кардинальное число:

1. Имеется ровно $\alpha = 2^{\tau}$ различных бикомпактов[34] *веса τ.*

---

[32]Мощностью множества A называют число (кардинальное), обозначаемое как $cardA$. В частности, если A содержит n элементов , то card $A = n$, если $A = N$ — множество натуральных чисел, то $cardN = \aleph_0$ (алеф-ноль), если $A = R$ — множество вещественных чисел, то $cardR = c$ — мощность континуума. Через 2^A обозначают мощность всех подмножеств множества A. Два множества A и B называются подобными или имеющими один и тот же порядковый тип, если между элементами этих множеств существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Трансфинитными числами называют порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств (см. [14, с. 255]).

[33]Класс пространств, в которых всякое одноточечное множество замкнуто, называется классом пространств Риса и обозначается символом T_1. Класс пространств, в которых любые два различных одноточечных множества отделимы друг от друга окрестностями, называется *классом пространств Хаусдорфа* и обозначается символом T_2. Пространство Риса, для которого *любая окрестность любой точки содержит замыкание некоторой окрестности этой точки*, называется *регулярным пространством*. Пространство, в котором для *любого замкнутого множества и точки вне его существует непрерывная числовая функция, равная нулю на множестве и единице в точке*, называется *вполне регулярным пространством* [14, с. 444].

[34]Топологическое пространство называют *бикомпактным, если из его любого от-*

2. Пусть $\mu = \aleph_0$, $\lambda = \tau^\mu$. *Имеется ровно* 2^λ *топологически различных (т. е. не гомеоморфных) метризуемых пространств веса* τ.

3. Имеется ровно 2^α *топологически различных пространств класса* T_1. *Столько же имеется топологически различных вполне регулярных пространств веса* τ.

4. Пусть $\beta = 2^\alpha$. *Имеется ровно* 2^β *топологически различных регулярных пространств псевдовеса* τ. *Столько же имеется топологически различных вполне регулярных пространств псевдовеса* τ.

Во время учебы в университете М. Я. Перельман не проходил военной подготовки по состоянию здоровья. Тем не менее, 5 июля 1941 года Михаил Яковлевич Перельман был призван Василеостровским райвоенкоматом[35], но вместо фронта его направляют на военный завод «Ленинская искра»[36]. До мая 1942 года Михаил работает на этом заводе. В мае завод эвакуируют, но Михаила не берут в эвакуацию.

16 июня 1942 года Михаила призывают в Приморском райвоенкомате в армию, направляя не на передовую, а на охрану военных объектов. Спустя два месяца 14 августа 1942 года Михаил покончил собой. Вот как описывает это происшествие в секретном внеочередном Донесении[37] о чрезвычайном происшествии начальник штаба 291-й стрелковой дивизии, стоявшей в 1942 году на фронте с финнами в глубину до посёлка Осиновая роща Парголовского района Ленинградской области: «Во время ухода 2-й стрелковой роты на обед красноармеец Перельман Михаил Яковлевич, стоявший на посту, выстрелом из винтовки покончил жизнь самоубийством». Из «Книги памяти. Ленинград 1941–1945 Приморский район» [5, с. 361] следует, что М. Я. Перельман был похоронен на кладбище этого же посёлка.

Добавим, что рукопись Перельмана «Мощности в топологии» после войны так и не была опубликована. Где она осталась, неизвестно. Возможно в архиве А. А. Маркова. Добавим, что, А. А. Марков написал о гибели Михаила Перельмана в 1942 году, не вдаваясь в подробности [2, с. 186]. О гибели М. Я. Перельмана на фронте написано в книге Лейбензона [4, с. 35], и повторено в сборнике [2] Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым. Однако первым, кто сообщил, что Михаил Перельман

крытого покрытия можно извлечь конечное покрытие. Теперь бикомпактное пространство называют компактным пространством (или *компактом*). В сороковые годы компактами называли *бикомпактные метризуемые* пространства (т. е. пространства, в которых топология порождается некоторой метрикой) [14, с. 94].

[35] См. Фонд Василеостровский РВК. Опись 40000091. Дело 40000091.

[36] Завод был образован еще в 1897 году, занимался изготовлением аккумуляторов для флота. Название получил в 1922 году. Ныне входит в НПО «Источник».

[37] См. Центральный архив МО, фонд 58, опись ист. 818883, дело 511.

«пропал без вести», был Н. А. Шанин (см. [3, с. 814]).

В заключение автор благодарит Д. В. Фомина за присланные материалы и полезные обсуждения.

Список литературы

1. **Мишкевич Г. И.** Доктор занимательных наук. М.: Знание, 1986. 192 с.

2. Математика в СССР за тридцать лет 1917–1947 / под ред. А. Г. Куроша, А. И. Маркушевича, П. К. Рашевского. М.; Л.: ОГИЗ, Изд-во тех.-теор. лит-ры, 1948. 1045 с.

3. Математика в СССР за сорок лет 1917–1957. Т. 2. Биобиблиография. М.: Физ.-мат. лит., 1959. 819 с.

4. **Лейбензон Л. С.** Вариационные методы решения задач теории упругости. М.; Л., 1943. 287 с.

5. Книга памяти. Ленинград. 1941–1945. Приморский район. СПб.: Нотабене, 1997. Т. 12. 557 с.

6. **Перельман Я. И.** Метод Галеркина в вариационном исчислении и в теории упругости // *Прикладная математика и механика. 1941. Т. V. Вып. 3. С. 345–358.*

7. **Галеркин Б. Г., Перельман Я. И.** Напряжения и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе. Известия научно-исследовательского ин-та гидротехники. Т. 27. 1940. С. 160–192.

8. **Одинец В. П.** О ленинградских математиках, погибших в 1941–1944 годах. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2020. 122 с.

9. Блокада 1941–1944. Книга памяти. Ленинград. Т. 23 (Павлова–Петрова). СПб.: Изд. дом «Стелла», 2005. 717 с.

10. **Одинец В. П.** К 125-летию реформатора математического образования О. А. Вольберга (1895–1942) // *Математика в школе. 2020. № 4. С. 54–59.*

11. **Перельман М. Я.** О модуле непрерывности аналитических функций // *Ученые записки ЛГУ. Серия мат. наук. 1941. Вып. 12. С. 62–82.*

12. Труды Первого Всесоюзного съезда математиков. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 376 с.

13. **Фомин Д. В.** Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994. 309 с.

14. Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988. 848 с.

15. **Перельман М. Я.** Об одном свойстве последовательности полиномов// *Ученые записки ЛГУ. Серия мат. наук. 1941. Вып. 12. С. 83–91.*

Summary

Odyniec W. P. The Fate of two mathematicians: Perelman and Perelman Jr.

In the article the work of Jacob I. Perelman (1882–1942) in the area of mathematics and its application to the theory of elasticity is described for the first time at the ever of the Grand Patriotic War. Also described the life and work of his son Michael J. Perelman (1919–1942).
Keywords: J. I. Perelman, M. J. Perelman, Galerkin method, continuity modulus, the least power and pseudo-power of a topological space.

References

1. **Mishkevich G. I.** *Doktor zanimatelnyh nauk* (Doctor of Entertaining Sciences), M.: Znanie, 1986, 192 p.

2. *Matematika v SSSR za tridcat' let* (The URSS Mathematics for thirty years: 1917–1947), Pod. red. A. G. Kurosha, A. I. Markushevicha, P. K. Rashevskogo, M.-L.: OGIZ, Izd-vo tehn-teor. lit-ry, 1948, 1045 p.

3. *Matematika v SSSR za sorok let* (The URSS Mathematics for forty years: 1917–1957), Biobibliografiya, Vol. 2, M.: Fizmatlit, 1959, 819 p.

4. **Leibenson L. S.** *Variacionnye metody resheniya sadach teorii uprugosti* (Variational methods of solving the problems of the theory of elasticity), M.-L.: 1943, 287 p.

5. *Kniga pamyati. Leningrad. 1941–1945. Primorskii raion T. 12* (The Book of Memory. Leningrad. 1941–1945. The Primorsky District. Vol. 12), SPb: Notabene, 1997, 557 p.

6. **Perelman J. I.** Metod Galerkina v variacionnom ischislenii i v teorii uprugosti (Galerkin method in calculus of variations and in the theory of elasticity), *Prikladnaya matematika I mehanika*, T. V, vyp. 3, 1941, 345–358 p.

7. **Galerkin B. G., Perelman J. I.** *Napryazheniya i peremeshtcheniya v krugovom zylindricheskom truboprovode* (Tensions and Displacements in Cylindrical Pipe Line), Izvestiya nauchno- issledovatelskogo instituta gidrotehniki, T. 27, 1940, pp. 160–192.

8. **Odyniec W. P.** *O leningradskih matematikah, pogibshih v 1941–1944 godah* (On some Leningrad – based Mathematicians perished in 1941 –1944), Syktyvkar: Izd- vo SGU im. Pitirima Sorokina, 2020, 122 p.

9. *Blokada 1941–1944. Kniga pamyati, Leningrad, T. 23* (Blockade 1941–1944. The book of Memory, Leningrad, Vol. 23), SPb.:Stella, 2005, 717 p.

10. **Odyniec W. P.** K 125-letiu reformatora matematicheskogo obrazovaniya O.A. Volberga (1895–1942) (On the 125 anniversary of reformer of the birth of mathematical education O.A .Volberg (1895–1942), *Matematika v shkole* (Mathematics in School), № 4, 2020, p. 54–59.

11. **Perelman M. J.** O module nepreryvnosti analiticheskih funkcii (On the Continuity Modulus of Analytical Functions), *Uchenye zapiski LGU. Seriya mat. nauk*, vyp. 12, 1941, 62–82 p.

12. *Trudy Pervogo Vsesouznogo s'ezda matematikov* (Proceedings of the First All-Union congress of mathematicians), M.-L.: ONTI NKTP SSSR, 1936, 376 p.

13. **Fomin D. V.** *Sankt- Peterburgskie matematicheskie olimpiady* (Saint Petersburg mathematics olympiades), SPb.: Politehnika, 1994, 309 p.

14. *Matematicheskii enciklopedicheskii slovar'* (The Mathematical Encyclopaedia), M.: Soviet Encyclopaedia, 1988, 848 p.

15. **Perelman M. J.** Ob odnom svoistve posledovatelnosti polinomov (On one property of sequences of polynomials), *Uchenye zapiski LGU. Seriya mat. nauk*, vyp. 12, 1941, 83–91 p.

Для цитирования: Одинец В. П. Судьба двух математиков: отца и сына Перельманов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 51–65. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_51.*

For citation: Odyniec W. P. The Fate of two mathematicians: Perelman and Perelman Jr., *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 4 (37), pp. 51–65.
DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_51.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 28.08.2020*

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (37). 2020

УДК 511.1 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_66**

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕТА ЭРАТОСФЕНА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

А. Б. Певный, М. Н. Юркина

Простые числа широко используются не только в чистой математике, но и в смежных дисциплинах. И хотя они известны с давних времен, многие проблемы, касающиеся простых чисел, попрежнему остаются открытыми и вопросы их изучения не теряют своей актуальности. Одним из известных алгоритмов нахождения всех простых чисел, не превосходящих данного N, является решето Эратосфена. Для оценки количества операций, необходимых для выполнения этого алгоритма, авторы воспользовались одним результатом П. Л. Чебышева. В 1849 году П. Л. Чебышев доказал двустороннюю оценку для количества простых чисел, не превосходящих данного N. На основании этих оценок в статье устанавливается, что количество операций в алгоритме Эратосфена оценивается как $\mathrm{O}(N \ln \ln N)$.

Ключевые слова: решето Эратосфена, сложность, Чебышев.

Введение

Простые числа широко применяются в известных алгоритмах: алгоритмы на строках (например, алгоритм М. Рабина — Р. Карпа), алгоритмы генерации псевдослучайных чисел для решения криптографических задач (например, построение шифров Цезаря, Вернама и Хилла, криптосистемы RSA). Исследованием вопросов применения простых чисел в математике и информационных технологиях занимаются многие современные авторы (см. например [1–7]).

Есть множество алгоритмов для нахождения простых чисел (см. например [8]). Решето Эратосфена — это алгоритм для нахождения всех простых чисел, не превосходящих N. Выписываются все натуральные числа от 2 до N и сначала вычеркиваются все числа, кратные двум. Затем берем первое невычеркнутое число (3) и вычеркиваем числа, кратные трем. Далее продолжаем аналогично.

© Певный А. Б., Юркина М. Н., 2020.

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~

Следует отметить, что первое невычеркнутое число будет простым. Когда нашли простое $p \geq \sqrt{N}$ и вычеркнули числа, кратные p, то все составные числа будут вычеркнуты и алгоритм заканчивается.

Приведем фрагмент программы на Паскале, реализующий решето Эратосфена.

```
for k:=2 to N do b[k]:=true;
SQN:=round (sqrt(N));
for p:=2 to SQN do
  if b[p] then
  begin k:=p+p;
    while k<= N do
    begin b[k]:=false; k:=k+p end
  end;
```

В этой программе парадоксальным образом используется только одна арифметическая операция — сложение. Алгоритм может найти простые числа даже при $N = 10^9$, например в системе C++.

Оценка сложности

Оценим сложность алгоритма при больших N. Обычно под сложностью понимают количество арифметических операций, необходимых для выполнения алгоритма. Под операцией будем понимать выполнение двух операторов

$$\text{b[k]:=false; k:=k+p.}$$

Параметр k принимает значения $s \cdot p$, где $s = 2,\ 3, \ldots$ Для последнего s будет $s \cdot p \leq N$, т. е. $s \leq \frac{N}{p}$. Поэтому сложность K_N оценивается так:

$$K_N \leq \sum_{p \leq \sqrt{N}} \frac{N}{p} = N \cdot S_n, \text{ где } n = \left[\sqrt{N}\right],\ S_n = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}.$$

В теории чисел хорошо известно, что $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Порядок роста S_n оценивает следующая

Теорема 1. *Существуют a, $b > 0$, такие, что*

$$S_n \leq a + b \cdot \ln\ln n \ \textbf{\textit{при всех}}\ n \geq 3. \tag{1}$$

Значит, сложность $K_N = O(N \ln\ln N)$. Существуют алгоритмы с линейной сложностью, т. е. $K_N \leq cN$. Следует отметить, что $S_n \to \infty$ очень медленно. Например, при $N = 10^9$, $n = \sqrt{N}$, $\ln\ln n \approx 2.3$.

Для доказательства оценки (1) нужны некоторые сведения о распределении простых чисел в натуральном ряду. Простые числа распределены в натуральном ряду весьма неравномерно. Встречаются простые числа – близнецы, разность которых равна 2. В то же время для сколь угодно большого M найдутся два простых числа p_k и p_{k+1}, такие, что $p_{k+1} - p_k > M$.

Гаусс (1777–1855) в юности получил в подарок книгу «Таблица логарифмов», которая еще содержала таблицу простых чисел. Обозначив $\pi(N)$ количество простых чисел не превосходящих N, Гаусс выписывал величину $\pi(N)/N$ — среднее количество простых на $[0, N]$ или среднюю плотность простых на $[0, N]$. Эта плотность убывает с ростом N, и Гаусс предположил, что

$$\frac{\pi(N)}{N} \approx \frac{1}{\ln N},$$

что подтверждалось вычислениями. Отсюда $\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N}$, что часто называют законом распределения простых чисел.

В 1808 году Лежандр опубликовал найденную им эмпирическую формулу $\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N - 1.08366}$, дающую приближенное значение $\pi(N)$ при больших N.

В начале 1849 года П. Л. Чебышев защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений». В том же году вышло в свет первое издание книги «Теория сравнений» с приложением статьи «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» [9, с. 29–52]. В этой статье Чебышев рассматривает отношение $\pi(N)$ к $\frac{N}{\ln N}$ и доказывает, что

$$A < \frac{\pi(N)\ln N}{N} < B \text{ при } N > N_0, \tag{2}$$

и указывает значения $A = 0.92$, $B = 1.1$. Далее Чебышев доказал, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)\ln N}{N} = 1$$

при условии, что предел существует. Положим

$$m = \min_{N\in 2:N_0} \frac{\pi(N)\ln N}{N}, \quad M = \max_{N\in 2:N_0} \frac{\pi(N)\ln N}{N},$$

$$a = \min\{A, m\}, \quad b = \max\{B, M\}.$$

Тогда

$$a\frac{N}{\ln N} \le \pi(N) \le b\frac{N}{\ln N} \text{ при } N \ge 2. \tag{3}$$

В такой форме результат Чебышева представлен в книге [10, теорема 324].

Доказательство теоремы

Докажем оценку (1).

Рассмотрим простые числа p_1, p_2, ..., p_k, ..., не превосходящие n. Тогда $k = 1, 2, \ldots, \pi(n)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k}.$$

Нужно оценить p_k снизу. Для этого подставим в (3) $N = p_k$:

$$k = \pi(p_k) \leq b\frac{p_k}{\ln p_k},$$

отсюда

$$p_k \geq \frac{1}{b} k \ln p_k \geq \frac{1}{b} k \ln k, \tag{4}$$

так как $p_k \geq k$ при всех k. В силу (4)

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \sum_{k=4}^{\pi(N)} \frac{b}{k \ln k}.$$

Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ убывает при $x > 1$, поэтому

$$S_n < 2 + b \int_3^{\pi(N)} \frac{1}{x \ln x} dx = 2 + b \cdot \ln\ln \pi(n) - b \cdot \ln\ln 3.$$

Заменим $\pi(n)$ на n, а число $\ln\ln 3 > 0$ отбросим. Получим

$$S_n < 2 + b \cdot \ln\ln n \text{ при } n \geq 3,$$

что и требовалось.

Список литературы

1. **Leandro M., Antonio J. J., Antonio S. F.** Multiplication and Squaring with Shifting Primes on OpenRISC Processors with Hardware Multiplier // *Journal of Universal Computer Science. 2013. Vol. 19. No 16. Pp. 2368–2384.*

2. **Krishan K., Deepti S. D.** Eratosthenes sieve based key-frame extraction technique for event summarization in videos // *Multimedia Tools and Applications. 2018. 77. Pp. 7383–7404.*

3. **Durán R. D., Masqué M.** Optimal strong primes // *Information Processing Letters. 2015. 93 (1). Pp. 47–52.*

4. **Samir B. B., Zardari M. A.** Generation of prime numbers from advanced sequence and decomposition methods // *International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 85. No 5. 2013. Pp. 833–847.*

5. **Mohammad G., Ali K.** A novel secret image sharing scheme using large primes // *Multimedia Tools and Applications. 2018. 77. Pp. 11903–11923.*

6. **Barzu M., Tiplea F. L., Drăgan C. C.** Compact sequences of coprimes and their applications to the security of CRT-based threshold schemes // *Information Sciences. 2013. 240. Pp. 161–172.*

7. **Попов В. А., Канева Е. А.** «Длинная» арифметика в исследованиях статистики первых цифр степеней двойки, чисел Фибоначчи и простых чисел // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (31). С. 91–107.*

8. **Кудрина Е. В., Кузьмина В. Р.** Алгоритмы нахождения простых чисел: от школы до вуза // *Электронное обучение в непрерывном образовании : сборник научных трудов III Международной научно-практической конференции. Ульяновск: УлГТУ, 2016. С. 1106–1113.*

9. **Чебышев П. Л.** Избранные математические труды. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во техн.-теорет. лит. 1946. 200 с.

10. **Бухштаб А. А.** Теория чисел. М.: Учпедгиз, 1960. 376 с.

Summary

Pevnyi A. B., Yurkina M. N. Sieve of Eratosphenes complexity and distribution of primes

Primes are widely used not only in pure mathematics, but also in related disciplines. And although they have been known for a long time, many problems concerning prime numbers are still open and the questions of their study do not lose their relevance. One of the well-known algorithms for finding all primes not exceeding a given N is the sieve of Eratosthenes. To estimate the number of operations required to execute this algorithm, the

authors used one result of P. L. Chebyshev. In 1849 P. L. Chebyshev proved a two-sided estimate for the number of primes not exceeding a given N. Based on these estimates, the article establishes that the number of operations in the Eratosthenes algorithm is estimated as O $(N \ln \ln N)$.
Keywords: sieve of Eratosthenes, primes, Chebyshev.

References

1. **Leandro M., Antonio J. J., Antonio S. F.** Multiplication and Squaring with Shifting Primes on OpenRISC Processors with Hardware Multiplier, *Journal of Universal Computer Science*, 2013, vol. 19, no. 16, pp. 2368–2384.

2. **Krishan K., Deepti S. D.** Eratosthenes sieve based key-frame extraction technique for event summarization in videos, *Multimedia Tools and Applications*, 2018, 77, pp. 7383–7404.

3. **Durán R. D., Masqué M.** Optimal strong primes, *Information Processing Letters*, 2015, 93 (1), pp. 47–52.

4. **Samir B. B., Zardari M. A.** Generation of prime numbers from advanced sequence and decomposition methods, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 85 No. 5, 2013, pp. 833–847.

5. **Mohammad G., Ali K.** A novel secret image sharing scheme using large primes, *Multimedia Tools and Applications*, 2018, 77, pp. 11903–11923.

6. **Barzu M., Tiplea F. L., Drăgan C. C.** Compact sequences of co-primes and their applications to the security of CRT-based threshold schemes, *Information Sciences*, 2013, 240, pp. 161–172.

7. **Popov V. A., Kaneva E. A.** «Dlinnaya» arifmetika v issledovaniyah statistiki pervyh cifr stepenej dvojki, chisel Fibonachchi i prostyh chisel («Long» arithmetic in studies of statistics of the first digits of powers of two, Fibonacci numbers and primes), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 2(31), pp. 91–107.

8. **Kudrina E. V., Kuzmina V. R.** Algoritmy nakhozhdeniya prostykh chisel: ot shkoly do vuza (Algorithms for finding prime numbers: from school to university), *E-learning in lifelong education: Collection of*

scientific papers of the III International scientific-practical conference, Ulyanovsk: UlSTU, 2016, pp. 1106–1113.

9. **Chebyshev P. L.** *Izbrannye matematicheskie trudy* (Selected mathematical works), M., L.: Ogiz. GOS. Izd-vo tehn.-theoretical lit., 1946, 200 p.

10. **Buchstab A. A.** *Teoriya chisel* (Number theory), M.: Uchpedgiz, 1960, 376 p.

Для цитирования: Певный А. Б., Юркина М. Н. Сложность решета Эратосфена и распределение простых чисел // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 66–72. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_66.*

For citation: Pevnyi A. B., Yurkina M. N. Sieve of Eratosphenes complexity and distribution of primes, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 4 (37), pp. 66–72. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_66.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 22.10.2020*

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 4 (37). 2020

УДК 37.022 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_74**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СХЕМАТИЗАЦИИ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ И ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ

Н. И. Попов, Е. В. Яковлева

Цель настоящей статьи заключается в выделении и обобщении особенностей использования метода схематизации при обучении математике. Данный метод рассматривается как средство развития мышления и математических способностей обучающихся. Исследование основано на анализе научных и методических трудов отечественных и зарубежных ученых по теории деятельности, педагогике, а также на авторских разработках по применению метода схематизации в обучении математике. Предложена схематическая модель для обучения школьников и студентов решению математических задач. Методические подходы, разработанные в процессе исследования, могут быть использованы при обучении математике на разных уровнях образования. Описанный в работе метод можно успешно применять при изучении различных естественно-научных дисциплин.

Ключевые слова: метод схематизации, обучение математике, этапы решения математических задач, схематическая модель.

Введение. В настоящее время в трудах ученых обсуждаются различные вызовы и риски, возникающие перед участниками образовательного процесса в высшей и средней школах. Глобализация, технологизация и использование массовых сетевых коммуникаций в образовательной сфере, кроме положительных моментов, как отмечено в [1], приводят к ослаблению или отсутствию ряда существенных для развития мышления функций:

– системного восприятия и использования информации для последующего анализа, выявления структурных связей в содержании представленной информации;

© Попов Н. И., Яковлева Е. В., 2020.

– осознания индивидуумом целевой, структурно-содержательной частей информации при ее восприятии и использовании;

– устного счета, способствующего развитию памяти и аналитических способностей.

Отрицательные факторы проявляются в неспособности обучающегося осмыслить большой объем неструктурированных знаний, второстепенных фактов. Исследователями системы образования используются различные подходы для разрешения такой проблемной ситуации, в частности, в учебном процессе применяется метод схематизации.

Обзор литературы. Исследования российских и зарубежных ученых в контексте использования метода схематизации в процессе обучения отражают разные аспекты рассматриваемой проблемы. В данной статье под схемой будем понимать знаковую форму представления и отображения содержания мышления. Основной функцией схематизации в образовании, по мнению психологов, является формирование развитого сознания. Существенный вклад в развитие теории схематизации в России внесли исследователи Московского методологического кружка, основателем которого является Г. П. Щедровицкий. В различных источниках по психологии и педагогике использование схематизации для развития мышления обучаемых отражено в работах Ж. Пиаже и Б. Инельдера, Г. П. Щедровицкого, А. П. Зинченко, О. С. Анисимова, В. М. Розина, П. Б. Мрдуляша. В методике обучения математике аналогичные подходы рассматривались, в частности, в работах В. А. Крутецкого [2], В. А. Далингера [3], Н. И. Попова [4].

В статье [5] отражена эффективность применения электронных образовательных ресурсов в контексте комбинированного обучения (blended learning), а также выделены проблемы представления обучающимся учебной информации в формах, соответствующих их когнитивным способностям. В качестве основы для разработки новых образовательных ресурсов предлагается система опорных конспектов В. Ф. Шаталова, позволяющая схематично представить учебную информацию, зафиксировать наиболее важные моменты и выделить причинно-следственные связи. Аналогичные проблемы, связанные с изменением подходов к обучению в «цифровую эпоху», раскрыты в работе М. А. Чошанова [6]. Технологические изменения, по его мнению, требуют переосмысления дидактики, перехода от традиционного преподавания к инженерии учения к проектированию и согласованию цели, содержания и оценочных средств с учетом новых реалий.

Метод схематизации можно использовать для формирования «вычислительного мышления». Приемы его формирования, изменение с

учетом динамики обновления информационных технологий и расширения области задач раскрыты Е. К. Хеннером [7]. С точки зрения автора, целенаправленное развитие такого мышления в связи с его значимостью как метапредметного результата обучения должно стать одной из задач российского образования.

Эффективность обучения в высшей и средней школах мы рассматриваем также и с учетом современных исследований в нейробиологии и психологии. В частности, зарубежные ученые активно изучают проблемы взаимосвязи схем, новых знаний и памяти [8]. А. Н. Дахин в статье [9] описал решение математических задач в таких условиях, когда у обучаемых возникает несогласованность между постановкой проблемы и имеющимися знаниями. Автор обосновывает необходимость когнитивной активности обучающихся в указанной ситуации на примере рассмотрения механизмов (ассимиляции и аккомодации) построения схем, предложенных Ж. Пиаже. Ассимиляция предполагает четкое, без изменений, использование обучаемым построенной схемы, а аккомодация предполагает ее творческое преобразование при изменении ситуации, что позволяет учесть особенности новой алгебраической задачи.

В статье [10] авторами обсуждаются вопросы эффективного обучения математике с учетом последних достижений в нейробиологии. Реализованный учеными подход для развития математического мышления основан на использовании в образовательном процессе визуальных, числовых, вербальных и других форм представления информации для развития связей между соответствующими участками головного мозга человека.

В работах [11; 12] представлены модели технологий обучения решению математических задач, в том числе с использованием схематизированных изображений. По мнению авторов статьи [13], в настоящее время при обучении математике серьезное внимание уделяется значимости вопроса «как учить?», а не «почему?», кроме того, делается акцент на представлении учебного материала различными способами.

Авторы статьи [14] экспериментально доказали, что развитие пространственного мышления обучаемых улучшает способности решения математических задач в реальном мире, кроме того, в старшем школьном возрасте – способности решения визуальных и пространственных математических задач. В [15] описаны результаты экспериментальных исследований, связанных с анализом влияния различных видов представленных формулировок текстовых математических задач на успеваемость обучающихся. По мнению авторов, недостаточно изучено качественное влияние на обучаемых замены словесного предъявления фор-

мулировки задачи на более наглядное. В работе продемонстрированы примеры педагогических измерительных материалов, позволяющих достичь эффекта в обучении при изменении традиционного предъявления содержания математических задач.

И. К. Берникова [16] предложила использовать схемы в методике обучения математике как средства организации мышления обучающихся. В статье [17] представлены результаты педагогического эксперимента по изучению одной из фундаментальных способностей для развития математического мышления – перевода обучающимися вербальной математической информации в графическую.

Исследователи, раскрывая когнитивно-визуальный подход при обучении математике, сочетают иллюстративную и познавательную функции используемых наглядных образов, что способствует переходу от обучающей функции наглядности к развивающей. При этом многими педагогами понятие когнитивной графики используется как совокупность форм и способов визуального представления условий задания, что помогает обучаемым либо сразу найти решение задачи, либо задать направление для его нахождения.

Цель данной статьи – выявить особенности использования метода схематизации для развития мышления школьников и студентов при обучении математике. В рамках достижения указанной цели в работе решены следующие задачи:

– отражена важная роль схематизации в дидактике и методике обучения математике;

– выделены особенности использования метода схематизации при обучении студентов и школьников математике, при этом делается акцент на трех взаимосвязанных друг с другом составляющих обучения – понимании, запоминании и воспроизведении;

– предложена схематическая модель для обучения школьников и студентов решению математических задач;

– в качестве иллюстрации комплексного использования функций мнемонических схем приведен пример опорного конспекта для реализации решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

Результаты исследований. Способность найти необходимую информацию, осмысленно ее обработать, выделить главное, подчеркнуть взаимосвязи – важные умения современного специалиста. Необходимость формирования эффективных умений и навыков обучаемых на разных уровнях образования, использование при этом моделей, знаково-символических средств представления информации подтверждается анализом действующих федеральных государственных обра-

зовательных стандартов от уровня начального образования до высшего в контексте развития навыков схематизации для решения учебных и практических задач.

Поясним, как метод схематизации можно использовать в обучении, сделав акцент на трех взаимосвязанных процессах: понимании, запоминании и воспроизведении. Выделяя связующие звенья «средство», «материал» и «результат», проиллюстрируем связь рассматриваемых процессов со схематизированными изображениями:

– на этапе понимания схематизированные изображения являются результатом работы обучаемого с текстом;

– в процессе запоминания схематизированные изображения становятся средством запоминания (используются различные мнемотехники);

– на этапе воспроизведения схематизированные изображения применяются в качестве материала для воспроизведения.

Вместе с тем использование схематизированных изображений при обучении должно учитывать изучаемый материал, который необходимо усвоить. Педагоги предостерегают от применения метода схематизации при изучении новой учебной темы в тех случаях, когда на понимание схемы необходимо больше времени, чем на понимание текста.

В методике обучения математике схематизированные изображения как средства запоминания изучаемого материала используются в виде специальных мнемонических схем, в частности опорных конспектов, блок-схем, карточек-инструкций. Они не только являются средством запоминания, но и выполняют другие значимые функции (см. рис.1).

Рис. 1. Роль мнемонических схем при обучении математике

Под «знаниевыми фокусами» в данном случае авторы понимают основные формулы (уравнения, свойства, соотношения, признаки), важные для понимания и запоминания обучаемыми и являющиеся основой для проектирования схем. Примером комплексного использования

функций мнемонических схем являются опорные конспекты для решения системы линейных уравнений методом Гаусса (см. рис. 2).

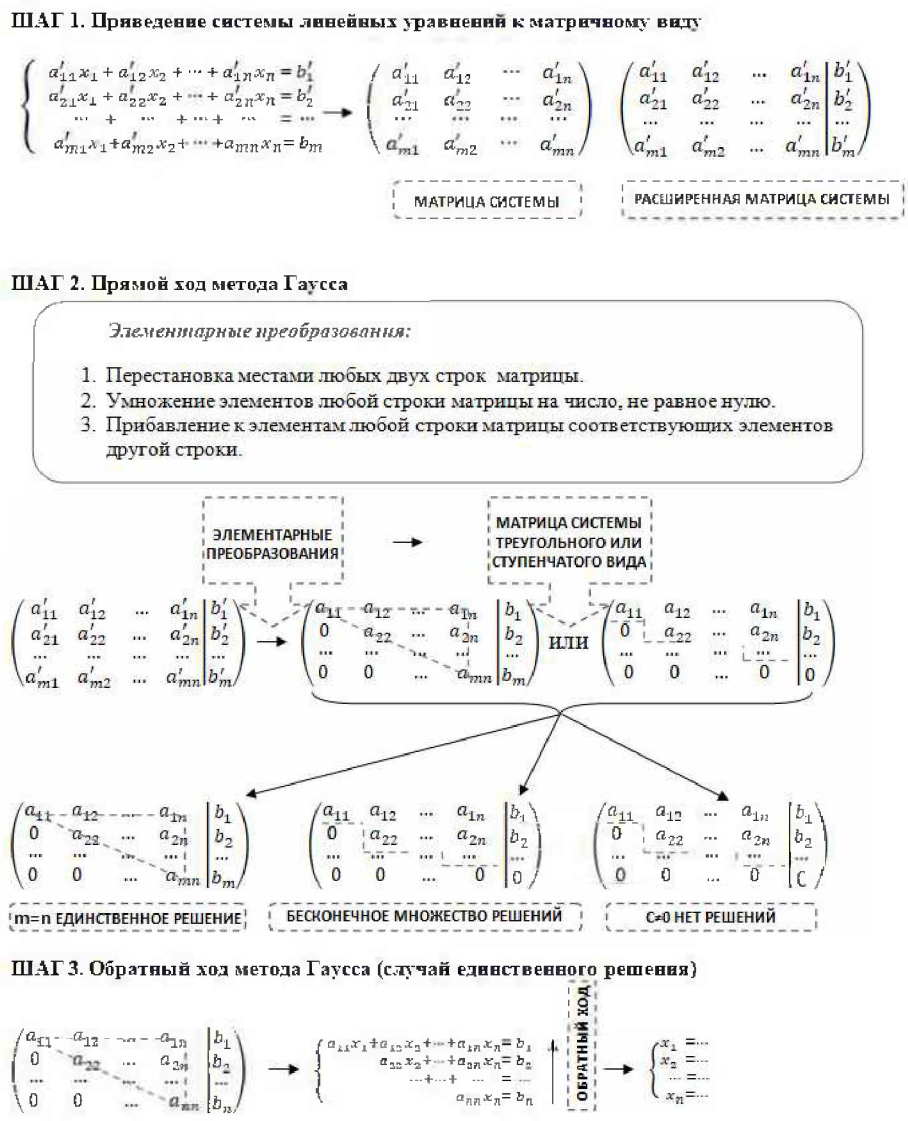


Рис. 2. Схема метода Гаусса для решения системы линейных уравнений

При организации преподавателем запоминания материала в процессе обучения математике все-таки следует учитывать, что основной целью является возможность воспроизведения и применения изученного в последующей деятельности обучаемых. Многими исследователями подтверждено, что сложно запомнить неподготовленный материал, а

структурированный и представленный в виде схемы запоминается легче, в частности, в качестве примера можно привести систему обучения с использованием опорных сигналов В. Ф. Шаталова. Для лучшего запоминания важно учитывать не только содержание, но и принцип структурирования и схематизации учебного материала. Преподаватели отмечают, что студенты, получающие первое высшее образование, часто не имеют навыков конспектирования и формированию такого умения приходится уделять некоторое время на учебных занятиях, обращая внимание обучаемых на важные элементы конспектов, включая схематизированные изображения разных видов, иные способы сокращения текстовой информации. Очевидно, что каждый способ чтения обеспечивает разный уровень понимания учебного материала, который задается и проверяется преподавателем. Метод исследующего чтения с использованием схематизированных изображений, разработанный О. С. Анисимовым [18], применяется для анализа сложных теоретических текстов. Указанный метод, использующий схематизированные изображения содержания отрывка текста, основан на логике последовательной конкретизации и позволяет схематизировать сложные теоретические тексты, анализировать основные понятия, применяемые его автором. В методике обучения математике описанный подход может быть использован как при составлении конспекта по рассматриваемой теме для понимания, запоминания и воспроизведения материала, так и при выполнении конкретных заданий. В дальнейшем покажем, как можно адаптировать описанный метод к процессу выполнения математических заданий.

Методика решения задач впервые в достаточно общем виде была разработана Д. Пойа [19]. Методические приемы, используемые при обучении решению математических задач, представлены в работах Ю. М. Колягина [20], А. Г. Мордковича [21], Г. И. Саранцева [22], В. А. Далингера [3], К. И. Нешкова [23] и других ученых. В частности, в исследовании [11] разработана модель обучающей технологии по решению текстовых алгебраических задач и подробно описаны этапы выполнения заданий.

Мы предлагаем «другим взглядом» проанализировать ситуацию, связанную с обучением школьников и студентов. Применяя метод исследующего чтения с использованием схематизированных изображений и опираясь на ключевые моменты этапов решения текстовых алгебраических задач [11], можно спроектировать гибкую схематическую модель для обучения школьников и студентов решению математических задач (рис. 3).

Кратко охарактеризуем этапы решения задач, представленные в схе-

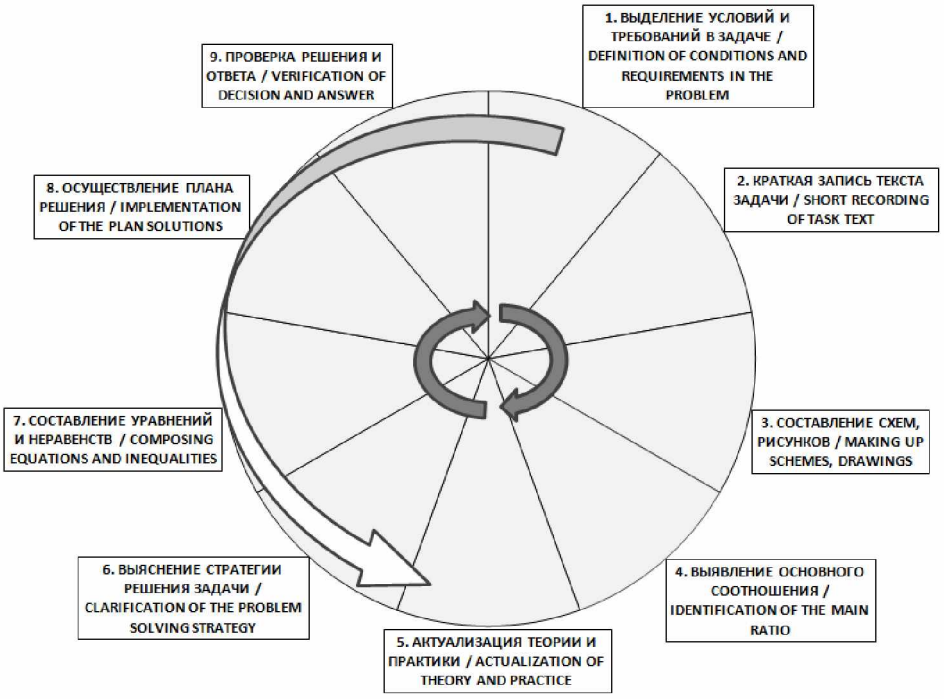


Рис. 3. Схематическая модель для обучения школьников и студентов решению математических задач

матической модели на рис. 3:

1. Первичный анализ текста задачи. Выделение условий (данных и отношений между ними) и требований в задаче.

2. Краткая запись текста задачи.

3. Составление рисунков и схем по данным задачи. Рисунки и схемы, в определенной мере, позволяют наглядно проиллюстрировать содержание задачи, поэтому целесообразно выполнить схему в виде простой модели, выявляющей скрытые зависимости между рассматриваемыми величинами.

4. Сопоставление условий и требований в задаче для дальнейшего выявления основного соотношения, непосредственно связанного с решением, как правило, в виде функциональной зависимости. При этом выясняется, достаточно ли информации для ответа на вопрос задачи, нет ли среди них противоречивых или лишних данных.

5. Актуализация теоретической и практической основы для выполнения рассматриваемого задания.

6. Выяснение стратегии решения задачи.

7. Аналитико-синтетический поиск метода решения задачи, завершающийся составлением уравнения или неравенства (уравнений или неравенств).

8. Осуществление плана решения задачи.

9. Выполнение проверки соответствия полученного решения (ответа) вопросу задачи. Запись ответа.

В предложенной модели допускается как исключение одного из этапов решения задачи, так и дополнение ее при необходимости новыми, в зависимости от условий и требований задания. Она удобна тем, что имеет циклический вид, вращая «колесо» схематической модели (рис. 3), обучаемый может переходить от одного этапа решения задачи к другому. При использовании иного способа выполнения задания или получения неправильного ответа «колесо» модели может быть «прокручено» еще раз. Применение указанного подхода для решения математической задачи предполагает наличие таких возможностей, как «взгляд назад», а также важный «взгляд вперед» [22], когда мыслительные действия направлены на развитие задачи. Такие методические приемы могут быть использованы педагогом для выделения главной идеи и ключевых моментов в процессе выполнения задания, выявления и закрепления использованных подходов, выяснения недостатков метода решения задачи и поиска другого, более рационального, а также для проведения полного анализа решения.

Заключение. Требования о формировании у обучающихся умений и навыков составления моделей, схем, рисунков выделены в ФГОС разных уровней образования. Следует отметить, что преподаватели-предметники с разных позиций рассматривают использование метода схематизации в учебном процессе. Построение схем, как операция работы с реальностью, в системе общего и среднего образования все-таки играет вспомогательную роль и обычно используется как мнемотехника для запоминания структурированного материала или как элемент конспектирования, а не как методика или технология развития мышления. Вместе с тем теория схематизации в настоящее время эффективно используется разработчиками при подготовке управленческих команд для разных отраслей экономики. В сфере профессиональной подготовки специалистов использование указанной теории будет эффективным при изучении математических и иных дисциплин или модулей программ высшего образования, в том числе направленных на исследовательскую и проектную деятельность обучающихся.

По мнению авторов, использование схематической модели (рис. 3) в

образовательном процессе будет способствовать не только усвоению алгоритма решения математических задач, адаптации и воспроизведению предложенной модели в необходимых случаях для выполнения различных практических заданий, но и оценке рациональности получаемых решений. Такой методический подход, в целом, будет способствовать более эффективному обучению школьников и студентов решению математических задач и закреплению знаний обучаемых [24; 25].

Метод схематизации, раскрытый в данной статье в контексте методики обучения математике, в своей профессиональной деятельности могут также успешно использовать преподаватели физики, химии, биологии в высшей и средней школах.

Список литературы

1. **Роберт И. В.** Дидактика эпохи цифровых информационных технологий // *Профессиональное образование. Столица. 2019. № 3. С. 16–26.*

2. **Крутецкий В. А.** Психология математических способностей школьников. М.: Издательство «Институт практической психологии», 1998. 416 с.

3. **Далингер В. А.** Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике : монография. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2006. 144 с.

4. **Попов Н. И.** Методика обучения тригонометрии на основе когнитивно-визуального подхода // *Сибирский педагогический журнал. 2008. № 11. С. 34–42.*

5. **Христочевская А. С., Христочевский С. А.** Когнитивизация – следующий этап информатизации образования // *Информатика и образование. 2018. № 9. С. 5–11.*

6. **Tchoshanov M. A.** Digital age didactics: from teaching to engineering of learning (Part 1) // *Информатика и образование. 2018. № 9. С. 53–62.*

7. **Хеннер Е. К.** Вычислительное мышление // *Образование и наука. 2016. № 2. С. 8–33.*

8. **Van Kesteren M. T. R., Rijpkema M., Ruiter D. J., Fernandez G.** Consolidation Differentially Modulates Schema Effects on Memory for Items and Associations // *PLOS ONE. 2013. Vol. 8. Issue 2.*

9. **Дахин А. Н.** Когнитивная гармония математики // *Народное образование. 2017. № 6–7. С. 81–88.*

10. **Anderson R. K., Boaler J., Dieckmann J.** Achieving Elusive Teacher Change through Challenging Myths about Learning: A Blended Approach // *Education Sciences. 2018. Vol. 8. Issue 3: 98.*

11. **Попов Н. И.** Теоретико-методологические основы обучения решению текстовых алгебраических задач // *Образование и наука. Известия Уральского отделения Российской академии образования. 2009. № 3 (60). С. 88–96.*

12. **Попов Н. И.** Об эффективности использования модели обучающей технологии по тригонометрии при обучении студентов-математиков // *Образование и наука. 2013. № 9. С. 138–153.*

13. **Bacabac M. A. A., Lomibao L. S.** 4S Learning Cycle on Students' Mathematics Comprehension // *American Journal of Educational Research. 2020. Vol. 8. Issue 3. Pp. 182–186.*

14. **Burte H., Gardony A. L., Hutton A., Taylor H. A.** Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training // *Cognitive Research: Principles and Implications. 2017. Vol. 2. Issue 1.*

15. **Hoogland K., Pepin B., Koning J., Bakker A., Gravemeijer K.** Word problems versus image–rich problems: an analysis of effects of task characteristics on students' performance on contextual mathematics problems // *Research in Mathematics Education. 2018. Vol. 20. Issue 1. Pp. 37–52.*

16. **Берникова И. К.** Схемы как средства организации мышления в процессе обучения математике // *Вестник ОмГУ. 2015. № 1 (75). С. 23–27.*

17. **Rahmawati D., Purwantoa, Subanji, Hidayanto E., Anwar R. B.** Process of Mathematical Representation Translation from Verbal into Graphic // *International Electronic Journal of Mathematics Education. 2017. Vol. 12, Issue 3. Pp. 367–381.*

18. **Злотников И. В.** Психологическое и психофизическое обеспечение процесса обучения студентов : методические рекомендации. Рига: Изд-во РПИ, 1988. 36 с.

19. **Пойа Д.** Как решать задачу / под ред. Ю. М. Гайдука. М., 1959. 208 с.

20. **Колягин Ю. М.** Задачи в обучении математике. М.: Просвещение, 1977. Ч. 1. 113 с.

21. **Мордкович А. Г.** Беседы с учителями математики : учеб.-метод. пособие. М.: Оникс, 2007. 334 с.

22. **Саранцев Г. И.** Упражнения в обучении математике. М., 2005. 254 с.

23. **Нешков К. И., Семушин А. Д.** Функции задач в обучении // *Математика в школе. 1971. № 3. С. 4–7.*

24. **Попов Н. И., Яковлева Е. В.** Актуальные проблемы обучения математике иностранных студентов в вузе // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2019. № 3. С. 144–153.*

25. **Марасанов А. Н.** Система задач по тригонометрии в обучении математике учащихся средних общеобразовательных учреждений: дис. ... канд. пед. наук. Саранск. 2012. 180 с.

Summary

Popov N. I., Yakovleva E. V. Use of the schematization method in teaching students and pupils in math

The publication objective is to highlight and generalize the features of using the schematization method in teaching mathematics as a means of developing thinking and mathematical abilities of learners. The research is based on analyzing scientific and methodical works of Russian and foreign scientists on both activity theory, pedagogy, and author's researches on applying the schematization method in teaching mathematics. The article proposes a schematic model to teach pupils and students solve mathematical problems. The methodological approaches developed in the research can be used in teaching mathematics at different levels of education. We believe that the method described in this paper can be successfully applied in studying natural sciences.

Keywords: a method of schematization; teaching mathematics; stages of mathematical problems solving; schematic model.

References

1. **Robert I. V.** Didaktika epokhi tsifrovykh informatsionnykh tekhnologiy (Didactics of the digital information technology era), *Professional'noye obrazovaniye. Stolitsa*, 2019, no 3, pp. 16–26.

2. **Krutetskiy V. A.** *Psikhologiya matematicheskikh sposobnostey shkol'nikov* (Psychology of mathematical abilities of schoolchildren), M.: Institut prakticheskoy psikhologii, 1998, 416 p.

3. **Dalinger V. A.** *Teoreticheskiye osnovy kognitivno–vizual'nogo podkhoda k obucheniyu matematike: monografiya* (Theoretical foundations of the cognitive–visual approach to teaching mathematics: monograph), Omsk: Izd–vo OmGPU, 2006, 144 p.

4. **Popov N. I.** Metodika obucheniya trigonometrii na osnove kognitivno-vizual'nogo podhoda (Methods of teaching trigonometry on the basis of cognitive–visual approach), *Sibirskiy pedagogicheskiy zhurnal*, 2008, no 11, pp. 34–42.

5. **Christochevskaya A. S., Christochevsky S. A.** Kognitivizatsiya – sleduyushchiy etap informatizatsii obrazovaniya (Cognitivization – the next stage of informatization of education), *Informatika i obrazovaniye*, 2018, no 9, pp. 5–11.

6. **Tchoshanov M. A.** Digital age didactics: from teaching to engineering of learning (Part 1), *Informatika i obrazovaniye*, 2018, no 9, pp. 53–62.

7. **Khenner E. K.** Vychislitel'noye myshleniye (Computational thinking), *Obrazovanie i nauka*, 2016, no 2, pp. 18–33.

8. **Van Kesteren M. T. R., Rijpkema M., Ruiter D. J., Fernandez G.** Consolidation Differentially Modulates Schema Effects on Memory for Items and Associations, PLOS ONE, 2013, Vol. 8, Issue 2.

9. **Dakhin A. N.** Kognitivnaya garmoniya matematiki (Cognitive harmony of mathematics), *Narodnoye obrazovaniye*, no 6–7, 2017, pp. 81–88.

10. **Anderson R. K., Boaler J., Dieckmann J.** Achieving Elusive Teacher Change through Challenging Myths about Learning: A Blended Approach, *Education Sciences*, 2018, Vol. 8, Issue 3: 98.

11. **Popov N. I.** Teoretiko—metodologicheskiye osnovy obucheniya resheniyu tekstovykh algebraicheskikh zadach (Theoretical and methodological foundations of teaching to solve text–based algebraic problems), *Obrazovaniye i nauka. Izvestiya Ural'skogo otdeleniya Rossiyskoy akademii obrazovaniya*, 2009; no 3(60), pp. 88–96.

12. **Popov N. I.** Ob effektivnosti ispol'zovaniya modeli obuchayushchey tekhnologii po trigonometrii pri obuchenii studentov–matematikov (Education of students–mathematicians: the effectiveness of implementation of the educational technology when teaching trigonometry), *Obrazovaniye i nauka*, 2013, no 9, pp. 138–153.

13. **Bacabac M. A. A., Lomibao L. S.** 4S Learning Cycle on Students' Mathematics Comprehension, *American Journal of Educational Research*, 2020, Vol. 8, Issue 3, pp. 182–186.

14. **Burte H., Gardony A. L., Hutton A., Taylor H. A.** Think3d!: Improving mathematics learning through embodied spatial training, *Cognitive Research: Principles and Implications*, 2017, Vol. 2, Issue 1.

15. **Hoogland K., Pepin B., Koning J., Bakker A., Gravemeijer K.** Word problems versus image–rich problems: an analysis of effects of task characteristics on students' performance on contextual mathematics problems, *Research in Mathematics Education*, 2018, Vol. 20, Issue 1, pp. 37–52.

16. **Bernikova I. K.** Skhemy kak sredstva organizatsii myshleniya v protsesse obucheniya matematike (Schemes as means of organizing thinking in the process of teaching mathematics), *Vestnik OmGU*, 2015, no 1(75), pp. 23–27.

17. **Rahmawati D., Purwantoa, Subanji, Hidayanto E., Anwar R. B.** Process of Mathematical Representation Translation from Verbal into Graphic, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2017, Vol. 12, Issue 3, pp. 367–381.

18. **Zlotnikov I. V.** *Psikhologicheskoye i psikhofizicheskoye obespecheniye protsessa obucheniya studentov: metodicheskiye rekomendatsii* (Psy-

chological and psychophysical support of the student learning process: guidelines), Riga: Izdatel'stvo RPI, 1988, 36 p.

19. **Poya D.** *Kak reshat' zadachu / Pod red. YU. M. Gayduka* (How to solve a problem / Ed. Yu. M. Gaiduk), M., 1959, 208 p.

20. **Kolyagin U. M.** *Zadachi v obuchenii matematike* (Problems in teaching mathematics), M: Prosveschenie, 1977, Ch. 1,113 p.

21. **Mordkovich A. G.** *Besedy s uchitelyami matematiki: ucheb.–metod. Posobiye* (Conversations with teachers of mathematics: textbook-method. allowance), M.: Oniks, 2007, 334 p.

22. **Sarantsev G. I.** *Uprazhneniya v obuchenii matematike* (Exercises in teaching mathematics), M., 2005, 254 p.

23. **Neshkov K. I., Semushin A. D.** Funkcii zadach v obuchenii (Task functions in training), *Matematika v shkole*, 1971. no 3, pp. 4–7.

24. **Popov N. I., Yakovleva E. V.** Aktual'nyye problemy obucheniya matematike inostrannykh studentov v vuze (Topical issues of teaching mathematics to international students at a university), *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta*, Series: Pedagogika, 2019, no 3, pp. 144–153.

25. **Marasanov A.N.** *Sistema zadach po trigonometrii v obuchenii matematike uchaschihsya srednih obscheobrazovatelnih uchrejdenii* (System of problems in trigonometry in teaching mathematics to students of secondary educational institutions): diss. ...kand. ped. nauk., Saransk, 2012, 180 p.

Для цитирования: Попов Н. И., Яковлева Е. В. Использование метода схематизации при обучении студентов и школьников математике // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4 (37). С. 74–87. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_74.*

For citation: Popov N.I., Yakovleva E.V. Use of the schematization method in teaching students and pupils in math, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 4 (37), pp. 74–87. DOI: 10.34130/1992-2752_2020_4_74.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 05.12.2020*

ПЕРСОНАЛИИ

Бабенко Марина Владимировна – старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет, e-mail: usr11391@vyatsu.ru

Габова Мария Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Ухтинский государственный технический университет, e-mail: amuzhikova@mail.ru

Ефимов Дмитрий Борисович – к. ф.-м. н., научный сотрудник, Физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН, e-mail: dmefim@mail.ru

Мужикова Александра Владимировна – к. т. н., доцент кафедры высшей математики, Ухтинский государственный технический университет, e-mail: amuzhikova@mail.ru

Одинец Владимир Петрович – д. ф.-м. н., профессор, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: W.P.Odyniec@mail.ru

Певный Александр Борисович – д. ф.-м. н., профессор, кафедра прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: pevnyi@syktsu.ru

Попов Николай Иванович – д. п. н., к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой физико-математического и информационного образования, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Юркина Марина Николаевна – старший преподаватель, кафедра прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: yurkinamn@gmail.com

Яковлева Елена Васильевна – старший преподаватель кафедры физико-математического и информационного образования, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: akovleva@gmail.com

AUTHORS

Babenko Marina – Senior Lecturer of the Department of applied mathematics and computer science, Vyatka State University, e-mail: usr11391@vyatsu.ru

Gabova Maria – Senior Lecturer of the Department of the Department of higher mathematics, Ukhta state technical University, e-mail: amuzhikova@mail.ru

Efimov Dmitry – Ph. D., research associate, Institute of Physics and mathematics of the Komi national research center of the Ural branch of the Russian Academy of Sciences, e-mail: dmefim@mail.ru

Muzhikova Alexandra – Ph. D., associate Professor of the Department of the Department of higher mathematics, Ukhta state technical University, e-mail: amuzhikova@mail.ru

Odyniec Vladimir – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Syktyvkar state University named after Pitirim Sorokin, e-mail: W.P.Odyniec@mail.ru

Pevny Alexander – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, e-mail: pevnyi@syktsu.ru

Popov Nikolay – Ph. D., associate Professor, head of the Department of physics, mathematics and information education, Syktyvkar state University named after Pitirim Sorokin, e-mail: popovnikolay@yandex.ru

Yurkina Marina – Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: yurkinamn@gmail.com

Yakovleva Elena – senior lecturer, Department of physics, mathematics and information education, Syktyvkar state University named after Pitirim Sorokin, e-mail: akovleva@gmail.com

Contents

Mathematics

Babenko M. V. *On the polynomial semiring over a Bezout semiring* . 5

Efimov D. B. *A method for computing the hafnian* 16

Methodical materials

Gabova M. N., Muzhikova A. V. *Context approach in the teaching of mathematics future engineers* 26

Odyniec W. P. *The Fate of two mathematicians: Perelman and Perelman Jr.* 51

Pevnyi A. B., Yurkina M. N. *Sieve of Eratosphenes complexity and distribution of primes* 66

Popov N. I., Yakovleva E. V. *Use of the schematization method in teaching students and pupils in math* 73

Authors **88**

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 4 (37) 2020

Гл. редактор О.А. Сотникова
Отв. редактор А.В. Ермоленко

Редактор Е.М. Насирова
Компьютерный макет М.Н. Юркина
Корректор Л.Н. Руденко

Подписано в печать 16.12.2020. Дата выхода в свет 25.12.2020.
Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.
Гарнитура Computer Modern. Печать ризографическая. Усл. печ. л. 10,4.
Тираж 500 экз. Заказ № 174.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Коми республиканская типография»
167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ул. Савина, 81
Тел. 8(8212)-28-46-60
E-mail: ceo@komitip.ru
Сайт: komitip.ru