МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (36). 2020

УДК 517.162 **DOI: 10.34130/1992-2752_2020_3_04**

$(1/2;1)$-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ. Ч. II

С. И. Калинин, Н. В. Леонтьева

В настоящей статье изучаются свойства $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых функций. В частности, показывается, что такие функции внутри промежутка $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости всегда являются непрерывными. Вводятся аналоги классических неравенств Эрмита – Адамара для выпуклых и вогнутых на отрезке функций. Кроме того, для рассматриваемого класса функций доказывается неравенство Иенсена и его аналог.
Ключевые слова: выпуклые функции, вогнутые функции, неравенства Эрмита – Адамара, неравенство Иенсена.

Напомним сначала некоторые определения из [1].

Пусть $l \subseteq [0;+\infty)$ — произвольный промежуток и $f: l \to \mathbf{R}$ функция, заданная на этом промежутке.

Функцию f назовем $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*выпуклой* на l, если для любого отрезка $[a;b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b). \tag{1}$$

Если при этом для всех $\lambda \in (0;1)$ вместо (1) выполняется неравенство

$$f\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right) < \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b), \tag{2}$$

то функцию f будем называть *строго* $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*выпуклой* на рассматриваемом промежутке l.

Ясно, что строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая функция является $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой.

Аналогично определяются $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*вогнутая* и *строго* $\left(\frac{1}{2};1\right)$-*вогнутая* функции — для этого в неравенствах (1)—(2) знак $\leqslant$ ($<$) следует поменять на знак $\geqslant$ ($>$) соответственно.

1. Некоторые простейшие свойства $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых функций

Рассмотрим ряд характерных свойств $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых и $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутых функций.

1.1^0. Сумма $f+g$ $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых (-вогнутых) на промежутке l функций f и g есть $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая (-вогнутая) на данном промежутке функция.

1.2^0. Если в условиях свойства 1.1^0 хотя бы одна из функций f и g является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой (-вогнутой), то и их сумма $f+g$ есть строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая (-вогнутая) на рассматриваемом промежутке функция.

1.3^0. Если функция f — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая (-вогнутая) на l, то функция $-f$ — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая (-выпуклая) на l.

Сформулированные свойства легко выводятся из определений соответствующих понятий.

Рассмотрим свойство, связанное с произведением $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых на промежутке функций.

1.4^0. Если f и g — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклые, неотрицательные и обе неубывающие или обе невозрастающие на промежутке l функции, то их произведение fg есть также $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на данном промежутке функция.

Доказательство. Для функций f и g будут выполняться неравенства

$$f\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b),$$
$$g\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right)\leqslant\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b),\tag{3}$$
$$[a;b]\subset l,\lambda\in[0;1].$$

Покажем, что тогда будет выполняться и неравенство

$$(fg)\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right)\leqslant\lambda(fg)(a)+(1-\lambda)(fg)(b).\tag{4}$$

В силу неотрицательности функций f и g неравенства (3) можно почленно перемножить, тогда будем иметь:

$$(fg)\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\right)\left(\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)\right)=$$
$$=\lambda^2f(a)g(a)+(1-\lambda)^2f(b)g(b)+\lambda(1-\lambda)\left[f(b)g(a)+f(a)g(b)\right]=$$
$$=\lambda f(a)g(a)+(1-\lambda)f(b)g(b)+$$
$$+\lambda(1-\lambda)\left[f(b)g(a)+f(a)g(b)-f(a)g(a)-f(b)g(b)\right]=$$
$$=\lambda f(a)g(a)+(1-\lambda)f(b)g(b)-\lambda(1-\lambda)\left[(f(b)-f(a))(g(b)-g(a))\right].$$

Так как выражение, заключенное в последние квадратные скобки, неотрицательно в силу неубывания или невозрастания рассматриваемых функций, то отсюда имеем (4). Свойство 1.4^0 установлено.

Аналогично устанавливается следующее свойство.

1.5^0. Если f и g — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутые и неотрицательные на промежутке l функции, при этом одна из них является неубывающей, а другая невозрастающей на l, то их произведение fg есть также $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая на данном промежутке функция.

Формулировки свойств 1.4^0—1.5^0 можно уточнить следующим образом.

1.6^0. Если в условиях свойства 1.4^0 функции f и g — строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклые, то и их произведение fg будет строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой функцией. Если в условиях свойства 1.5^0 функции f и g строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-

вогнутые, то и их произведение fg есть строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая функция.

1.7^0. Если в условиях свойства 1.4^0 функции f и g — строго монотонные, то есть обе возрастающие или обе убывающие на промежутке l, то их произведение fg есть строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на данном промежутке функция. Если в условиях свойства 1.5^0 одна из функций f и g возрастающая, а другая убывающая, то их произведение fg есть строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая на данном промежутке функция.

Приведём пример. Функция $y=\sqrt[3]{x^2}e^x$ представляет собой произведение функций $\sqrt[3]{x^2}$ и e^x. На промежутке $(0;+\infty)$ каждая из указанных функций является положительной и возрастающей. Кроме того, в [1] обоснована их строгая $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклость на данном промежутке. По свойству 1.6^0 функция y является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой функцией.

Рассмотрим свойства, связанные с композицией двух функций.

1.8^0. Если функция $f(x)$ — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на промежутке $l\subseteq[0;+\infty)$ числовой прямой Ox, а функция $g(y)$ — выпуклая и неубывающая на промежутке L, $f(l)\subset L$, числовой прямой Oy, то композиция $g\circ f$ $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпукла на l.

Справедливость свойства следует из цепочки неравенств:

$$(g\circ f)\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right)=g\left(f\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant g\left(\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\right)\leqslant\lambda g\left(f(a)\right)+(1-\lambda)g\left(f(b)\right)=$$
$$=\lambda(g\circ f)(a)+(1-\lambda)(g\circ f)(b),[a;b]\subset l,\lambda\in[0;1].$$

Первое неравенство данной цепочки записывается на основании $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f на промежутке l и неубывания функции g на промежутке L, а второе объясняется выпуклостью функции g на промежутке L.

Точно так же доказывается свойство

1.9^0. Если функция $f(x)$ — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая на промежутке $l\subseteq[0;+\infty)$ числовой прямой Ox, а функция $g(y)$ — вогнутая и неубывающая на промежутке L, $f(l) \subset L$, числовой прямой Oy, то композиция $g \circ f$ $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнута на l.

Свойство 1.8^0 иллюстрирует функция $z = e^{\sqrt{x^5}}$, представляющая собой композицию $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на промежутке $[0;+\infty)$ функции $y = \sqrt{x^5}$ и выпуклой неубывающей функции $z = e^y$.

Свойства $1.8^0 - 1.9^0$ можно уточнить, если принять во внимание тот факт, что в формулировках данных свойств функция f может быть строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой (-вогнутой), а функция g – строго монотонной. Соответствующие утверждения читатель может сформулировать и доказать самостоятельно.

2. О непрерывности $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на промежутке функции во внутренних точках данного промежутка

Сформулируем сначала вспомогательную лемму, являющуюся своеобразным аналогом леммы о трёх хордах (см., напр., [2, с. 165]) для выпуклых функций.

Лемма 2.1. Пусть функция f $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпукла на промежутке l, $x_1, x_2, x_3 \in l, x_1 < x_2 < x_3$. Тогда справедливо двойное неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}}. \qquad (5)$$

Доказательство. Положим $\lambda = \dfrac{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}}$, очевидно $\lambda \in (0;1)$ и $x_2 = \left(\lambda\sqrt{x_1} + (1-\lambda)\sqrt{x_3}\right)^2$. В силу $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f на l имеем оценку $f(x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$, из которой следует

$$f(x_2) - f(x_3) \leqslant \lambda \left(f(x_1) - f(x_3)\right) = \frac{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}} \left(f(x_1) - f(x_3)\right).$$

Отсюда заключаем о справедливости правого неравенства в (5).

Докажем справедливость левого неравенства в (5). Из полученной выше оценки имеем

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant (1-\lambda)\left(f(x_3) - f(x_1)\right) = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_3} - \sqrt{x_1}} \left(f(x_3) - f(x_1)\right),$$

откуда следует требуемое. Неравенство (5) полностью доказано.

Замечание 2.1. Если в условиях леммы 2.1 функция f является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на промежутке l, то в (5) неравенства будут строгими. Кроме того, аналогичное утверждение можно сформулировать в отношении $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой на промежутке l функции. Для такой функции соответствующие неравенства будут отличаться от неравенств в (5) противоположными знаками.

Установим следующую важную теорему.

Теорема 2.1. Пусть функция f $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпукла на промежутке l. Тогда она непрерывна в каждой внутренней точке данного промежутка.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка промежутка l. Введём в рассмотрение функцию $F(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$, $x \in l \setminus \{x_0\}$. Покажем, что данная функция является неубывающей на множестве $l \setminus \{x_0\}$, то есть $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из $l \setminus \{x_0\}$, $x_1 < x_2$.

Действительно, если $x_1 < x_2 < x_0$, то в силу правого неравенства в (5)

$$F(x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{f(x_0) - f(x_2)}{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_2}} = F(x_2).$$

Если же $x_1 < x_0 < x_2$, то в силу соотношения для крайних членов двойного неравенства (5)

$$F(x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{\sqrt{x_0} - \sqrt{x_1}} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_0}} = F(x_2).$$

Если, наконец, $x_0 < x_1 < x_2$, то из левого неравенства в (5) следует

$$F(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_0}} = F(x_2).$$

Неубывание функции $F(x)$ на множестве $l \setminus \{x_0\}$ доказано.

Значит, для произвольных ξ и η из l, удовлетворяющих условию $\xi < x_0 < \eta$, будет справедливо соотношение $F(\xi) \leqslant F(\eta)$. Последнее говорит о том, что функция F ограничена сверху на множестве $(-\infty; x_0) \cap l$ и ограничена снизу на множестве $(x_0; +\infty) \cap l$. Отсюда по теореме о существовании конечного предела монотонной функции заключаем, что существуют конечные односторонние пределы $F(x_0 - 0)$ и $F(x_0 + 0)$.

Покажем сейчас, что функция f в точке x_0 обладает конечными односторонними производными:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \\ = F(x_0-0)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \\ = F(x_0+0)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

Существование конечных односторонних производных $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ обеспечивает непрерывность функции f в точке x_0 и слева, и справа. Следовательно, она непрерывна в данной точке. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Утверждение теоремы 2.1 останется в силе, если в ней условие $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f заменить условием $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутости.

Замечание 2.3. Если функция f является $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой или $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой на отрезке, то на концах этого отрезка она может иметь разрыв. Например, функция

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ \sqrt{x}, & x\in(1;4) \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпукла на отрезке $[1;4]$ и в точках $x=1$, $x=4$ имеет разрыв первого рода.

Аналогично, если функция $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпукла или $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнута на промежутке, которому один конец принадлежит, а другой нет, то в принадлежащем промежутку конце она может иметь разрыв. Последнее иллюстрирует, например, функция

$$h(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases},$$

которая, заметим, является строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на промежутке $[1;+\infty)$. Она имеет разрыв первого рода в точке $x=1$.

3. Об интегрируемости $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой на отрезке функции

Напомним читателю геометрическую характеризацию $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости, рассмотренную в [1]: если $f(x)$ — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на промежутке $l\subseteq[0;+\infty)$ функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого $x\in(a;b)$ выполняется условие: точка $(x;f(x))$ графика функции f будет находиться не выше точки $\frac{1}{2}$-параболической дуги, соединяющей точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$, с той же абсциссой x. Если же $f(x)$ — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-строго выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого $x\in(a;b)$ выполняется условие: точка $(x;f(x))$ графика функции f лежит строго ниже точки $\frac{1}{2}$-параболической дуги, соединяющей точки $(a;f(a))$, $(b;f(b))$, с той же абсциссой x. Аналогично характеризуется геометрически $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутость и строгая $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутость функции на промежутке.

Приведенную выше геометрическую характеристику $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции можно дополнить. Справедливо

Предложение 3.1. Если функция f — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая (строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая) на промежутке l, то для любого отрезка $[a;b]\subset l$ точки графика сужения $f|_{l\setminus[a;b]}$ данной функции на множество $l\setminus[a;b]$ лежат не ниже (выше) соответствующих точек $\frac{1}{2}$-параболической кривой γ_{AB}, проходящей через точки $A\,(a;f(a))$, $B\,(b;f(b))$ графика f (рис. 1).

Доказательство. Действительно, пусть $x\in l\setminus[a;b]$ и $x<a$. Тогда в

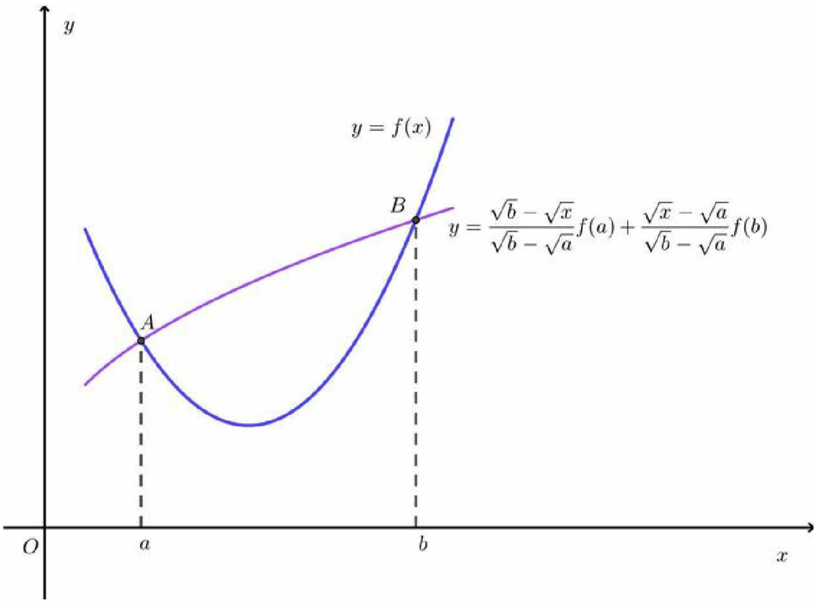

Рис. 1. Иллюстрация предложения 3.1

силу $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости (строгой $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости) функции f на l

$$f(a) = f\left(\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}\sqrt{b}\right)^2\right) \leqslant (<)$$

$$\leqslant (<)\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}f(x) + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{x}}f(b),$$

откуда следует, что $f(x) \geqslant (>)\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}f(a) + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}f(b)$. Поскольку кривая γ_{AB} задается уравнением $y = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}f(a) + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}f(b)$, то в рассматриваемой ситуации требуемое показано.

Случай $x \in l \setminus [a;b]$ и $x > b$ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Совершенно аналогично доказывается

Предложение 3.2. Если функция f — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая (строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая) на промежутке l, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ точки графика сужения $f|_{l\setminus[a;b]}$ данной функции на множество $l\setminus[a;b]$ лежат не выше (ниже) соответствующих точек $\dfrac{1}{2}$-параболической кривой γ_{AB}, проходящей через точки $A\,(a;f(a))$, $B\,(b;f(b))$ графика f.

Докажем сейчас следующую важную теорему.

Теорема 3.1. Пусть f — $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-выпуклая или $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-вогнутая на отрезке $[a;b]$ числовой прямой функция. Тогда она интегрируема (по Риману) на данном отрезке.

Доказательство. Пусть для определённости f — $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-выпуклая на рассматриваемом отрезке функция. В силу замечания 2.3 к теореме 2.1 она может быть разрывной лишь на концах отрезка $[a;b]$.

Если функция f в точках a и b непрерывна, то она, очевидно, интегрируема. Если же она имеет хотя бы один разрыв, то для интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$ достаточно установить её ограниченность на нём.

Ограниченность функции f сверху следует из того, что её график лежит не выше $\dfrac{1}{2}$-параболической кривой γ_{AB}, стягивающей концы графика. Установим ограниченность функции на отрезке снизу.

Для этого введём в рассмотрение отрезок $[a_1;b_1]$, где $a<a_1<b_1<b$. На данном отрезке функция f ограничена снизу, ибо непрерывна на нём. Пусть A_1,B_1 — концы графика сужения f на $[a_1;b_1]$. По предложению 3.1 точки графика сужения f на множество $[a;a_1)\cup(b_1;b]$ будут лежать не ниже точек $\dfrac{1}{2}$-параболической кривой $\gamma_{A_1B_1}$, соединяющей точки A_1,B_1. Это влечёт ограниченность снизу функции f на множестве $[a;a_1)\cup(b_1;b]$. Таким образом, функция f ограничена снизу на всём отрезке $[a;b]$. Интегрируемость f доказана.

В случае, когда f — $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-вогнутая на отрезке $[a;b]$ функция, требуемое будет следовать из интегрируемости функции $-f$. Теорема полностью доказана.

4. Неравенства Эрмита – Адамара

В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые свойства $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-выпуклых (-вогнутых) на отрезке функций, связанных с оценками соответствующих интегралов, порождаемых данными функциями.

4.1^0. Для $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-выпуклой на отрезке $[a;b]\subset[0;+\infty)$ функции f

справедливо двойное неравенство

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (6)$$

Доказательство. Подчеркнём, во-первых, что сформулированное свойство корректно, поскольку по теореме 3.1 фигурирующий в (6) интеграл Римана функции f существует.

Докажем сначала левое неравенство в (6), для чего положим

$$\sqrt{x} = t\sqrt{a} + (1-t)\sqrt{b}, \sqrt{y} = t\sqrt{b} + (1-t)\sqrt{a},$$

где $t \in [0;1]$. Очевидно, $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. В силу $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f на отрезке $[a;b]$ можем записать:

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) = f\left(\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} =$$

$$= \frac{f\left(\left(t\sqrt{a}+(1-t)\sqrt{b}\right)^2\right) + f\left(\left(t\sqrt{b}+(1-t)\sqrt{a}\right)^2\right)}{2}.$$

Получившееся неравенство

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{f\left(\left(t\sqrt{a}+(1-t)\sqrt{b}\right)^2\right) + f\left(\left(t\sqrt{b}+(1-t)\sqrt{a}\right)^2\right)}{2}$$

проинтегрируем почленно по переменной t на отрезке $[0;1]$. Будем иметь:

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(\left(t\sqrt{a}+(1-t)\sqrt{b}\right)^2\right)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f\left(\left(t\sqrt{b}+(1-t)\sqrt{a}\right)^2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_b^a \frac{f(x)}{2\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{f(y)}{2\sqrt{y}\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}dy =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Левое неравенство в (6) доказано.

Докажем сейчас правое неравенство в (6). Снова в силу $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f имеем:

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f\left(\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\sqrt{b}\right)^2\right)}{\sqrt{x}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{x}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}f(a) + \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}f(b) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{b}f(a)-\sqrt{a}f(b)}{\sqrt{x}} + f(b) - f(a)\right).$$

Интегрируя неравенство

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{b}f(a)-\sqrt{a}f(b)}{\sqrt{x}} + f(b) - f(a)\right)$$

почленно на отрезке $[a;b]$, получаем:

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \leqslant \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(f(a)+f(b)\right),$$

откуда следует требуемое.

Неравенство (6) полностью доказано.

Из приведённого доказательства неравенства (6) следует свойство

4.2^0. Если f — строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая на отрезке $[a;b]$ функция, то справедливо двойное неравенство

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) < \frac{1}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (7)$$

Ясно, что аналогичные свойства можно сформулировать и для $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле функции.

4.3^0. Для $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой на отрезке $[a;b]$ функции f справедливо двойное неравенство

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (8)$$

4.4^0. Если f — строго $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутая на отрезке $[a;b]$ функция, то справедливо двойное неравенство

$$f\left(\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\right) > \frac{1}{2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx > \frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (9)$$

Замечание 4.1. Неравенства (6)–(9) условимся называть неравенствами Эрмита – Адамара для $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой (-вогнутой) функции соответственно.

С историей классических неравенств Эрмита – Адамара для выпуклых и вогнутых функций читатель может познакомиться, обратившись к статье [3].

5. Неравенство Иенсена и его аналог

Рассмотрим ещё два важных свойства $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклых (-вогнутых) функций, выражаемых неравенствами. Упоминаемые неравенства схожи с классическими неравенствами Иенсена и его аналога для обычных выпуклых и вогнутых функций.

Теорема 5.1. Пусть f — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq [0;+\infty)$ числовой прямой функция; $a_1,...,$ a_n — произвольные числа из l; $\lambda_k \in (0;1)$, $k=1,...,n$, $\lambda_1+...+\lambda_n=1$ — произвольный набор весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left((\lambda_1\sqrt{a_1}+...+\lambda_n\sqrt{a_n})^2\right) \leqslant \lambda_1 f(a_1)+...+\lambda_n f(a_n), \qquad (10)$$

в котором равенство достигается только, если или f — функция вида $c\sqrt{x}+d$, где c и d — вещественные константы; или $a_1=...=a_n$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Сначала установим базу индукции. Это сделать просто, поскольку при $n=2$ неравенство (10) реализует определение $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой функции, при этом знак равенства в нем будет достигаться либо при условии, что функция f будет иметь вид $c\sqrt{x}+d$ (см. [1]), либо при условии $a_1=a_2$.

Предположим, что неравенство (10) выполняется при $n=k$, $k\geqslant 2$, то есть справедливо соотношение

$$f\left(\left(\lambda_1\sqrt{a_1}+...+\lambda_k\sqrt{a_k}\right)^2\right)\leqslant\lambda_1 f\left(a_1\right)+...+\lambda_k f\left(a_k\right), \tag{11}$$
$$a_i\in l, i=1,...,k; \lambda_i\in(0;1), i=1,...,k, \lambda_1+...+\lambda_k=1,$$

при этом равенство в (11) будет достигаться только в двух случаях: 1) если f — функция вида $c\sqrt{x}+d$; 2) если $a_1=...=a_k$.

Реализуем индукционный переход: покажем, что будет выполняться неравенство

$$f\left(\left(\lambda_1\sqrt{a_1}+...+\lambda_{k+1}\sqrt{a_{k+1}}\right)^2\right)\leqslant\lambda_1 f\left(a_1\right)+...+\lambda_{k+1} f\left(a_{k+1}\right), \tag{12}$$
$$a_i\in l, i=1,...,k+1; \lambda_i\in(0;1), i=1,...,k+1, \lambda_1+...+\lambda_{k+1}=1,$$

в котором равенство может достигаться только тогда, когда или f будет функцией вида $c\sqrt{x}+d$, или $a_1=...=a_{k+1}$.

Оценим левую часть (12) на основании индукционного предположения следующим образом:

$$f\left(\left(\lambda_1\sqrt{a_1}+...+\lambda_k\sqrt{a_k}+\lambda_{k+1}\sqrt{a_{k+1}}\right)^2\right)=$$
$$=f\left(\left(\lambda_1\sqrt{a_1}+...+\lambda_{k-1}\sqrt{a_{k-1}}+(\lambda_k+\lambda_{k+1})\left(\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}\sqrt{a_k}+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}\sqrt{a_{k+1}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)\leqslant$$
$$\leqslant\lambda_1 f\left(a_1\right)+...+\lambda_{k-1} f\left(a_{k-1}\right)+\left(\lambda_k+\lambda_{k+1}\right) f\left(\bar{a}_k\right),$$

где $\bar{a}_k=\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}\sqrt{a_k}+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}\sqrt{a_{k+1}}\right)^2$. Ясно, что значение $\bar{a}_k$ есть среднее степенное чисел a_k и a_{k+1} порядка $\frac{1}{2}$ с весами $\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$, $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$, потому лежит между данными числами.

Равенство в произведенной оценке будет достигаться только, если f — функция вида $c\sqrt{x}+d$ или $a_1=...=a_{k-1}=\bar{a}_k$.

Так как на основании базы индукции

$$f(\bar{a}_k) \leqslant \frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}} f(a_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}} f(a_{k+1}), \tag{13}$$

то в результате имеем оценку

$$\begin{aligned} &f\left(\left(\lambda_1\sqrt{a_1}+\ldots+\lambda_k\sqrt{a_k}+\lambda_{k+1}\sqrt{a_{k+1}}\right)^2\right) \leqslant \\ &\leqslant \lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_{k-1}f(a_{k-1})+(\lambda_k+\lambda_{k+1})\times \\ &\times\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}} f(a_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}} f(a_{k+1})\right) = \\ &= \lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_{k-1}f(a_{k-1})+\lambda_k f(a_k)+\lambda_{k+1}f(a_{k+1}). \end{aligned} \tag{14}$$

Неравенство (12) доказано.

Равенство в (13) возможно только, если f — функция вида $c\sqrt{x}+d$ или если $a_k = a_{k+1}$ (и тогда $\bar{a}_k = a_k = a_{k+1}$). Следовательно, в (14), а значит, и в (12) равенство достигается только тогда, когда f будет функцией вида $c\sqrt{x}+d$ или когда $a_1 = \ldots = a_{k+1}$. Условия достижения равенства в (12) полностью обоснованы.

Теорема доказана.

Замечание 5.1. Очевидно, если в условиях теоремы 5.1 f является $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функцией, то неравенство (10) перейдет в неравенство

$$f\left(\left(\lambda_1\sqrt{a_1}+\ldots+\lambda_n\sqrt{a_n}\right)^2\right) \geqslant \lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_n f(a_n). \tag{15}$$

Условия достижения равенства в (15) будут теми же, что и для неравенства (10).

Неравенства (10) и (15) будем называть неравенствами Иенсена для $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой и $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле функции f соответственно.

Введем сейчас в рассмотрение аналог неравенства (10). Справедлива

Теорема 5.2. Пусть f — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq [0;+\infty)$ функция; $[a;b]$ — произвольный отрезок, принадлежащий l; $x_1,\ldots,x_n$ — произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\,(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ — произвольный набор положительных весов. В данных условиях справедливо неравенство

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sqrt{x_k}\right)^2\right)\leqslant f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right), \qquad (16)$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда или f — функция вида $c\sqrt{x}+d$, где c и d — вещественные константы, или все числа $x_1, ..., x_n$ совпадают либо с a, либо с b.

Условимся при доказательстве данной теоремы следовать схеме обоснования аналога неравенства Иенсена для выпуклых в обычном смысле функций (см., напр., [4, с. 375]). Сначала установим следующую лемму.

Лемма 5.1. Если функция f $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпукла на отрезке $[a;b]$, $[a;b]\subset[0;+\infty)$, в строгом или нестрогом смысле, то для любого x, принадлежащего этому отрезку, будет выполняться неравенство

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^2\right)\leqslant f(a)+f(b)-f(x), \qquad (17)$$

в котором равенство достигается только тогда, когда или функция f — функция вида $c\sqrt{x}+d$ (c и d – вещественные константы), или $x\in\{a,b\}$.

Доказательство. Подчеркнем, во-первых, что точка $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\right.$ $\left.-\sqrt{x}\right)^2$ принадлежит отрезку $[a;b]$. Данный факт следует из цепочки неравенств:

$$a\leqslant\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^2\leqslant b\Leftrightarrow\sqrt{a}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x}\leqslant\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a}\leqslant\sqrt{x}\leqslant\sqrt{b}.$$

Значит, значение $f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^2\right)$ в левой части неравенства (17) существует, потому неравенство (17) по записи корректно.

Из включения $x\in[a;b]$ следует, что существует $\lambda\in[0;1]$, такое, что будет иметь место представление $x=\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^2$. Отсюда следует представление

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^2=\left((1-\lambda)\sqrt{a}+\lambda\sqrt{b}\right)^2.$$

Тогда в силу строгой или нет $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклости функции f будем иметь:

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x}\right)^{2}\right) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) = \tag{18}$$

$$= f(a)+f(b)-\lambda f(a)-(1-\lambda)f(b) \leqslant$$

$$\leqslant f(a)+f(b)-f\left(\left(\lambda\sqrt{a}+(1-\lambda)\sqrt{b}\right)^{2}\right) = \tag{19}$$

$$= f(a)+f(b)-f(x).$$

Неравенство (17) доказано.

Выясним условия достижения равенства в (17). Для этого следует осмыслить условия достижения равенства в (18) и (19).

Если f – функция вида $c\sqrt{x}+d$, то, очевидно, равенство достигается и в (18), и в (19). Если же f не является таковой, то в каждом из данных неравенств равенство возможно лишь при $\lambda=0$ или $\lambda=1$, то есть при совпадении x с b или с a. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.2. Докажем сначала само неравенство (16), а затем выясним условия достижения в нем равенства.

Заметим, что значение $f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\sqrt{x_k}\right)^{2}\right)$ существует, поскольку весовое среднее степенное $c=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\sqrt{x_k}\right)^{2}$ порядка $\dfrac{1}{2}$ чисел $x_1,...,x_n$ есть точка из отрезка $[a;b]$. Оценим это значение сверху, используя неравенство Иенсена (10) для $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$-выпуклой функции. Будем иметь:

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sqrt{x_k}\right)^{2}\right) = f\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x_k}\right)\right)^{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x_k}\right)^{2}\right). \tag{20}$$

Но в силу леммы 5.1

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x_k}\right)^{2}\right) \leqslant f(a)+f(b)-f\left(x_k\right), k=1,...,n, \tag{21}$$

значит,

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sqrt{x_k}\right)^{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(f(a)+f(b)-f\left(x_k\right)\right)=f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(x_k\right),$$

то есть само соотношение (16) установлено.

Равенство в (16) будет достигаться только тогда, когда оно будет иметь место и в неравенстве (20), и в неравенствах (21).

В случае, когда функция f имеет вид $c\sqrt{x}+d$, отмеченное условие, легко проверить, выполняется. Если же f не является таковой, то в (20) равенство может достигаться только при условии

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x_1}=\ldots=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{x_n}, \tag{22}$$

а в неравенствах (21) — при условии $x_k \in \{a,b\}, k=1,\ldots,n$. Но из (22) следует, что $x_1=\ldots=x_n$, значит, в рассматриваемой ситуации должно быть: или $x_1=\ldots=x_n=a$, или $x_1=\ldots=x_n=b$. Неравенство (16) полностью обосновано, теорема 5.2 доказана.

Замечание 5.2. Если в условиях теоремы 5.2 f является $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функцией, то неравенство (16) перейдет в неравенство

$$f\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sqrt{x_k}\right)^2\right) \geqslant f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(x_k\right). \tag{23}$$

Равенство в (23) будет достигаться при тех же условиях, что и для неравенства (16).

Неравенства (16) и (23) условимся называть аналогами неравенства Иенсена для $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклой и $\left(\frac{1}{2};1\right)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле функции соответственно.

Сформулируем следствие теоремы 5.2.

Следствие. Пусть f — $\left(\frac{1}{2};1\right)$-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq [0;+\infty)$ функция; $x_1,\ldots,x_n$ — произвольный набор чисел из этого промежутка, перенумерованных в порядке неубывания; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\,(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ — произвольный набор положительных весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_n}-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sqrt{x_k}\right)^2\right) \leqslant f\left(x_1\right)+f\left(x_n\right)-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(x_k\right),$$

в котором равенство достигается только в случаях: 1) f — функция вида $c\sqrt{x} + d$; 2) $x_1 = ... = x_n$.

Доказательство этого утверждения, легко видеть, следует из теоремы 5.2, если в ней положить $a = x_1, b = x_n$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$-вогнутой в строгом или нестрогом смысле функции.

Замечание 5.3. Требование монотонности последовательности $x_1, ...,$ x_n в условиях приведенного следствия, очевидно, можно заменить таким: в данной последовательности $x_1 = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k\}, x_n = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k\}$.

Список литературы

1. **Калинин С. И., Леонтьева Н. В.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$-выпуклые функции. Ч. I // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. № 1 (26). С. 97–104.*

2. **Виноградов О. Л.** Математический анализ : учебник. СПб.: БХВ-Петербург, 2017. 752 с.

3. **Калинин С. И., Панкратова Л. В.** Неравенства Эрмита – Адамара: образовательно-исторический аспект // *Математическое образование. 2018. № 3 (87). С. 17–31.*

4. **Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M., Pečarić J.** A variant of Jensen–Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means // *J. Math. Anal. Applics. 307 (2005). Pp. 370–385.*

Summary

Kalinin S. I., Leonteva N. V. (1/2; 1)-convex function. Part 2.

This article studies the $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$-convex functions properties. Especially the paper describes that within the $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$-convexity interspace this functions are continuous. Classical Hermite–Hadamard inequality analogue for the convex and concave functions on the segment are introduced. Besides for discussed functions Jensen's inequality and his analogue are proved.

Keywords: convex functions, concave functions, Hermite–Hadamard inequality, Jensen's inequality.

References

1. **Kalinin S. I., Leontieva N. V.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$-vypuklyye funktsii ($\left(\frac{1}{2};1\right)$-convex functions. Part I), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, № 1 (26), pp. 97–104.

2. **Vinogradov O. L.** *Matematicheskiy analiz: uchebnik* (Mathematical analysis: textbook), SPb.: BHV-Petersburg, 2017, 752 p.

3. **Kalinin S. I., Pankratova L. V.** Neravenstva Ermita – Adamara: obrazovatel'no-istoricheskiy aspekt (Hermite – Hadamard Inequalities: educational and historical aspect), *Mathematical education*, 2018, № 3 (87), pp. 17–31.

4. **Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M., Pečarić J.** A variant of Jensen–Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means, *J. Math. Anal. Applics.*, 307 (2005), pp. 370–385.

Для цитирования: Калинин С. И., Леонтьева Н. В. $(1/2;1)$-выпуклые функции. Ч. II // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3 (36). С. 4–23.*

For citation: Kalinin S. I., Leonteva N. V. $(1/2;1)$-convex function. Part 2., *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 3 (36), pp. 4–23.

ВятГУ, ГГПИ *Поступила 30.06.2020*