

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 4 (33). 2019*

УДК 51-73, 537.86, 537.876.22

**К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ ГИРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В  
СРЕДЕ С ДИССИПАЦИЕЙ<sup>1</sup>**

***П. А. Макаров, М. А. Уляшева***

Рассмотрены гиромагнитные волны, распространяющиеся в касательно намагниченной ферритовой пластине, обладающей бигиротропными свойствами. Учтена диссипация магнитной проницаемости материала пластины. В геометрии Дэймона-Эшбаха получена система трансцендентных уравнений, определяющая дисперсию компонент волнового вектора.

*Ключевые слова:* дисперсия гиромагнитных волн, диссипация.

## **1. Введение**

Изучение электродинамических свойств неоднородных, неизотропных, нестационарных сред и структур на их основе — это одна из важнейших задач современной фундаментальной и прикладной науки. Это

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-02-01138 и №17-57-150001).

связано с тем, что анализ характера распространения электромагнитных волн в таких средах в течение весьма длительного времени остаётся актуальной проблемой, играющей определяющую роль в радиоэлектронике. В настоящее время ведутся научные исследования искусственно созданных систем на основе композитных материалов, структура которых формируется из двух подрешёток, одна из которых обладает гиротропией по отношению к электрическим свойствам, а другая — магнитной гиротропией [1–6].

Ввиду многообразия возможных в них электродинамических эффектов, бигиротропные среды вызывают большой интерес как сами по себе [1, 2, 7], так и в составе разнообразных комплексных систем, таких как ферромагнитные сверхрешётки [3], волноводы на основе магнитооптических слоёв и фотонных кристаллов [4], тонкоплёночные периодические структуры магнетик / полупроводник [5], магنونные кристаллы [6] и многие другие.

Вместе с тем теория генерации, распространения, затухания и преобразования электромагнитных, спиновых и магнитостатических волн в бигиротропных средах далека от завершения. В первую очередь, это обстоятельство определяется высокой сложностью уравнений, описывающих электромагнитное поле в таких средах [1, 8]. В дополнение к этому, сложность задачи существенно возрастает при учёте диссипации энергии электромагнитного поля.

Указанные проблемы приводят к тому, что получение уравнения дисперсии электромагнитных волн в бигиротропных средах при учёте диссипации оказывается затруднительным, а его решение в аналитическом виде, как правило, принципиально невозможно.

## 2. Геометрия задачи

Рассмотрим пластину толщины  $d$  (см. рис. 1), намагниченную в плоскости полем  $\mathbf{H}_0$ . Введём декартовую систему координат  $Oxyz$  таким образом, чтобы плоскость  $Oyz$  совпадала с плоскостью пластины, а ось  $Ox$  была ей перпендикулярна. Магнитное поле направлено вдоль оси  $Oz$ . В описанной ситуации вдоль оси  $Oy$  могут распространяться волны, известные как волны Деймона—Эшбаха [9].

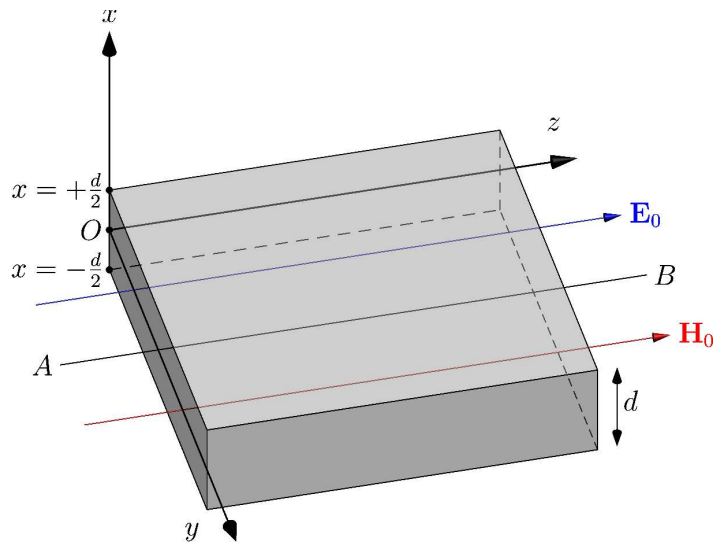


Рис. 1. Геометрия задачи

В рамках данной работы будем рассматривать задачу не классически [9] в магнитостатическом приближении, а в рамках полной электродинамической постановки, т. е. будем учитывать переменное электрическое поле, изменение во времени которого создаёт динамическое магнитное поле.

## 3. Основное дисперсионное соотношение

Исследуем дисперсионное соотношение, которому должны подчи-

няться электромагнитные волны типа Деймона—Эшбаха. Это уравнение было получено в работе [10] и имеет вид:

$$\tanh(kd\alpha_0) = \frac{2\mu\alpha_0}{\beta_0}, \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число,  $\mu$  — компонента тензора магнитной проницаемости среды, определяющая её намагниченность вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , а параметры  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются выражениями:

$$\alpha_0 = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} \varepsilon k_0^2}, \quad (2)$$

$$\beta_0 = \frac{\mu_a^2 - \mu^2 - 1}{k \sqrt{k^2 - \varepsilon k_0^2}} \left[ k^2 - \frac{\mu^2 - \mu_a^2 + \mu}{\mu^2 - \mu_a^2 + 1} \varepsilon k_0^2 \right]. \quad (3)$$

В соотношениях (2) и (3) параметр  $\varepsilon$  — это компонента тензора диэлектрической проницаемости среды, определяющая её электризацию вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ ,  $\mu_a$  — недиагональная компонента тензора магнитной проницаемости, описывающая её магнитные свойства в плоскости  $Oxy$ , а  $k_0 = \omega/c$  — волновое число волны данной частоты  $\omega$  в свободном пространстве.

#### 4. Преобразование дисперсионного соотношения

Для упрощения анализа уравнения (1) используем вспомогательные обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu} \varepsilon k_0^2, \\ B = \mu_a^2 - \mu^2 - 1, \\ C = -\varepsilon k_0^2, \\ D = -\frac{\mu^2 - \mu_a^2 + \mu}{\mu^2 - \mu_a^2 + 1} \varepsilon k_0^2. \end{array} \right. \quad (4)$$

С учётом (4) дисперсионное соотношение (1) переписывается в виде:

$$\frac{e^{2d\sqrt{k^2+A}} - 1}{e^{2d\sqrt{k^2+A}} + 1} = \frac{2\mu}{B} \cdot \frac{\sqrt{k^2+A}\sqrt{k^2+C}}{k^2+D}. \quad (5)$$

В уравнении (5) комплексные величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ :

$$\begin{cases} A = A' + iA'', \\ B = B' + iB'', \\ C = C' + iC'', \\ D = D' + iD'', \end{cases} \quad (6)$$

выражаются через параметры среды  $\mu$  и  $\mu_a$ . Компоненты магнитной проницаемости, в свою очередь, зависят от частоты волны  $\omega$  и в рассматриваемом случае диссипативной среды сами являются комплексными

$$\begin{cases} \mu = \mu' + i\mu'', \\ \mu_a = \mu'_a + i\mu''_a. \end{cases} \quad (7)$$

Выделим действительные и мнимые части величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ :

$$\begin{cases} A' = -k_0^2 \varepsilon \frac{M_1 \mu' + M_2 \mu''}{(\mu')^2 + (\mu'')^2}, \\ A'' = -k_0^2 \varepsilon \frac{-M_1 \mu'' + M_2 \mu'}{(\mu')^2 + (\mu'')^2}, \\ B' = -(M_1 + 1), \\ B'' = -M_2, \\ C' = -k_0^2 \varepsilon, \\ C'' = 0, \\ D' = -k_0^2 \varepsilon \frac{(M_1 + \mu')(M_1 + 1) + M_2(M_2 + \mu'')}{(M_1 + 1)^2 + M_2^2}, \\ D'' = -k_0^2 \varepsilon \frac{-(M_1 + \mu')M_2 + (M_1 + 1)(M_2 + \mu'')}{(M_1 + 1)^2 + M_2^2}. \end{cases} \quad (8)$$

При этом были использованы вспомогательные обозначения:

$$M_1 = (\mu')^2 - (\mu'')^2 - (\mu'_a)^2 + (\mu''_a)^2, \quad (9)$$

$$M_2 = 2(\mu'\mu'' - \mu'_a\mu''_a). \quad (10)$$

В дисперсионном соотношении (5), кроме параметров  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , комплексной величиной также является волновое число  $k$ , которое можно представить в виде

$$k = \eta - i\xi. \quad (11)$$

Далее, возведя  $k$  в квадрат и учитывая комплексность  $A$ , можно получить:

$$\begin{cases} \sqrt{k^2 + A} = \sqrt{a_A + ib_A}, \\ a_A = \eta^2 - \xi^2 + A', \\ b_A = -2\xi\eta + A''. \end{cases} \quad (12)$$

Представим  $\sqrt{k^2 + A}$  комплексным числом

$$\sqrt{k^2 + A} = g_A + ih_A \quad (13)$$

с действительной и мнимой частями, определяемыми согласно [11]:

$$\begin{cases} g_A = \sqrt{\frac{(\eta^2 - \xi^2 + A') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + A')^2 + (-2\xi\eta + A'')^2}}{2}}, \\ h_A = \sqrt{\frac{-(\eta^2 - \xi^2 + A') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + A')^2 + (-2\xi\eta + A'')^2}}{2}}. \end{cases} \quad (14)$$

Аналогично определяется и  $\sqrt{k^2 + C}$ :

$$\sqrt{k^2 + C} = g_C + ih_C, \quad (15)$$

$$\begin{cases} g_C = \sqrt{\frac{(\eta^2 - \xi^2 + C') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + C')^2 + (-2\eta\xi + C'')^2}}{2}}, \\ h_C = \sqrt{\frac{-(\eta^2 - \xi^2 + C') + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + C')^2 + (-2\eta\xi + C'')^2}}{2}}. \end{cases} \quad (16)$$

Также выделим действительную и мнимую части выражения  $k^2 + D$ :

$$k^2 + D = g_D + ih_D, \quad (17)$$

$$\begin{cases} g_D = \eta^2 - \xi^2 + D', \\ h_D = -2\eta\xi + D''. \end{cases} \quad (18)$$

Левая часть дисперсионного соотношения (5) содержит комплексные величины в показателе экспоненты. Преобразуем её, используя формулу Эйлера:

$$e^{2d\sqrt{k^2+A}} = e^{2dg_A} e^{i2dh_A} = e^{2dg_A} [\cos(2dh_A) + i \sin(2dh_A)]. \quad (19)$$

Введём вспомогательные обозначения:

$$\begin{cases} C_{1M} = e^{2dg_A} \cos(2dh_A) - 1, \\ C_{1P} = e^{2dg_A} \cos(2dh_A) + 1, \\ C_2 = e^{2dg_A} \sin(2dh_A). \end{cases} \quad (20)$$

С помощью (20) левая часть уравнения (5) принимает вид:

$$F_1 = \frac{C_{1M} + iC_2}{C_{1P} + iC_2}. \quad (21)$$

Выделяя действительную и мнимую части (21), получаем:

$$\begin{cases} F_1 = F_{11} + iF_{12}, \\ F_{11} = \frac{C_{1P}C_{1M} + C_2^2}{C_{1P}^2 + C_2^2}, \\ F_{12} = \frac{C_2(C_{1P} - C_{1M})}{C_{1P}^2 + C_2^2}. \end{cases} \quad (22)$$

Теперь преобразуем правую часть дисперсионного соотношения (5). Сначала представим в комплексном виде множитель

$$\frac{2\mu}{B} = p + iq, \quad (23)$$

где действительная и мнимая части определены согласно

$$\begin{cases} p = 2 \frac{\mu' B' + \mu'' B''}{(B')^2 + (B'')^2}, \\ q = 2 \frac{\mu'' B' - \mu' B''}{(B')^2 + (B'')^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Также определим  $\sqrt{k^2 + A}\sqrt{k^2 + C}$ :

$$\sqrt{k^2 + A}\sqrt{k^2 + C} = (g_A + ih_A)(g_C + ih_C) = r + is, \quad (25)$$

$$\begin{cases} r = g_A g_C - h_A h_C, \\ s = g_A h_C + g_C h_A. \end{cases} \quad (26)$$

Тогда с помощью (17), (23)-(26) правая часть дисперсионного соотношения примет вид:

$$F_2 = \frac{(p + iq)(r + is)}{g_D + ih_D}. \quad (27)$$

Запишем числитель (27) в виде

$$(p + iq)(r + is) = u + iv. \quad (28)$$

Выделим действительную и мнимую части  $F_2$ :

$$\begin{cases} F_2 = F_{21} + iF_{22}, \\ F_{21} = \frac{ug_D + vh_D}{(g_D)^2 + (h_D)^2}, \\ F_{22} = \frac{vg_D - uh_D}{(g_D)^2 + (h_D)^2}. \end{cases} \quad (29)$$



Теперь получим систему уравнений, описывающих дисперсию гиромагнитных волн в диссипативной среде, в конечной форме. Для этого представим уравнение (5) в виде

$$F_1 - F_2 = 0. \quad (30)$$

После выделения действительной и мнимой частей (30) примет вид:

$$(F_{11} - F_{21}) + i(F_{12} - F_{22}) = 0. \quad (31)$$

Равенство (31) эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{C_{1P}C_{1M} + C_2^2}{C_{1P}^2 + C_2^2} - \frac{ug_D + vh_D}{g_D^2 + h_D^2} = 0, \\ \frac{C_2(C_{1P} - C_{1M})}{C_{1P}^2 + C_2^2} - \frac{vg_D - uh_D}{g_D^2 + h_D^2} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Все входящие в систему (32) величины могут быть выражены через компоненты волнового числа  $\eta$  и  $\xi$ , а также компоненты тензора магнитной проницаемости  $\mu$  и  $\mu_a$ .

Согласно работе [12], известен вид величин  $\mu'$ ,  $\mu''$ ,  $\mu'_a$  и  $\mu''_a$  в нашей геометрии задачи:

$$\begin{cases} \mu' = \frac{(\Omega_H^2 - \Omega^2 + \Omega_H)(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2(2\Omega_H\Omega)^2}, \\ \mu'' = -\alpha \frac{\Omega(\Omega_H^2 + \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2(2\Omega_H\Omega)^2}, \\ \mu'_a = \frac{\Omega(\Omega_H^2 - \Omega^2)}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2(2\Omega_H\Omega)^2}, \\ \mu''_a = -2\alpha \frac{\Omega_H\Omega^2}{(\Omega_H^2 - \Omega^2)^2 + \alpha^2(2\Omega_H\Omega)^2}. \end{cases} \quad (33)$$

Здесь  $\alpha$  — это параметр магнитной диссипации Гильберта, а  $\Omega$  и  $\Omega_H$  — это нормированные частота и магнитное поле, определяемые

выражениями:

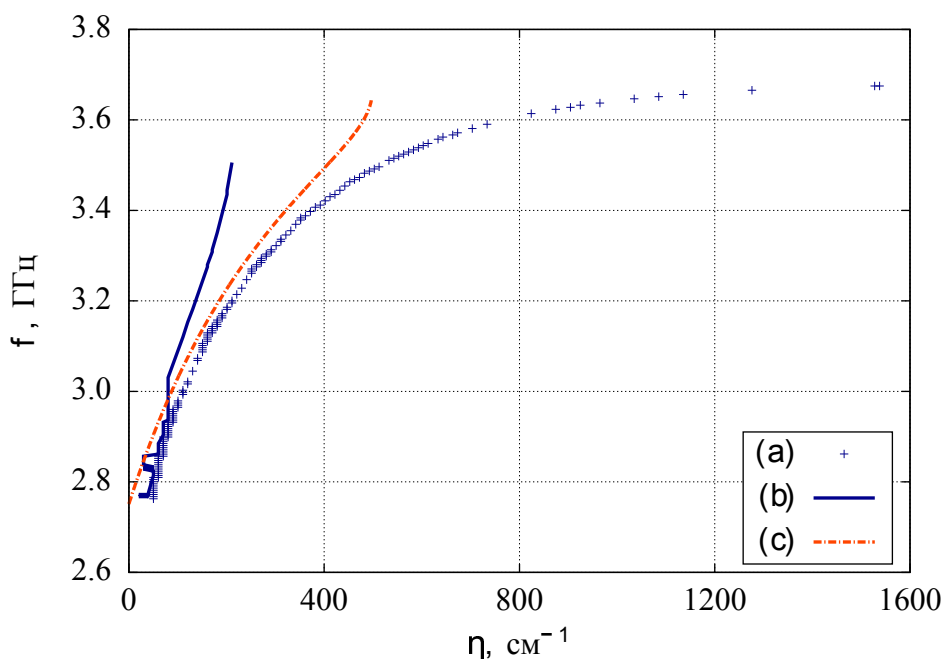
$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi M_0 \gamma}, \quad \Omega_H = \frac{H}{4\pi M_0}. \quad (34)$$

## 5. Анализ результатов

Применим полученные результаты для расчёта дисперсии электромагнитных волн в безграничной магнитной плёнке с затуханием. Зададимся параметрами, соответствующими железо-иттриевому гранату (ЖИГ) [8–10,12,13]. Будем считать параметры материала следующими: намагниченность насыщения  $4\pi M = 1750$  Гс, гиромагнитное отношение  $\gamma = 1.7593 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1} \cdot \text{Гс}^{-1}$ , параметр магнитного затухания  $\alpha = 0.05$ , относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1$ . Также выберем толщину плёнки равной  $d = 15$  мкм, а магнитное поле внутри материала  $H = 437.5$  Э. Данные параметры моделирования аналогичны значениям, используемым в работах [10,12,13].

Дисперсионные кривые, рассчитанные для заданных параметров согласно (32), показаны на рис. 2 (кривые (a) и (b)). Также на этом рисунке приведена кривая (c), представляющая собой закон дисперсии поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ), определённый для тех же параметров задачи, согласно методике изложенной в работе [13].

Из рис. 2 видно, что методика, разработанная в рамках данной статьи, позволяет выявить в диапазоне от 2.6 до 3.8 ГГц две ветви электромагнитных волн, близких по своим характеристикам к ПМСВ. Дисперсионная кривая (c), полученная в рамках более простого магнитостатического приближения проблемы [13], является, по-видимому, усреднением законов дисперсии (a) и (b). Более детально изучить вопрос соответствия полученных результатов магнитостатическому приближению



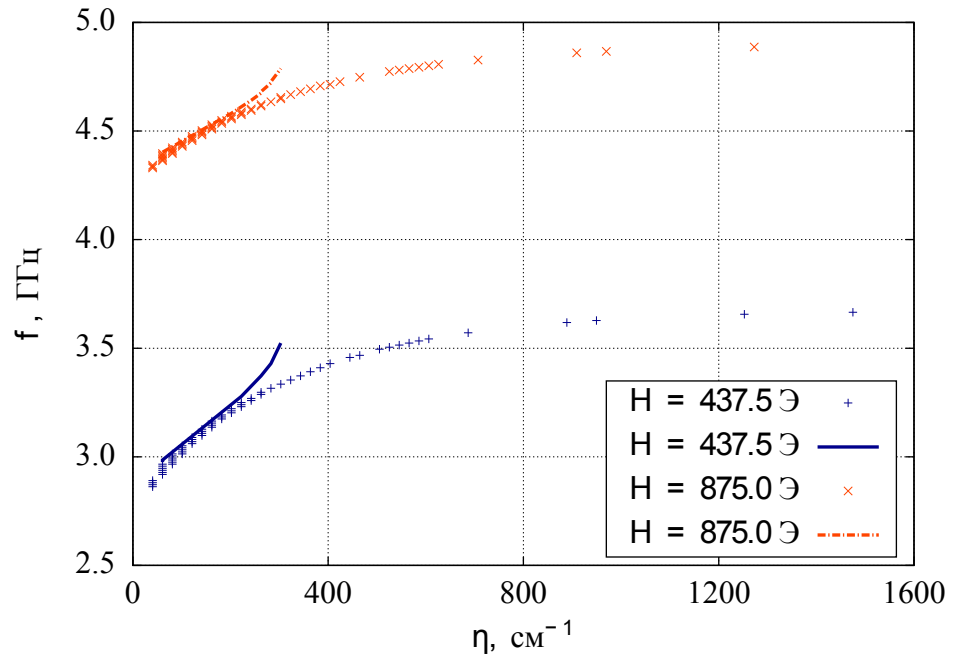
**Рис. 2.** Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся в плёнке ЖИГ

можно, опираясь уже не на дисперсионные соотношения, а на распределения электрических и магнитных полей в плёнке.

Влияние магнитного поля на дисперсию электромагнитных волн показано на рис. 3. При построении этого рисунка было использовано значение  $\alpha = 10^{-3}$ , а остальные параметры выбраны такими же, как для рис. 2.

Как следует из рис. 3, увеличение магнитного поля сдвигает спектр электромагнитных волн в более высокочастотную область и сужает его. Этот результат также согласуется с данными [13]. Также следует заметить, что это явление относится к обоим ветвям волн.

Рис. 4 иллюстрирует влияние на дисперсию толщины плёнки. Как и следовало ожидать, увеличение толщины плёнок уменьшает волновое

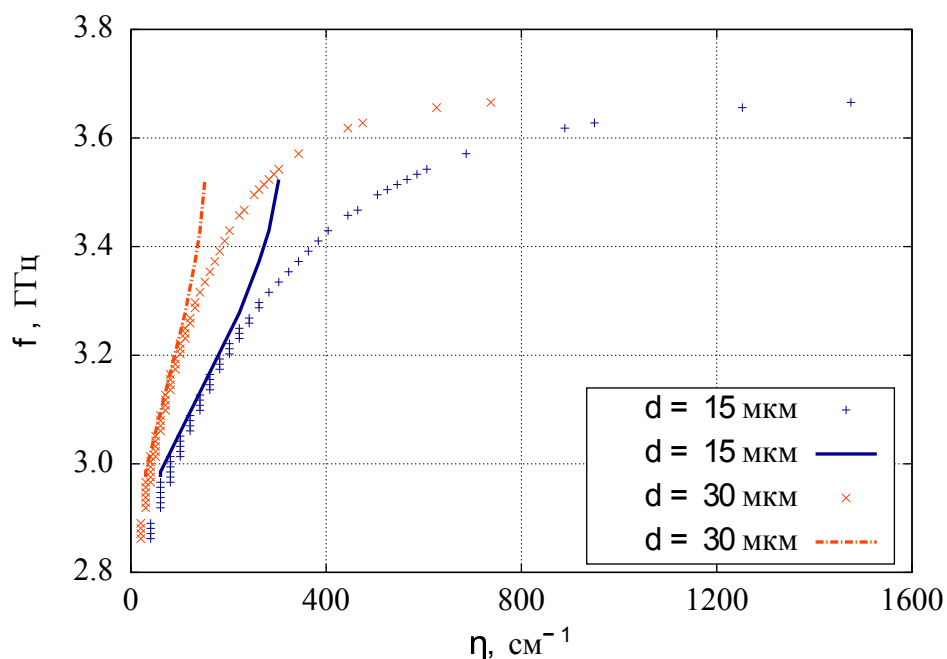


**Рис. 3.** Дисперсионные кривые, построенные при разных магнитных полях число, что тоже проявляется для обеих ветвей.

## 6. Выводы

Таким образом, в рамках данной работы в геометрии Дэймона—Эшбаха получена система дисперсионных уравнений для действительной и мнимой компонент волнового числа, учитывающая диссипацию в среде. Система в равной степени может быть использована для определения дисперсии волн как в рамках полной электродинамики, так и в магнитостатическом приближении.

Решение полученной системы может быть получено численными методами, что продемонстрировано на нескольких примерах. Обнаружены две ветви электромагнитных волн в частотном диапазоне поверхностных магнитостатических волн. Исследовано влияние магнитного поля



**Рис. 4.** Дисперсионные кривые для различных толщин плёнок ( $\alpha = 10^{-3}$ ,  $H = 437.5$  Э, остальные параметры описаны в тексте)

и толщины плёнок на дисперсию волн этих ветвей.

## Список литературы

1. **Виноградов А. П.** Электродинамика композитных материалов. М.: УРСС, 2001. 207 с.
2. **Barta O., et al.** Magneto-optics in bi-gyrotropic garnet waveguide // *Opto-electronics review*, 2001. Vol. 9. № 3. Pp. 320–325.
3. **Bukhanko A. F., Sukstanskii A. L.** Optics of a ferromagnetic superlattice with noncollinear orientation of equilibrium magnetization

vectors in layers // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2002. Vol. 250. Pp. 338–352.

4. **Dadoenkova N. N., et al.** Complex waveguide based on a magneto-optic layer and a dielectric photonic crystal // *Superlattices and Microstructures*, 2016. Vol. 100. Pp. 45–56.
5. **Eliseeva S. V., Sannikov D. G., Sementsov D. I.** Anisotropy, gyrotropy and dispersion properties of the periodical thin-layer structure of magnetic-semiconductor // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2010. Vol. 322. Pp. 3807–3816.
6. **Rychly J. et al.** Magnonic crystals — Prospective structures for shaping spin waves in nanoscale // *Low Temperature Physics*, 2015. Vol. 41. № 10. Pp. 745–759.
7. **Ерицян О. С.** Оптические задачи электродинамики гиротропных сред // *УФН*. 1982. Т. 138. № 4. С. 645–674.
8. **Шавров В. Г., Щеглов В. И.** Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 360 с.
9. **Damon R. W., Eshbach J. R.** Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // *J. Phys. Chem. Solids*, 1961. V. 19. № 3/4. Pp. 308–320.
10. **Келлер Ю. И., Макаров П. А., Шавров В. Г.** Дисперсионные свойства электромагнитных волн в касательно намагниченной

ферритовой пластине // *Журнал радиоэлектроники*. 2018. № 4. 50 с.

11. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228 с.
12. **Макаров П. А., Шавров В. Г., Щеглов В. И.** Дисперсия гиромагнитной волны в пластине феррита с диссипацией // *Журнал радиоэлектроники*. 2018. № 9. 50 с.
13. **Makarov P., Maltceva L., Kotov L., Shcheglov V.** Magnetostatic waves in a medium with damping // *EPJ Web of Conferences*, 2018. V. 185. Pp. 02012:1–3.

### Summary

**Makarov P. A., Ulyasheva M. A.** On the theory of dispersion of gyromagnetic waves in a medium with dissipation

Gyromagnetic waves propagating in a tangentially magnetized ferrite slab with bi-gyrotropic properties was considered. Dissipation of the magnetic permeability of the material was considered. In the Damon-Eshbach geometry a system of transcendental equations was obtained. This system determines the dispersion of the wave vector components.

*Keywords: gyromagnetic waves dispersion, dissipation.*

### References

1. **Vinogradov A. P.** *Elektrodinamika kompozitnykh materialov* (Electrodynamics of composite materials), М.: URSS, 2001, 207 p.

2. **Barta O., et al.** Magneto-optics in bi-gyrotropic garnet waveguide, *Opto-electronics review*, vol. 9, № 3, 2001, pp. 320–325.
3. **Bukhanko A. F., Sukstanskii A. L.** Optics of a ferromagnetic superlattice with noncollinear orientation of equilibrium magnetization vectors in layers, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 250, 2002, pp. 338–352.
4. **Dadoenkova N. N., et al.** Complex waveguide based on a magneto-optic layer and a dielectric photonic crystal, *Superlattices and Microstructures*, vol. 100, 2016, pp. 45–56.
5. **Eliseeva S. V., Sannikov D. G., Sementsov D. I.** Anisotropy, gyrotropy and dispersion properties of the periodical thin-layer structure of magnetic-semiconductor, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 322, 2010, pp. 3807–3816.
6. **Rychly J. et al.** Magnonic crystals — Prospective structures for shaping spin waves in nanoscale, *Low Temperature Physics*, vol. 41, № 10, 2015, pp. 745–759.
7. **Eritsyan O. S.** Opticheskiye zadachi elektrodinamiki girotropnykh sred (Optical problems in the electrodynamics of gyrotropic media), *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, v. 138, № 4, 1982, pp. 645–674.
8. **Shavrov V. G., Shcheglov V. I.** *Magnitostaticheskiye i elektromagnitnyye volny v slozhnykh strukturakh* (Magnetostatic and electromagnetic waves in complex structures), M.: FIZMATLIT, 2017, 360 p.



9. **Damon R. W., Eshbach J. R.** Magnetostatic modes of a ferromagnet slab, *J. Phys. Chem. Solids*, v. 19, № 3/4, 1961, pp. 308–320.
10. **Keller Yu. I., Makarov P. A., Shavrov V. G.** Dispersionnyye svoystva elektromagnitnykh voln v kasatel'no namagnichennoy feritovoy plastine (Dispersion properties of electromagnetic waves on in-plane magnetized ferrite plate), *Journal of radio electronics*, № 4, 2018, 50 p.
11. **Dwight H. B.** *Tablitsy integralov i drugiyе matematicheskiye formuly* (Tables of integrals and other mathematical data), M.: Science, 1973, 228 p.
12. **Makarov P. A., Shavrov V. G., Shcheglov V. I.** Dispersiya giromagnitnoy volny v plastine ferrita s dissipatsiyey (Dispersion of a gyromagnetic wave in a ferrite plate with dissipation), *Journal of radio electronics*, № 9, 2018, 50 p.
13. **Makarov P., Maltceva L., Kotov L., Shcheglov V.** Magnetostatic waves in a medium with damping, *EPJ Web of Conferences*, v. 185, 2018, p. 02012:1-3.

**Для цитирования:** Макаров П. А., Уляшева М. А. К теории дисперсии гиромагнитных волн в среде с диссипацией // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4 (33). С. 3–20.*

**For citation:** Makarov P. A., Ulyasheva M. A. On the theory of dispersion of gyromagnetic waves in a medium with dissipation, *Bulletin*

*of Syktyovkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics,*  
2019, 4 (33), pp. 3–20.

*СГУ им. Питирима Сорокина*

*Поступила 21.11.2019*