НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (36). 2020

УДК 539.3 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_3_87**

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ПЛАСТИН С РАЗНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

А. В. Ермоленко, С. В. Ладанова

С использованием классической теории изгиба плоских пластин приводится аналитическое решение для двух пластин. При этом одна пластина закреплена шарнирно, вторая имеет жесткое закрепление. Показано, что при использовании уравнения Софи Жермен – Лагранжа контактные реакции содержат сосредоточенные силы.

Ключевые слова: пластина, контактная задача, уравнение Софи Жермен – Лагранжа, аналитическое решение.

Введение

С контактными задачами со свободной границей исследователям приходится встречаться при построении математических моделей в строительстве, при конструировании современных машин и механизмов и т. д. Традиционно такие задачи являются наиболее сложными в механике деформируемого твердого тела и в теории пластин и оболочек. Основной трудностью при решении контактных задач является их существенная нелинейность – попытка линеаризации приводит к разрушению математической модели. Однако с учетом важности таких задач востребованы методы решения для правильной оценки ресурса и надежности конструкций.

В рамках научной школы пластин и оболочек Новожилова – Черныха – Михайловского [1] в Сыктывкарском университете решен ряд контактных задач со свободной границей как аналитически, так и при помощи предложенного в работе [2] метода обобщенной реакции, см., например, [3–5]. В данной статье решается на основе подхода работы [4] одна контактная задача для двух цилиндрически изгибаемых пластин.

1. Постановка задачи

Две цилиндрически изгибаемые пластины толщины h и ширины $2l$ расположены параллельно друг другу на расстоянии Δ. На верхнюю шарнирно закрепленную пластину действует нормальная нагрузка

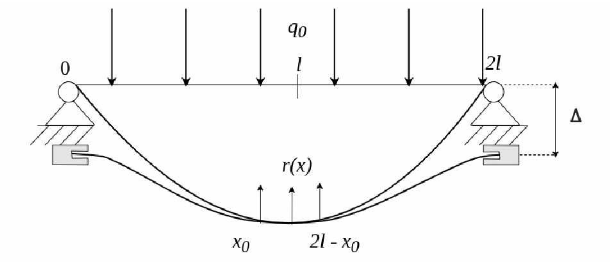

Рис. 1. Контактное взаимодействие двух цилиндрически изгибаемых пластин

$q_n^+ \equiv q_0 = const$. Под действием нагрузки верхняя пластина изгибается и давит на нижнюю жестко закрепленную пластину, образуя область контакта $[x_0, 2l - x_0]$. Требуется определить прогибы пластин, зону контакта и возникающие контактные реакции (см. рис. 1).

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением Софи Жермен – Лагранжа [6], которое в случае цилиндрического изгиба принимает следующий вид:

$$Dw^{IV} = q_n. \tag{1}$$

Здесь w – прогиб пластины, $q_n = q_n^+ - q_n^-$, q_n^+, q_n^- – действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности пластины нагрузки, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Учитывая симметричность задачи, будем рассматривать пластины только на отрезке $[0, l]$. При этом условия симметрии примем в виде ($i = 1, 2$ – номер пластины)

$$w_i{}'(l) = 0, w_i{}'''(l) = 0. \tag{2}$$

При этом верхняя (с индексом «1») пластина при $x = 0$ удовлетворяет условиям шарнирного закрепления

$$w_1(0) = 0, w_1''(0) = 0, \tag{3}$$

а нижняя (с индексом «2») – условиям жесткого закрепления

$$w_2(0) = 0, w_2'(0) = 0. \tag{4}$$

2. Аналитическое решение

Функции Грина для краевых задач {(1), (2), (3)} и {(1), (2), (4)} имеют соответственно следующий вид:

$$G_1(x, \xi) = \frac{1}{6}(x - \xi)^3 H(x - \xi) + \frac{1}{2}(2l\xi - \xi^2)x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$G_2(x,\xi)=\frac{1}{6}(x-\xi)^3H(x-\xi)+\frac{1}{4l}(2l\xi-\xi^2)x^2-\frac{1}{6}x^3. \tag{5}$$

Здесь H – функция Хевисайда.

Учитывая, что на верхнюю пластину действуют нагрузки $q^+_{1n}(x)\equiv q_0$ (активная) и $q^-_{1n}(x)\equiv r(x)$ (реактивная), а на нижнюю – только нагрузка $q^+_{2n}(x)\equiv r(x)$, и вводя обозначение $w(x)=w_1(x)-w_2(x)$, получаем, что в соответствии с принципом суперпозиции решений функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $q_n=q_0-2r(x)$.

Учитывая также, что

$$w(x)=w_1(x)-w_2(x)=\Delta, x\in(x_0,l), \tag{6}$$

находим при подстановке $w(x)$ в (1), что

$$r(x)=\frac{1}{2}q_0, x\in(x_0,l).$$

Принимая во внимание, что при $x\in(0,x_0)$ контакта нет (и следовательно, $r(x)$=0), а при $x=x_0$, возможно, сосредоточенная сила $\frac{1}{2}R$, общее выражение для контактной реакции запишем так:

$$r(x)=\frac{1}{2}q_0H(x-x_0)+\frac{1}{2}R\delta(x-x_0), \tag{7}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака.

Используя функцию (7), активные нагрузки на верхние лицевые поверхности пластин примут вид

$$q_{n1}=q_0-\frac{1}{2}q_0H(x-x_0)-\frac{1}{2}R\delta(x-x_0),$$

$$q_{n2}=\frac{1}{2}q_0H(x-x_0)+\frac{1}{2}R\delta(x-x_0). \tag{8}$$

Используя функции Грина (5), решение краевых задач $\{(1), (2), (3)\}$ $\{(1), (2), (4)\}$ с правой частью в виде (8) принимает вид

$$w_i=\frac{1}{D}\int_0^l G_i(x,\xi)q_{ni}d\xi. \tag{9}$$

Используя решения (9), выражение для функции $w(x)$ при $x\in(x_0,l)$ записывается так:

$$w(x)=w_1(x)-w_2(x)=\frac{q_0}{24lD}(-3lx_0^2x^2-2l^3x^2-x_0^3x^2+6l^2x_0^2x+4l^4x+$$

$$+2lx_0^3x - lx_0^4) + \frac{R}{24lD}(6lx_0x^2 + 3x_0^2x^2 - 12l^2x_0x - 6lx_0^2x + 4lx_0^3). \quad (10)$$

Учитывая, что выражения (6) и (10) должны совпадать, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x, в результате получим следующие уравнения:

$$6lRx_0 + 3Rx_0^2 - 3q_0lx_0^2 - 2l^3q_0 - q_0x_0^3 = 0.$$

$$4Rx_0^3 - q_0x_0^4 = 24D\Delta,$$

из которых получаем следующее выражение для сосредоточенной силы:

$$R = \frac{2q_0l^3}{3x_0(2l + x_0)} + \frac{q_0lx_0}{2l + x_0} + \frac{q_0x_0^2}{6l + 3x_0}.$$

Значение x_0 определяем из уравнения

$$q_0x_0^5 + 6q_0lx_0^4 + 8q_0l^3x_0^2 - 72D\Delta x_0 - 144D\Delta l = 0,$$

корень которого ищется численно.

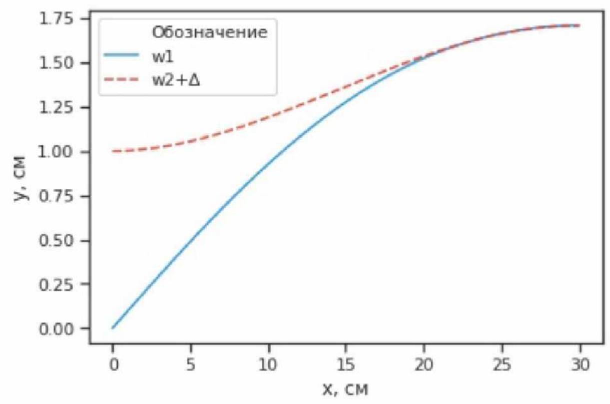

Рис. 2. Прогибы контактирующих пластин

На рис. 2 приведен пример расчета двух пластин при следующих физических и геометрических параметрах:

$$l = 30 \text{ см}, \ h = 1 \text{ см}, \ E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2, \ \nu = 0,3 \ q_0 = 5 \text{ кГ/см}^2.$$

Полученные графики соответствуют граничным условиям, при этом $x_0 \approx 25,42$ см, $R \approx 98,69$ кГ/см.

Таким образом, полученное аналитическое решение подтвердило, что при использовании классической теории на границе зоны контакта возникают сосредоточенные реакции [7].

Список литературы

1. **Михайловский Е. И.** Школа механики оболочек академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 2005. 172 с.
2. **Михайловский Е. И., Тарасов В. Н.** О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // *РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.*
3. **Ермоленко А. В., Михайловский Е. И.** Граничные условия для подкрепленного края в теории изгиба плоских пластин Кармана // *Изв. АН. МТТ. 1998. 3. С.73–85.*
4. **Михайловский Е. И., Бадокин К. В., Ермоленко А. В.** Теория изгиба плоских пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Вып. 3. 1999. С. 181–202.*
5. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В., Миронов В. В., Тулубенская Е. В.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2009. 141 с.
6. **Михайловский Е. И., Торопов А. В.** Математические модели теории упругости. Сыктывкар: Изд-во Сыкт. ун-та, 1995. 251 с.
7. **Григолюк Э. И., Толкачев В. М.** Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.

Summary

Yermolenko A. V., Ladanova S. V. Contact problem for two plates with different fixing

An analytical solution for two plates is given using the classical theory of bending of flat plates. In this case, one plate is hinged, the second has a rigid fastening. It is shown that when using the Sophie Germain–Lagrange equation, contact reactions contain concentrated forces.
Keywords: plate, contact problem, Sophie Germain–Lagrange equation, analytical solution.

References

1. **Mikhailovskii E. I.** *Shkola mekhaniki obolochek akademika Novozhilova* (School of Shell Mechanics Academician Novozhilov), Syktyvkar: Izd-vo Sykt. un-ta, 2005, 172 p.

2. **Mikhailovskii E. I., Tarasov V. N.** O sxodimosti metoda obobshhennoj reakcii v kontaktny'x zadachax so svobodnoj granicej (On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary), *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, v. 57, № 1, pp. 128–136.
3. **Yermolenko A. V., Mikhailovskii E. I.** Granichnye uslovija dlja podkreplennogo kraja v teorii izgiba ploskih plastin Karmana (Boundary conditions for the reinforced edge in the Karman theory of bending of flat plates), *MTT*, 1998, № 3, pp. 73–85.
4. **Mikhailovskii E. I., Badokin K. V., Yermolenko A. V.** Teorija izgiba plastin tipa Karmana bez gipotez Kirhgofa (The theory of bending of Karman-type plates without the Kirchhoff's hypotheses), *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 1999, 3, pp. 181–202.
5. **Mikhailovskii E. I., Yermolenko A. V., Mironov V. V., Tulubenskaya Ye. V.** *Utochnennyye nelineynyye uravneniya v neklassicheskikh zadachakh mekhaniki obolochek : Uchebnoye posobiye* (Refined nonlinear equations in nonclassical problems of shell mechanics: Textbook), Syktyvkar: Izd-vo Syktyvkarskogo un-ta, 2009, 141 p.
6. **Mikhailovskii E. I., Toropov A. V.** *Matematicheskiye modeli teorii uprugosti* (Mathematical models of the theory of elasticity), Syktyvkar: Sykt Publishing House. University, 1995, 251 p.
7. **Grigolyuk E. I., Tolkachev V. M.** *Kontaktnyye zadachi teorii plastin i obolochek* (Contact problems in the theory of plates and shells), M.: Mashinostroyeniye, 1980, 411 p.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Ладанова С. В. Контактная задача для двух пластин с разным закреплением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (36). С. 87–92.*

For citation: Yermolenko A. V., Ladanova S. V. Contact problem for two plates with different fixing, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 3 (36), pp. 87–92.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 27.08.2020*