МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (32). 2019

УДК 372.851

ОБОБЩЕНИЕ В АНАЛИЗЕ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ

Е. Р. Мансурова, Э. Р. Низамова

В статье на примере темы «Первообразная и интеграл» рассматривается роль обобщения в анализе в повышении уровня математической подготовки учащихся общеобразовательной школы. Представлены задания по теме из учебных пособий по алгебре и началам анализа, используемых в настоящее время в школьном курсе математики, а также из дидактических материалов для профильных классов и материалов ЕГЭ.

Ключевые слова: обобщение, анализ, школа, профиль, интеграл, первообразная, производная, функция, ЕГЭ.

Известна [1–3] роль обобщений в математике в активизации мыслительной деятельности, развитии интеллектуальных способностей учащихся, повышении их уровня знаний и математической культуры.

В [4] рассматривается роль обобщений в формировании основных понятий по математическому анализу в вузе.

Рассмотрим обобщающие задания по теме «Первообразная и интеграл» в учебных пособиях по алгебре и анализу, рекомендованных общеобразовательной школе, а также из дидактических материалов для профильных классов и материалов ЕГЭ.

Задания на обобщение интеграла от непрерывной функции по конечному промежутку:

[5, с. 183] Вычислить $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Данная функция определена на полуинтервале $(-1; 0]$. Используя понятие интеграла от непрерывной функции на отрезке, рассматриваем интеграл на промежутке $[-1+\varepsilon; 0]$ при $\varepsilon > 0$. Тогда определённым интегралом от функции f от a до b назовём число $F(b) - \lim\limits_{x \to a} F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 0 - \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(\varepsilon - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

[5, с. 207] X.24 а) Найдите $\int\limits_{-1}^{1} x^2 R(x)\, dx$, где $R(x)$ — функция Римана, равная 0 во всех иррациональных точках и равная $\frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$ во всех рациональных точках указанного отрезка.

Функция Римана не является непрерывной функцией и функцией с конечным числом точек разрыва на промежутке, поэтому интеграл вычисляется с помощью сумм Дарбу по аналогии с доказательством интегрируемости функции $R(x)$ на отрезке $[0; 1]$ [5, с. 186]. Заметим, что интеграл можно вычислить и с использованием теории меры множеств и эквивалентности функции $R(x)$ на отрезке $[-1;\,1]$ нулевой функции [6].

[5, с. 207] X.24 б) Существует ли $\int\limits_0^1 \min\{1-R(x);\,D(x)\}\,dx$ (где $R(x)$ — функция Римана, $D(x)$ — функция Дирихле)?

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если}\, x - \text{рационально},\\ 0, & \text{если}\, x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

$$\min\{1-R(x);\,D(x)\} = \begin{cases} 1-\frac{1}{q}, & \text{если}\, x - \text{рационально},\\ 0, & \text{если}\, x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Рассуждаем, как в [5, с. 186]. Так как не выполняется необходимое и достаточное условие интегрируемости функции, то есть для любого $\varepsilon > 0$ не существует разбиений τ_1 и τ_2, таких, что $S_{\tau_1} - s_{\tau_2} < \varepsilon$, где S_{τ_1} и s_{τ_2} — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \min\{1-R(x);\,D(x)\}\,dx$ не существует.

Заметим, что рассматривая интеграл как интеграл Лебега и учитывая эквивалентность подынтегральной функции нулю на $[0;\,1]$, получим, что интеграл существует и равен нулю.

Задание на обобщение интеграла по конечному промежутку:

[5, с. 184] Найдём $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{x}\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \Big(-\frac{1}{b}+1\Big) = 1.$$

Интегралы с параметрами, в том числе на наименьшее и наибольшее значения интеграла, представлены в [7–9]:

[9, с. 28] $f(x) = \int\limits_0^x (1-t^2)\,dt$. Найдите $\int f(x)\,dx$.

$$\int\limits_0^x (1-t^2)\,dt = \Big(t - \frac{t^3}{3}\Big)\Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3}.$$

$$\int \Big(x - \frac{x^3}{3}\Big)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C, \quad C - \text{const}.$$

[7] 26.12. При каком положительном значении a определённый интеграл $\int\limits_0^a (6-2x)\,dx$ принимает наибольшее значение?

$\int\limits_0^a (6-2x)\,dx = 6a - a^2$. Функция $f(a)$ с учётом условия задачи определена на $\mathbb{R}_+$, где $f(a) = 6a - a^2$.

Находим стационарные точки функции $f(a)$.

$f'(a) = 6 - 2a = 0$, отсюда, $a = 3$.

При $a < 3$ $f'(a) > 0$, при $a > 3$ $f'(a) < 0$. Отсюда следует, что $a = 3$ — точка максимума. Так как на $\mathbb{R}_+$ $a = 3$ — единственная критическая точка (максимума), то [10, с. 373] при $a = 3$ интеграл принимает наибольшее значение.

[8] № 270. Найдите наименьшее и наибольшее значения интеграла: $\int\limits_0^a \sin\frac{x}{2}\,dx$.

$\int\limits_0^a \sin\frac{x}{2}\,dx = -2(\cos\frac{a}{2} - 1)$. Областью значений функции $\cos x$ является промежуток $[-1;\,1]$, тогда $0 \leqslant 1 - \cos\frac{a}{2} \leqslant 2$ и наибольшее значение интеграла равно 4, а наименьшее значение равно 0.

[9, с. 30] $f(y) = ky^2 - y + k$. При каких значениях k при любом a и при любом b, большем, чем a, выполняется неравенство $\int\limits_a^b f(y)\,dy > 0$?

По свойствам определённого интеграла $f(y) \geqslant 0$ на $[a;\,b]$, тогда $ky^2 - y + k \geqslant 0$ на этом промежутке. По свойству квадратичной функции:

$$\begin{cases} k > 0, \\ D = 1 - 4k^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем $k \geqslant 0,5$.

Связь понятий «интеграл», «производная», «геометрический смысл интеграла» просматривается, например, в заданиях [7–8].

[8] № 269. При каких значениях k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, будет наименьшей?

При использовании геометрического смысла интеграла площадь фигуры будет равна $\int\limits_{x_1}^{x_2}(kx+1-x^2-2x+3)\,dx$, где x_1, x_2 — точки пересечения параболы и прямой. Точка, в которой площадь фигуры будет наименьшей, будет критической для первообразной и нулём для подынтегральной функции, то есть одной из точек пересечения параболы и прямой. Учитывая, что подынтегральная функция положительна на указанном промежутке, имеем, что x_1 — точка, в которой площадь фигуры будет наименьшей. Точки пересечения линий определяются по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{k - 2 \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{где} \quad D = (k-2)^2 + 16.$$

Учитывая, что корни симметричны относительной прямой $x = \frac{k-2}{2}$ и хорда прямой, заключённой внутри параболы, делится точкой $(0;\, 1)$ пополам, будем иметь, что $k = 2$.

[7] 26.14. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, равна 8?

Используя геометрический смысл интеграла, будем иметь, что $S = \int\limits_0^a 2x^3\,dx = 8$. Решая уравнение, получим $a = \pm 2$.

Использование геометрического смысла интеграла для вычисления определённого интеграла представлено, например, в [8].

[8] 26.28. Вычислить, используя геометрический смысл интеграла: $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \sqrt{25-x^2}$. Получаем полуокружность с радиусом, равным 5, и центром в начале координат. По формуле площади круга найдём $S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{25}{2}\pi$.

Аналогично решается следующая задача.

[11] № 1044. Вычислить, используя геометрический смысл интеграла: $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{4x-x^2}\, dx$.

Получим уравнение окружности $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Тогда искомая площадь равна 2π.

[12] 6.35. а) Вычислить, пользуясь геометрическим смыслом интеграла: $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx$.

Учитывая, что $y = \sin x < 0$ на $[-\pi;\, 0]$, $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x\, dx = -S$. Тогда $S = \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx$. Отсюда имеем $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\, dx = -S + S = 0$.

В материалах ЕГЭ также встречаются задания, где используются понятия и «производная», и «первообразная», например:

[13] (Задание 7 № 323077). На рис. 1 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\, 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2;\, 4]$.

По определению первообразной, на интервале $(-3;\, 5)$ справедливо равенство $f(x) = F'(x)$. Следовательно, решениями уравнения $f(x) = 0$

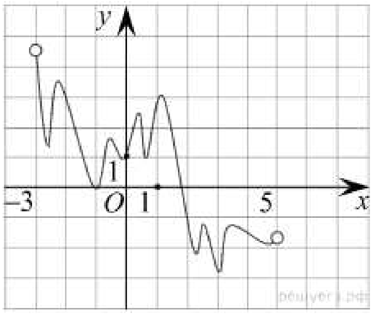

Рис. 1. График первообразной функции $f(x)$

являются стационарные точки; по геометрическому смыслу производной — это точки, в которых касательная к графику функции $F(x)$ параллельна оси Ox. Таким образом, на отрезке $[-2;\ 4]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет 10 решений.

[14] (Задание 7 № 323381). На рис. 2 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 20x^2 + 201x - \frac{5}{9}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

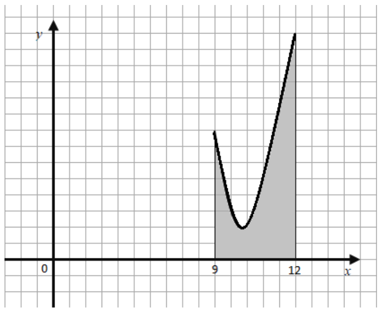

Рис. 2. График функции $f(x)$

По формуле Ньютона-Лейбница площадь фигуры $S = F(b) - F(a)$, получаем $S = F(12) - F(9) = 9$.

Выполнение таких заданий исключает формализм в усвоении материала и способствует повышению уровня математической подготовки учащихся по изучаемой теме.

Список литературы

1. **Давыдов В. В.** Виды обобщения в обучении. М.: Педагогическое общество России, 2000. С. 157–173.

2. **Колягин Ю. М.** Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2009. С. 86–95.

3. **Сойер У. У.** Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972. С. 37–47.

4. **Прозоровская С. Д., Филлипова Т. И., Кропачева Н. Ю.** Формирование основных понятий математического анализа на основе теоретического обобщения // *Сибирский педагогический журнал. 2012. № 8. С. 88–92.*

5. **Пратусевич М. Я.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Просвещение, 2010. 463 с.

6. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 2018. 560 с.

7. **Мерзляк А. Г.** Алгебра. 11 класс. Харьков: Гимназия, 2011. 431 с.

8. **Муравин Г. К.** Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. М.: Дрофа, 2013. 253 с.

9. **Рыжик В. И.** Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу для 10–11 классов. М.: Просвещение, 1997. 144 с.

10. **Мордкович А. Г.** Алгебра и начала анализа. 10 кл. М.: Мнемозина, 2009. 434 с.

11. **Мордкович А. Г.** Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. М.: Мнемозина, 2003. Ч. 2. 315 с.

12. **Никольский С. М.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Просвещение, 2009. 464 с.

13. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=183 (дата обращения: 15.11.19).

14. ALEXLARIN.NET [Электронный ресурс]. URL: http://alexlarin.net/ege20.html (дата обращения: 15.11.19).

Summary

Mansurova E. R., Nizamova E. R. Generalization in analysis as a means of improving the quality of mathematical preparation of students

The article considers the role of generalization in analysis in improving the level of mathematical training of secondary school students on the example of the topic «Primitive and integral». Tasks on the topic are presented from textbooks on algebra and the principles of analysis currently used in the school course in mathematics, as well as from didactic materials for specialized classes and materials of the exam.

Keywords: generalization, analysis, school, profile, integral, antiderivative, derivative, function, USE.

References

1. **Davydov V. V.** *Vidy obobshcheniya v obuchenii* (Types of generalization in learning), M.: Pedagogical Society of Russia, 2000, pp. 157–173.

2. **Kolyagin Yu. M.** *Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obshchaya metodika* (Methods of teaching mathematics in high school), General technique. Cheboksary: Publishing house of Chuvash. Univ., 2009, pp. 86–95.

3. **Sawyer W. W.** *Prelyudiya k matematike* (Prelude to mathematics), M.: Education, 1972, pp. 37–47.

4. **Prozorovskaya S. D., Filipova T. I., Kropacheva N. Yu.** Formirovaniye osnovnykh ponyatiy matematicheskogo analiza na osnove teoreticheskogo obobshcheniya (Formation of the basic concepts of mathematical analysis based on theoretical generalization), *Siberian Pedagogical Journal*, 2012, № 8, pp. 88–92.

5. **Pratusevich M. Ya.** *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass* (Algebra and the beginning of mathematical analysis, Grade 11), M.: Education, 2010, 463 p.

6. **Nathanson I. P.** *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* (The theory of functions of a real variable), St. Petersburg: Doe, 2018, 560 p.

7. **Merzlyak A. G.** *Algebra. 11 klass* (Algebra. Grade 11), Kharkov: Gymnasium, 2011, 431 p.

8. **Muravin G. K.** *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 kl* (Algebra and the beginning of mathematical analysis. 11 cl), M.: Bustard, 2013,253 p.

9. **Ryzhik V. I.** *Didakticheskiye materialy po algebre i matematicheskomu analizu dlya 10-11 klassov* (Didactic materials on algebra and mathematical analysis for grades 10-11), M.: Education, 1997, 144 p.

10. **Mordkovich A. G.** *Algebra i nachala analiza. 10 kl* (Algebra and the beginning of analysis. 10 cl), M.: Mnemozina, 2009, 443 p.

11. **Mordkovich A. G.** *Algebra i nachala analiza. 10-11 kl* (Algebra and the beginning of analysis. 10-11 cl), Ch. 2, M.: Mnemozina, 2003, 315 p.

12. **Nikolsky S. M.** *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass* (Algebra and the beginning of mathematical analysis, Grade 11), M.: Education, 2009, 446 p.

13. Reshu YEGE (I will solve the Unified State Exam) [Electronic resource]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=183 (accessed 11.15.19).

14. ALEXLARIN.NET [Electronic resource]. URL: http://alexlarin.net/ege20.html (accessed 11.15.19).

Для цитирования: Мансурова Е. Р., Низамова Э. Р. Обобщение в анализе как средство повышения качества математической подготовки учащихся // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 89–100.*

For citation: Mansurova E. R., Nizamova E. R. Generalization in analysis as a means of improving the quality of mathematical preparation of students, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 89–100.

Марийский государственный университет

Поступила 19.11.2019