МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (34). 2020

УДК 517.968

ОБ УСЛОВИЯХ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Е. А. Созонтова

В работе получены условия однозначной разрешимости системы уравнений Вольтерра с частными интегралами в n-мерном пространстве.
Ключевые слова: система с частными интегралами, условие разрешимости, дифференциальное уравнение.

В области $\Omega = \{x_1^0 < x_1 < x_1^1,\ x_2^0 < x_2 < x_2^1, \ldots, x_n^0 < x_n < x_n^1\}$ рассматривается система уравнений с частными интегралами (термин встречается, например, в [1]):

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^{n} (a_{jk} \int\limits_{x_k^0}^{x_k} (\sum_{i=1}^{n} b_{ki} \varphi_i) dt_k) + f_j, \quad (j = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где $\varphi_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестные функции, $a_{jk},\ b_{ki},\ f_j$ – переменные коэффициенты и свободный член, зависящие от $(x_1, \ldots, x_n)$. Предполагается, что коэффициенты данной системы непрерывны в $\overline{\Omega}$ и выполнено условие

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \|a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \neq 0. \tag{2}$$

Уравнения с частными интегралами рассматривались, например, в [2]. Система (1) при $n = 2$ и $n = 3$ рассматривалась соответственно в [3; 4]. В частности, в обозначенных работах получены условия разрешимости в квадратурах системы (1) при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно.

Целью данной работы является обобщение применяемого в этих работах метода исследования систем вида (1) для произвольного n.

Обозначим входящие в (1) интегралы по x_k через M_k соответственно $(k=\overline{1,n})$:

$$M_k = \int\limits_{x_k^0}^{x_k} (\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\varphi_i) dt_k, \ (k=\overline{1,n}). \tag{3}$$

Тогда, учитывая (2) и известные свойства определителей, найдем

$$M_k = \frac{(-1)^{k+1}\varphi_1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{(-1)^{k+2}\varphi_2}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & \dots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\ldots+\frac{(-1)^{k+n}\varphi_n}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & f_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & f_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & f_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

или кратко

$$M_k = \sum_{i=1}^{n}((-1)^{k+i}\Delta_{ik}\varphi_i)\Delta^{-1} - \Delta_k\Delta^{-1}, \ (k=\overline{1,n}), \tag{4}$$

где Δ_{ik} получается из Δ путем вычеркивания строки с номером i и столбца с номером k, Δ_k получается из Δ путем замены k-го столбца столбцом $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Далее введем новые функции u_k по формулам

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k+i}\Delta_{ik}\varphi_i = u_k, \ (k=\overline{1,n}) \tag{5}$$

и будем рассматривать (5) как систему линейных уравнений для определения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Пусть определитель этой системы Δ^* удовлетворяет условию

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \ldots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \ldots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (6)$$

Тогда по формулам Крамера получаем

$$\varphi_k = \frac{(-1)^{k+1}u_1}{\Delta^*} \begin{vmatrix} \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{k-1,2} & \Delta_{k+1,2} & \ldots & \Delta_{n2} \\ \Delta_{13} & \ldots & \Delta_{k-1,3} & \Delta_{k+1,3} & \ldots & \Delta_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{1n} & \ldots & \Delta_{k-1,n} & \Delta_{k+1,n} & \ldots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \frac{(-1)^{k+n}u_n}{\Delta^*} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \ldots & \Delta_{k-1,1} & \Delta_{k+1,1} & \ldots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{k-1,2} & \Delta_{k+1,2} & \ldots & \Delta_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{1,n-1} & \ldots & \Delta_{k-1,n-1} & \Delta_{k+1,n-1} & \ldots & \Delta_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

или кратко

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}u_i, \ (k = \overline{1,n}), \qquad (7)$$

где $A_{ik} = \frac{(-1)^{k+i}\Delta^*_{ik}}{\Delta^*}$, Δ^*_{ik} получается из Δ^* путем вычеркивания строки с номером i и столбца с номером k.

С другой стороны, подставляя (10.5) в (10.4), получим

$$M_k = \tfrac{u_k}{\Delta} - \tfrac{\Delta_k}{\Delta}, \ (k = \overline{1,n}). \qquad (10.8)$$

Подставим теперь значения из (7) в левые части (8)

$$\int\limits_{x_k^0}^{x_k} (\sum_{i=1}^{n} b_{ki} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}u_j)dt_k = \tfrac{u_k}{\Delta} - \tfrac{\Delta_k}{\Delta}, \ (k = \overline{1,n})$$

и продифференцируем полученные соотношения по x_k соответственно. В результате получим систему

$$\tfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} B_{ji}u_j + F_k, \ (k = \overline{1,n}), \qquad (9)$$

где

$$B_{ji} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} A_{ji}, \text{ если } j \neq k, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} A_{ji} + (\ln \Delta)_{x_k}, \text{ если } j = k, \end{cases}$$

$$F_k = (\Delta_k \Delta^{-1})_{x_k} \Delta.$$

Так как из обозначений M_k следуют тождества $M_k|_{x_k = x_k^0} \equiv 0$ $(k = \overline{1, n})$, то из (8) следуют граничные значения:

$$u_k|_{x_k = x_k^0} \equiv \Delta_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), \ (k = \overline{1, n}). \tag{10}$$

Таким образом, система (1) оказывается редуцированной к задаче (9) – (10). Известно [5], что указанная задача является однозначно разрешимой.

Итак, справедливо утверждение

Теорема 1. *Если в замыкании области D выполняются условия (2), (6), то система (1) однозначно разрешима.*

Список литературы

1. **Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabreiko P. P.** Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York, 2000.

2. **Жегалов В. И.** Решение уравнений Вольтерра с частными интегралами с помощью дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 874–882.*

3. **Жегалов В. И., Созонтова Е. А.** Условия разрешимости одной системы интегральных уравнений в квадратурах // *Дифференц. уравнения. 2015. № 7. С. 958–961.*

4. **Созонтова Е. А.** Об условиях разрешимости трехмерной системы интегральных уравнений в квадратурах // *Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2015. № 10. С. 40–46.*

5. **Чекмарев Т. В.** Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // *Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.*

Summary

Sozontova E. A. On the conditions of unambiguous solvability of a system of Volterra equations with partial integrals

In this paper, we obtain conditions for unambiguous solvability of a system of Volterra equations with partial integrals in n - dimensional space.
Keywords: system with private integrals, the condition of solvability, differential equation.

References

1. **Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabreiko P. P.** *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York, 2000, 386 p.

2. **Zhegalov V. I.** Reshenie uravnenij Vol'terra s chastnymi integralami s pomoshch'yu differencial'nyh uravnenij (Solution of Volterra partial integral equations with the use of differential equations), *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 874–882.

3. **Zhegalov V. I., Sozontova E. A.** Usloviya razreshimosti odnoj sistemy integral'nyh uravnenij v kvadraturah (Conditions for the solvability of a system of integral equations by quadratures), *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 958–961.

4. **Sozontova E. A.** Ob usloviyah razreshimosti trekhmernoj sistemy integral'nyh uravnenij v kvadraturah (On the solvability conditions of a three-dimensional system of integral equations in quadratures), *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya — Samara State University Review. Natural science series*, 2015, no. 10, pp. 40–46.

5. **Chekmaryov T. V.** Formuly resheniya zadachi Gursa dlya odnoj linejnoj sistemy uravnenij s chastnymi proizvodnymi (Formulas for solving the Goursat problem for single linear system of partial differential equations), *Differencial'nye uravneniya — Differential equations*, 1982, vol. 18, no. 9, pp. 1614–1622.

Для цитирования: Созонтова Е. А. Об условиях однозначной разрешимости системы уравнений Вольтерра с частными интегралами // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (34). С. 29–34.*

For citation: Sozontova E. A. On the conditions of unambiguous solvability of a system of Volterra equations with partial integrals, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 1 (34), pp. 29–34.

Елабужский институт ФГАОУ ВО КФУ *Поступила 29.02.2020*