НАСТАВНИК-УЧЕНИК

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (35). 2020*

УДК 539.3

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕЗЕРВУАРА РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

А. В. Ермоленко, Н. В. Кожагельдиев

Приводится расчет формы резервуара равного сопротивления на основе графоаналитического метода определения формы капли. Для проведения численного эксперимента написана программа на языке Python с использованием математической библиотеки matplotlib.

Ключевые слова: оболочка, форма капли, резервуар, графоаналитический метод.

Оболочкой называется трехмерное тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

Широкое использование оболочек, и как частный случай пластин, во всех отраслях хозяйственной деятельности обусловлено высокой прочностью в сочетании с экономической выгодой. Например, пластины применяют в качестве покрытия дорог и аэродромов, используют для укрепления откосов насыпей и конусов мостов. Что касается оболочек, то различного рода резервуары представляют собой оболочечные конструкции. Оболочечные конструкции также используются в современных строительных сооружениях, которые позволяют добиться большей выразительности и эстетичности городского дизайна. Широко используются оболочки и в точном приборостроении в качестве чувствительных элементов различного рода регуляторов и датчиков [1].

Особо выделяются в конструктивных решениях оболочки, срединные поверхности которых являются поверхностями вращения. Примеры использования оболочек вращения – котлы, корпуса ракет, трудопроводы, газо- и нефтехранилища.

Рассечем поверхность вращения плоскостями, проходящими через ось вращения и перпендикулярно к ней. В результате кривыми, являющимися следом пересечения поверхности с плоскостями, будут линии главной кривизны – меридианы и параллели. В качестве криволинейных координат возьмем угол θ между нормалью к срединной поверхности и осью вращения и угол φ, определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге.

Сделаем следующие обозначения [2]:
R_1 – радиус кривизны меридиана;
R_2 – радиус кривизны, равный длине отрезка нормали к срединной поверхности от этой поверхности до оси вращения;
p_1, p_2, p_n – проекции поверхностной нагрузки на касательную к меридиану, на касательную к параллели и на нормаль к срединной поверхности;
T_1, T_2 (нормальные усилия), S (сдвигающие усилия) – проекции вектора усилий.

Разрешающие уравнения безмоментной теории оболочек вращения имеют вид [2]

$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial T_1}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}(T_1 - T_2) + \frac{1}{R_2 \sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \varphi} + p_1 = 0,$$

$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial S}{\partial \theta} + 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R_2}S + \frac{1}{R_2 \sin\theta}\frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + p_2 = 0,$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p_n. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу – определить форму оболочки таким образом, чтобы усилия были одинаковы во всех сечениях, то есть $T_1 = T_2 = T_0$. Такие оболочки называют оболочками равного сопротивления, их основная особенность – равномерная работа материала и, как следствие, более легкая конструкция. Спроектируем резервуар равного сопротивления для хранения жидкости.

В качестве нагрузки p_n будет выступать гидростатическое давление

$$p_n = p_0 + z\rho, \tag{2}$$

где p_0 – сверхдавление в верхней точке резервуара, ρ – удельный вес жидкости, ось OZ направлена вниз с началом отсчета в верхней точке резервуара.

Учитывая симметричность задачи и полагая, что

$$p_1 = p_2 = 0, S = 0, T_1 = T_2 = const,$$

можно проверить, что уравнения $(1)_1$ и $(1)_2$ выполняются автоматически, а $(1)_3$ с учетом (2) принимает вид

$$\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)T_0 = p_0 + z\rho. \tag{3}$$

Резервуар равного сопротивления с точки зрения моделирования представляет собой каплю под действием поверхностного натяжения [1; 3]. Для решения поставленной задачи применим графоаналитический способ, описанный в работах [2; 4]. Суть метода заключается в последовательном построении меридиана из дуг окружностей, радиусы которых вычисляются по результатам предыдущих итераций.

Перепишем соотношение (3) в следующем виде:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{2}{R_0} + \lambda z, \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{R_0} = \frac{p_0}{2T_0}, \lambda = \frac{\rho}{T_0}. \tag{4$'$}$$

Сделаем обозначения

$$\Delta\vartheta = \pi/n, \vartheta_i = i\Delta\vartheta,$$

где n – количество меридианов.

Пусть $R_1^{(i)}, R_2^{(i)}$ – радиусы кривизны, A_i – точки меридиана капли, B_i – начала радиусов кривизны меридианов $R_1^{(i)}$, C_i – начала главных радиусов кривизны $R_2^{(i)}$ на i-м шаге, то есть $R_1^{(i)} = B_iA_i$, $R_2^{(i)} = C_iA_i$.

Учитывая, что радиусы кривизны в верхней точке резервуара совпадают, из соотношения (4) при $z = 0$ получаем

$$R_1^{(0)} = R_2^{(0)} = R_0. \tag{5}$$

При этом координаты точек A_0, B_0 и C_0 определяются так:

$$x_{A_0} = x_{B_0} = x_{C_0} = 0, z_{A_0} = 0, z_{B_0} = z_{C_0} = R_0. \tag{6}$$

Алгоритм перехода от точки A_i к точке A_{i+1} заключается в следующем (см. рис. 1). Первоначально на отрезке A_iC_i откладываем отрезок A_iB_{i+1}, равный $R_1^{(i)}$, тем самым определяем точку B_{i+1}. Затем проводим дугу окружности с центром в точке B_{i+1}, радиусом $R_1^{(i)}$ и центральным углом $\Delta\vartheta$ – это соответсвует тому, что кривизна во всех точках дуги

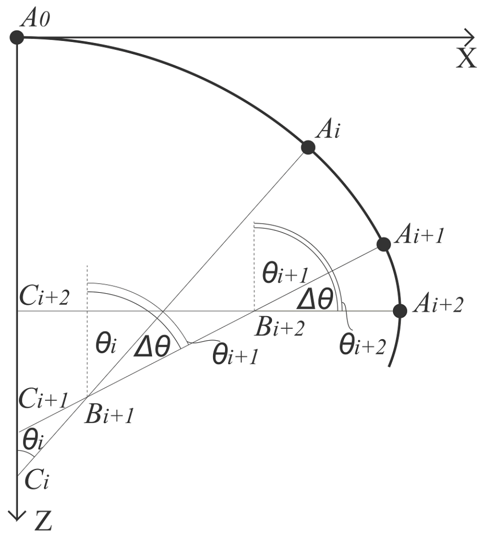

Рис. 1. Взаимное расположение точек A_i, B_i, C_i

$\widehat{A_i A_{i+1}}$ одинакова, таким образом определяем точку A_{i+1}. Далее точка C_{i+1} является пересечением прямой $A_{i+1}B_{i+1}$ с осью вращения, при этом длина отрезка $A_{i+1}B_{i+1}$ будет кривизной $R_2^{(i+1)}$. Кривизну $R_1^{(i+1)}$ находим из соотношения (4).

Таким образом итерационную схему можно записать следующим образом. Начальные значения определяются соотношениями (5–6).

Переход к $(i+1)$-й итерации определяется так:

- координаты точки B_{i+1}:

$$x_{B_{i+1}} = x_{A_i}(1-l),\ l = R_1^{(i)}/R_2^{(i)};$$

$$z_{B_{i+1}} = z_{A_i} + l(z_{C_i} - z_{A_i}),$$

- координаты точки A_{i+1}:

$$x_{A_{i+1}} = x_{B_{i+1}} + R_1^{(i)} \sin\vartheta_{i+1},$$

$$z_{A_{i+1}} = z_{B_{i+1}} - R_1^{(i)} \cos\vartheta_{i+1};$$

- координаты точки C_{i+1}:

$$x_{C_{i+1}} = 0,\ z_{C_{i+1}} = z_{A_{i+1}} - x_{A_{i+1}}(z_{Bi+1} - z_{A_{i+1}})/(x_{B_{i+1}} - x_{A_{i+1}});$$

- кривизна $R_2^{(i+1)}$:

$$R_2^{(i+1)} = \sqrt{(x_{C_{i+1}} - x_{A_{i+1}})^2 + (z_{C_{i+1}} - z_{A_{i+1}})^2};$$

- кривизна $R_1^{(i+1)}$ (см. (4′)):

$$R_1^{(i+1)} = \left(\frac{2}{R_0} + \lambda z_{A_{i+1}} - \frac{1}{R_2^{(i+1)}}\right)^{-1}.$$

С использованием представленной итерационной схемы проводился численный эксперимент, для которого была написана программа на языке Python с использованием математической библиотеки matplotlib [5]. Примеры расчета для резервуара с параметром $R = 2$ м показаны на рис. 2–4[1]. При этом получено, что при $\lambda \to 0$ форма резервуара стремится к форме сферы (рис. 3), а при $\lambda \to \infty$ поперечный размер резервуара становится бесконечно большим (рис. 4).

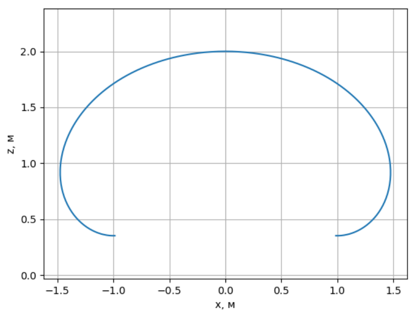

Рис. 2. Пример расчета при $\lambda = 1$ м$^{-2}$

В заключении отметим, что данная работа дополняет работу [2] в части детализации алгоритма, в основном носит методический характер, призвана показать использование итерационных методов и программирования на языке python в механике пластин и оболочек.

---

[1] Для удобства восприятия результат опображен относительно оси $0X$ и поднят на величину R_0.

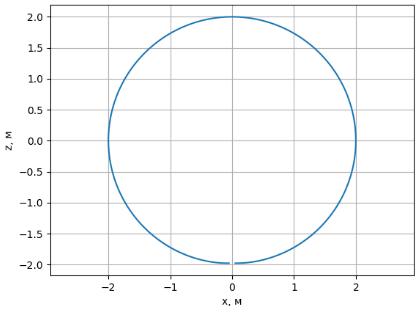

Рис. 3. Пример расчета при $\lambda = 0.001$ м$^{-2}$

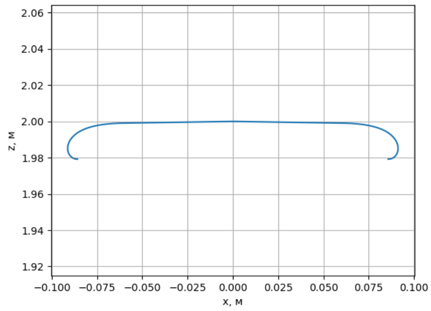

Рис. 4. Пример расчета при $\lambda = 10000$ м$^{-2}$

Список литературы

1. **Андреев Л. В.** В мире оболочек: От живой клетки до космического корабля. М.: Знание, 1986. 176 с.

2. **Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И.** Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.

3. **Гордон Дж.** Конструкции, или Почему не ломаются вещи. М.: Мир, 1980. 390 с.

4. **Аникин Д. Ю., Филонов М. Р.** Алгоритм расчета поверхностного натяжения расплавов методом минимизации отклонений экспериментальных и теоретических профилей лежащей капли // *Цветные металлы. 2004. № 1. С. 77–80.*

5. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4 (33). С. 86—95.*

Summary

Yermolenko A. V., Kozhagel'diev N. V. Graphoanalytical method for calculating an equal resistance reservoir

The calculation of the shape of the reservoir of equal resistance based on the graphoanalytical method for determining the shape of a drop is given.

To conduct a numerical experiment, a program was written in Python using the mathematical library matplotlib.
Keywords: shell, droplet form, reservoir, graphoanalytical method.

References

1. **Andreev L. V.** *V mire obolochek: Ot zhivoj kletki do kosmicheskogo korablya* (In the world of shells: From a living cell to a spaceship), M.: Znanie, 1986, 176 p.

2. **Novozhilov V. V., CHernyh K. F., Mikhailovskii E. I.** *Linejnaya teoriya tonkih obolochek* (Linear theory of thin shells), L.: Politekhnika, 1991, 656 p.

3. **Gordon J.** *Konstrukcii, ili Pochemu ne lomayutsya veshchi* (Structure, or why things do not break), M.: Mir, 1980, 390 p.

4. **Anikin D. Yu., Filonov M. R.** Algoritm rascheta poverhnostnogo natyazheniya rasplavov metodom minimizacii otklonenij eksperimental'nyh i teoreticheskih profilej lezhashchej kapli (Algorithm for calculating the surface tension of melts by minimizing deviations of the experimental and theoretical profiles of a lying drop), *Cvetnye metally*, 2004, 1, pp. 77–80.

5. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** O primenenii bibliotek Python dlya rascheta plastin (On using Python libraries to calculate plates), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 4 (33), pp. 86–95.

Для цитирования: Ермоленко А. В., Кожагельдиев Н. В. Графоаналитический метод расчета резервуара равного сопротивления // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 2 (35). С. 85–91.*

For citation: Yermolenko A. V., Kozhagel'diev N. V. Graphoanalytical method for calculating an equal resistance reservoir, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 2 (35), pp. 85–91.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 01.04.2020*