МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (34). 2020

УДК 517.956

К УСЛОВИЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Е. А. Созонтова

В работе исследованы характеристические задачи для системы гиперболического типа с двумя независимыми переменными. С помощью метода Римана и теории интегральных уравнений получены условия однозначной разрешимости поставленных задач.
Ключевые слова: гиперболическая система, метод Римана, характеристическая задача.

В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ рассматривается система

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y + e_1 u + f_1 v = g_1, \\ v_{xy} + a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y + e_2 u + f_2 v = g_2, \end{cases} \tag{1}$$

гладкость коэффициентов которой определяется включениями

$$\begin{gathered} a_1,\ a_2,\ c_1,\ c_2 \in C^{(1,0)},\ b_1,\ c_1,\ c_2,\ d_2 \in C^{(0,1)}, \\ e_1,\ e_2,\ f_1,\ f_2 \in C^{(0,0)}. \end{gathered} \tag{2}$$

Данная система является одним из частных случаев систем с доминирующими частными производными. Как известно [1, с. 67], для системы (1) существует единственное решение следующей задачи.

Задача 1 (вспомогательная). В области D найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi_1(y), \quad u(x, y_0) = \psi_1(x), \\ v(x_0, y) &= \varphi_2(y), \quad v(x, y_0) = \psi_2(x). \end{aligned} \tag{3}$$

При этом предполагается, что $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C^1(\overline{X}),\ \psi_1,\ \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$ и выполняются условия согласования:

$$\varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_2(y_0) = \psi_2(x_0). \tag{4}$$

В настоящей статье получены условия однозначной разрешимости характеристических задач с граничными условиями на трех и четырех сторонах характеристического прямоугольника. Отметим, что задачи для гиперболических уравнений с доминирующей частной производной с условиями на всех характеристиках рассмотрены, например, в работах [2; 3]. В статье [4] подобные задачи рассмотрены для гиперболической системы с кратными доминирующими производными. Для систем уравнений подобные задачи рассматривались, например, в [5].

Задача 2 (задача с условиями на трех характеристиках). Найти в области D регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям:

$$\begin{array}{ll} u(x_0, y) = \varphi_1(y), & u(x, y_1) = \omega_1(x), \\ v(x_0, y) = \varphi_2(y), & v(x, y_0) = \psi_2(x), \end{array} \tag{5}$$

где $\omega_1 \in C^1(\overline{Y_1})$.

Будем исследовать разрешимость задачи 2 путем сведения ее к задаче 1. Для этого приведем формулы решения задачи 1, полученные методом Римана [1, с. 66]:

$$\begin{gathered} u(x,y) = R_{11}(x,y_0,x,y)u(x,y_0) + R_{12}(x,y_0,x,y)v(x,y_0) + \\ +R_{11}(x_0,y,x,y)u(x_0,y) + R_{12}(x_0,y,x,y)v(x_0,y) - \\ -R_{11}(x_0,y_0,x,y)u(x_0,y_0) - R_{12}(x_0,y_0,x,y)u(x_0,y_0) - \\ -\int\limits_{x_0}^{x}[(R_{11\alpha} - b_1R_{11} - d_1R_{21})(\alpha,y_0,x,y)u(\alpha,y_0) + \\ +(R_{12\alpha} - b_1R_{12} - d_1R_{22})(\alpha,y_0,x,y)v(\alpha,y_0)]d\alpha - \\ -\int\limits_{y_0}^{y}[(R_{11\beta} - a_1R_{11} - c_1R_{21})(x_0,\beta,x,y)u(x_0,\beta) + \\ +(R_{12\beta} - a_1R_{12} - c_1R_{22})(x_0,\beta,x,y)v(x_0,\beta)]d\beta + \\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(R_{11}g_1 + R_{12}g_2)(\alpha,\beta,x,y)d\alpha d\beta, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
v(x,y)=R_{21}(x,y_0,x,y)u(x,y_0)+R_{22}(x,y_0,x,y)v(x,y_0)+\\
+R_{21}(x_0,y,x,y)u(x_0,y)+R_{22}(x_0,y,x,y)v(x_0,y)-\\
-R_{21}(x_0,y_0,x,y)u(x_0,y_0)-R_{22}(x_0,y_0,x,y)u(x_0,y_0)-\\
-\int\limits_{x_0}^{x}[(R_{21\alpha}-b_2R_{11}-d_2R_{21})(\alpha,y_0,x,y)u(\alpha,y_0)+\\
+(R_{22\alpha}-b_2R_{12}-d_2R_{22})(\alpha,y_0,x,y)v(\alpha,y_0)]d\alpha-\\
-\int\limits_{y_0}^{y}[(R_{21\beta}-a_2R_{11}-c_2R_{21})(x_0,\beta,x,y)u(x_0,\beta)+\\
+(R_{22\beta}-a_2R_{12}-c_2R_{22})(x_0,\beta,x,y)v(x_0,\beta)]d\beta+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}(R_{21}g_1+R_{22}g_2)(\alpha,\beta,x,y)d\alpha d\beta.
\end{gathered}\tag{7}$$

Здесь R_{ij} $(i,j=1,2)$ являются решениями интегральной системы (1.160) из [1], которая всегда имеет единственное решение.

По данным (5) необходимо получить $u(x,y_0)=\psi_1(x)$. Положим в (6) $y=y_1$, получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{gathered}
R_{11}(x,y_0,x,y_1)u(x,y_0)+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}(b_{11}R_{11}+d_1R_{21}-R_{11\alpha})(\alpha,y_0,x,y_1)u(\alpha,y_0)d\alpha=F_1(x),
\end{gathered}\tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}
F_1(x)=\omega_1(x)-R_{12}(x,y_0,x,y_1)\psi_2(x)-R_{11}(x_0,y_1,x,y_1)\varphi_1(y_1)-\\
-R_{12}(x_0,y_1,x,y_1)\varphi_2(y_1)+R_{11}(x_0,y_0,x,y_1)\varphi_1(y_0)+R_{12}(x_0,y_0,x,y_1)\varphi_2(y_0)+\\
+\int\limits_{x_0}^{x}(R_{12\alpha}-b_1R_{12}-d_1R_{22})(\alpha,y_0,x,y_1)\psi_2(\alpha)d\alpha+\\
+\int\limits_{y_0}^{y_1}[(R_{11\beta}-a_1R_{11}-c_1R_{21})(x_0,\beta,x,y_1)\varphi_1(\beta)+\\
+(R_{12\beta}-a_1R_{12}-c_1R_{22})(x_0,\beta,x,y_1)\varphi_2(\beta)]d\beta-\\
-\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}(R_{11}g_1+R_{12}g_2)(\alpha,\beta,x,y_1)d\alpha d\beta
\end{gathered}$$

– известная функция. Так как $R_{11}(x,y_0,x,y)\neq 0$, уравнение (8) является уравнением Вольтерра второго рода для определения $u(x,y_0)$, решение которого существует и единственно в классе непрерывных функций [6, § 28]. Следовательно, в этом случае задача 2 редуцируется к задаче 1 и справедливо утверждение

Теорема 1. *Если в замыкании области D выполняются включения (2), то существует единственное решение задачи 2.*

Задача 3 (задача с условиями на всех сторонах характеристического прямоугольника). Найти в области D регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0,y)=\varphi_1(y), \quad u(x,y_1)=\omega_1(x),\\ v(x,y_0)=\psi_2(x), \quad v(x_1,y)=\omega_2(y), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega_1 \in C^1(\overline{Y_1}),\ \omega_2 \in C^1(\overline{X_1})$.

Исследовать задачу 3, так же как и задачу 2, будем с помощью редукции к задаче 1. Для этого по данным (9) определим $u(x,y_0) = \psi_1(x),\ v(x_0,y) = \psi_2(y)$. Положим в (6) $y = y_1$, а в (7) – $x = x_1$. Получим систему двух интегральных уравнений:

$$\begin{gathered} R_{11}(x,y_0,x,y_1)u(x,y_0)+\\ +\int\limits_{x_0}^{x}(b_1R_{11}+d_1R_{21}-R_{11\alpha})(\alpha,y_0,x,y_1)u(\alpha,y_0)d\alpha++\\ +\int\limits_{y_0}^{y_1}(a_1R_{12}+c_1R_{22}-R_{12\beta})(x_0,\beta,x,y_1)v(x_0,\beta)d\beta+\\ +R_{12}(x_0,y_1,x,y_1)v(x_0,y_1)=F_1(x),\\ R_{22}(x_0,y,x_1,y)v(x_0,y)+\\ +\int\limits_{y_0}^{y_1}(a_2R_{12}+c_2R_{22}-R_{22\beta})(x_0,\beta,x_1,y)v(x_0,\beta)d\beta++\\ +\int\limits_{x_0}^{x}(b_2R_{11}+d_2R_{21}-R_{21\alpha})(\alpha,y_0,x_1,y)u(\alpha,y_0)d\alpha+\\ +R_{21}(x_1,y_0,x_1,y)u(x_1,y_0)=F_2(y), \end{gathered} \tag{10}$$

где $F_1(x),\ F_2(y)$ – известные функции в силу условий (9). Так как $R_{11}(x,y_0,x,y_1) \neq 0,\ R_{22}(x_0,y,x_1,y) \neq 0$, то решение системы (10) $(u(x,y_0),\ v(x_0,y))$ существует и единственно в классе непрерывных функций [7, с. 33]. Итак, справедлива

Теорема 2. *Если в замыкании области D выполняются включения (2), то существует единственное решение задачи 3.*

Список литературы

1. **Бицадзе А. В.** Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

2. **Уткина Е. А.** Теорема единственности решения одной задачи Дирихле // *Изв. вузов. Математика. 2011. № 5. С. 62–67.*

3. **Уткина Е. А.** Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // *Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 400–404.*

4. **Миронова Л. Б.** О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 43. С. 31–37.*

5. **Созонтова Е. А.** О характеристических задачах для одной системы гиперболического типа в трехмерном пространстве // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 6 (107). С. 74–84.*

6. **Мюнтц Г.** Интегральные уравнения. Л.; М.: ГТТИ, 1934. Т. 1. 330 с.

7. **Миронова Л. Б.** Линейные системы уравнений с кратными старшими частными производными : дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Казань: Казанск. ун-т, 2005. 140 с.

Summary

Sozontova E. A. On the solvability conditions of characteristic problems for a single hyperbolic system

In this paper, characteristic problems for a hyperbolic system with two independent variables are investigated. Using the Riemann method and the theory of integral equations, the conditions for unambiguous solvability of the problems are obtained.

Keywords: hyperbolic system, Riemann method, characteristic problem.

References

1. **Bicadze A. V.** *Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh* (Some classes of partial differential equations), Moscow: Nauka, 1981, 448 p.

2. **Utkina E. A.** Teorema edinstvennosti resheniya odnoj zadachi Dirihle (A uniqueness theorem for solution of one Dirichlet problem), *Izvestiya vuzov. Matematika - Russian Mathematics*, 2011, no. 5, pp. 62–67.

3. **Utkina E. A.** Zadacha Dirihle dlya odnogo uravneniya chetvertogo poryadka (Dirichlet problem for a fourth-order equation), *Differencial'nye uravneniya - Differential equations*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 400–404.

4. **Mironova L. B.** O harakteristicheskih zadachah dlya odnoj sistemy s dvukratnymi starshimi chastnymi proizvodnymi (On characteristic problems for single system with two-fold higher partial derivatives), *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, Samara state technical University Review. Series: Physical and mathematical Sciences*, 2006, no. 43, pp. 31–37.

5. **Sozontova E. A.** O harakteristicheskih zadachah dlya odnoj sistemy giperbolicheskogo tipa v trekhmernom prostranstve (On characteristic problems for single hyperbolic system in three-dimensional space) *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya, Samara State University Review. Natural science series*, 2013, no. 6, pp. 74–84.

6. **Myuntc G.** Integral'nye uravneniya (Integral equations), vol. 1, Liningrad-Moscow: STTP, 1934, 330 p.

7. **Mironova L. B.** Linejnye sistemy uravnenij s kratnymi starshimi chastnymi proizvodnymi (Linear systems of equations with multiple higher partial derivatives), Candidate's thesis, Kazan University, 2005, 140 p.

Для цитирования: Созонтова Е. А. К условиям разрешимости характеристических задач для одной системы гиперболического типа // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (34). С. 22–28.*

For citation: Sozontova E. A. On the solvability conditions of characteristic problems for a single hyperbolic system, *Bulletin of Syktyvkar*

University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2020, 1 (34), pp. 22–28.

Елабужский институт ФГАОУ ВО КФУ *Поступила 05.02.2020*