ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 532

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н. А. Беляева, А. В. Надуткина

Построена математическая модель неизотермического напорного течения вязкой жидкости в круглой трубе. Численный анализ безразмерной модели основан на применении метода прогонки. Представлены графические результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: неизотермическое напорное течение, переменная вязкость, численный анализ, метод прогонки.

1. Постановка задачи

Рассматривается неизотермическое течение жидкости с постоянной вязкостью по каналу кругового сечения под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси трубы z:

$$p = p(z), \; b = -\frac{dp}{dz} = \text{const}\,. \tag{1}$$

Математическая модель [1] строится при следующих предположениях: считаем отличной от нуля лишь осевую составляющую скорости, зависящую в цилиндрических координатах от удаления r от оси трубы и времени t:

$$\vec{V} = (0, 0, V(r,t)); \tag{2}$$

зависимость вязкости от температуры $T = T(r,t)$ примем в виде

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \exp(-\beta(T - T_0)), \tag{3}$$

где T_0 — температура окружающей среды, μ_0 — значение вязкости при $T = T_0$; жидкость несжимаема, то есть

$$\rho = \mathrm{const};$$

в рассматриваемом случае течения (2) условие неразрывности $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ очевидно выполняется.

Из уравнения движения Навье – Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla)\vec{V} \right] = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{V} + 2(\operatorname{grad} \mu, \nabla)\vec{V} + \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \vec{V}$$

с учетом (1), (2) получим одну ненулевую проекцию на ось z:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu(T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) + b. \tag{4}$$

Уравнение баланса тепла с учетом диссипативного тепловыделения имеет вид:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} T \right) = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + \sigma_{ik}^{'} \frac{\partial V_i}{\partial x_k}, \tag{5}$$

где параметры течения c — теплоемкость, ρ — плотность жидкости, κ — коэффициент теплопроводности, будем считать постоянными; $\sigma_{ik}^{'}$ — вязкий тензор напряжений, который имеет одну ненулевую компоненту:

$$\sigma_{rz}^{'} = \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{6}$$

В проекциях на оси цилиндрической системы координат из уравнения (5) с учетом (6) получим:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu(T)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2. \tag{7}$$

Таким образом, соотношения (4) и (7), соответствующие начальные и граничные условия составят определяющую систему дифференциальных уравнений для нахождения скорости течения вязкой жидкости и температуры:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu(T)\frac{\partial V}{\partial r}\right) + b, \tag{8}$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu(T)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2, \tag{9}$$

начальные

$$t = 0: \ V = 0, \ T = T_0 \tag{10}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \ \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \tag{11}$$

$$V|_{r=R} = 0, \ T|_{r=R} = T_0. \tag{12}$$

Приведем систему (8) — (12) к безразмерному виду. Введем безразмерные параметры:

$$\theta = \beta(T - T_0); \ x = \frac{r}{R}, \ 0 \le r \le R; \ u = \frac{V\mu_0}{bR^2};$$

$$\tau = \frac{\kappa t}{c\rho R^2}, \ \tau \ge 0; \ \delta = \frac{R^4\beta b^2}{\kappa\mu_0}; \ \varepsilon = \frac{\kappa}{c\mu_0};$$

тогда из уравнений (8) — (12) получим систему безразмерных уравнений:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\exp(-\theta)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + \delta\exp(-\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \tag{14}$$

с начальными:

$$\tau = 0:\ u = 0,\ \theta = 0 \tag{15}$$

и граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{16}$$

$$u|_{x=1} = 0,\ \theta|_{x=1} = 0. \tag{17}$$

Здесь u — безразмерная скорость, θ — безразмерная температура, x — безразмерная пространственная координата, τ — безразмерное время, ε и δ — безразмерные параметры жидкости.

2. Метод численного решения

Применим метод прогонки [2] для решения задачи (13) — (17). Введем пространственно-временную сетку (x_i, τ_j):

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1,$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \mathrm{const},\ i \in 0..n;$$

$$\tau_j = j\Delta\tau \geq 0,\ \Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1},\ j \in 0..m$$

— временной шаг; заменим производные в уравнениях (13) — (17) соответствующими разностными соотношениями:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x},\ \frac{\partial f}{\partial\tau} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta\tau},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2},\end{gathered} \tag{18}$$

из уравнения (13) получим:

$$u_{i,j}\left[1+\frac{\Delta\tau}{\varepsilon}\frac{k^1_{\theta,j-1}(k^2_{\theta,j-1}+x_i)}{x_i\Delta x^2}\right]=u_{i+1,j}\frac{\Delta\tau}{\varepsilon}\frac{k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1}}{x_i\Delta x^2}+ \\ +u_{i-1,j}\frac{\Delta\tau}{\varepsilon}\frac{k^1_{\theta,j-1}x_i}{x_i\Delta x^2}+g_{i,j-1}, \tag{19}$$

где

$$g_{i,j-1}=u_{i,j-1}+\frac{\Delta\tau}{\varepsilon},$$

значения функции $\theta_{i,j}$ берем с предыдущего слоя $j-1$, так как они неизвестны:

$$k^1_{\theta,j-1}=\exp(-\theta_{i,j-1}),$$

$$k^2_{\theta,j-1}=\Delta x-x_i\theta_{i+1,j-1}+x_i\theta_{i,j-1}+x_i.$$

Для нахождения сеточного значения функции $u_{i,j}$ по формуле (19) воспользуемся прогоночной формулой:

$$u_{i+1,j}=E_{i+1}u_{i,j}+F_{i+1,j}, \tag{20}$$

где $E_{i+1},\ F_{i+1,j}$ — прогоночные коэффициенты. Подставим (20) в (19) и получим выражение для искомой функции $u_{i,j}$ в следующем виде:

$$u_{i,j}=u_{i-1,j}\frac{\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}x_i}{\varepsilon x_i\Delta x^2+\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}(k^2_{\theta,j-1}+x_i)-E_{i+1}\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1}}+ \\ +\frac{F_{i+1,j}\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1}+\varepsilon x_i\Delta x^2 g_{i,j-1}}{\varepsilon x_i\Delta x^2+\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}(k^2_{\theta,j-1}+x_i)-E_{i+1}\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1}}. \tag{21}$$

Воспользуемся следствием прогоночной формулы:

$$u_{i,j}=E_iu_{i-1,j}+F_{i,j}, \tag{22}$$

и из (21) получим выражения для прогоночных коэффициентов $E_i,\ F_{i,j}$:

$$E_i=\frac{\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}x_i}{\varepsilon x_i\Delta x^2+\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}(k^2_{\theta,j-1}+x_i)-E_{i+1}\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1}}; \tag{23}$$

$$F_{i,j} = \frac{F_{i+1,j}\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1} + \varepsilon x_i \Delta x^2 g_{i,j-1}}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k^1_{\theta,j-1}(k^2_{\theta,j-1} + x_i) - E_{i+1}\Delta\tau k^1_{\theta,j-1}k^2_{\theta,j-1}}; \tag{24}$$

Для уравнения (14):

$$\begin{gathered}\theta_{i,j}\left[1 + \frac{\Delta\tau}{x_i\Delta x^2}(\Delta x + 2x_i)\right] = \theta_{i+1,j}\frac{\Delta\tau}{x_i\Delta x^2}(\Delta x + x_i) + \\ +\theta_{i-1,j}\frac{\Delta\tau}{x_i\Delta x^2}x_i + h_{i,j-1},\end{gathered} \tag{25}$$

где

$$h_{i,j-1} = \theta_{i,j-1} + \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}\delta k^1_{\theta,j-1}(u^2_{i+1,j} - 2u_{i+1,j}u_{i,j} + u^2_{i,j}).$$

Воспользуемся прогоночной формулой:

$$\theta_{i+1,j} = G_{i+1}\theta_{i,j} + H_{i+1,j}, \tag{26}$$

где $G_{i+1},\ H_{i+1,j}$ — прогоночные коэффициенты. Подставим (26) в (25) и получим выражение для искомой функции $\theta_{i,j}$:

$$\begin{gathered}\theta_{i,j} = \theta_{i-1,j}\frac{\Delta\tau x_i}{x_i\Delta x^2 + \Delta\tau(\Delta x + 2x_i) - G_{i+1}\Delta\tau(\Delta x + x_i)} + \\ + \frac{H_{i+1,j}\Delta\tau(\Delta x + x_i) + x_i\Delta x^2 h_{i,j-1}}{x_i\Delta x^2 + \Delta\tau(\Delta x + 2x_i) - G_{i+1}\Delta\tau(\Delta x + x_i)}.\end{gathered} \tag{27}$$

Следствие (26):

$$\theta_{i,j} = G_i\theta_{i-1,j} + H_{i,j}, \tag{28}$$

из (27) получим выражения для прогоночных коэффициентов $G_i,\ H_{i,j}$:

$$G_i = \frac{\Delta\tau x_i}{x_i\Delta x^2 + \Delta\tau(\Delta x + 2x_i) - G_{i+1}\Delta\tau(\Delta x + x_i)}, \tag{29}$$

$$H_{i,j} = \frac{H_{i+1,j}\Delta\tau(\Delta x + x_i) + x_i\Delta x^2 h_{i,j-1}}{x_i\Delta x^2 + \Delta\tau(\Delta x + 2x_i) - G_{i+1}\Delta\tau(\Delta x + x_i)}. \tag{30}$$

Начальные условия (15) позволяют определить сеточные значения в нулевом слое:

$$u_{i,0} = 0,\ \theta_{i,0} = 0.$$

В каждой точке j-го слоя, двигаясь справа налево (от i к $i-1$), определяем прогоночные коэффициенты $(E_i, F_{i,j})$, $(G_i, H_{i,j})$ с учетом правого граничного условия (17), из которого получаем, что

$$u_{n,j} = 0,\ \theta_{n,j} = 0,$$

но, с другой стороны,

$$u_{n,j} = E_n u_{n-1,j} + F_{n,j},$$

$$\theta_{n,j} = G_n \theta_{n-1,j} + H_{n,j},$$

следовательно,

$$E_n = 0,\ F_{n,j} = 0,$$

$$G_n = 0,\ H_{n,j} = 0.$$

Затем, двигаясь слева направо, с учетом левого граничного условия (16) находим целевые функции $u_{0,j}$, $\theta_{0,j}$:

$$u_{1,j} = u_{0,j},\ \theta_{1,j} = \theta_{0,j},$$

с другой стороны,

$$u_{1,j} = E_1 u_{0,j} + F_{1,j},$$

$$\theta_{1,j} = G_1 \theta_{0,j} + H_{1,j},$$

откуда

$$u_{0,j} = \frac{F_{1,j}}{1 - E_1},$$

$$\theta_{0,j} = \frac{H_{1,j}}{1 - G_1}.$$

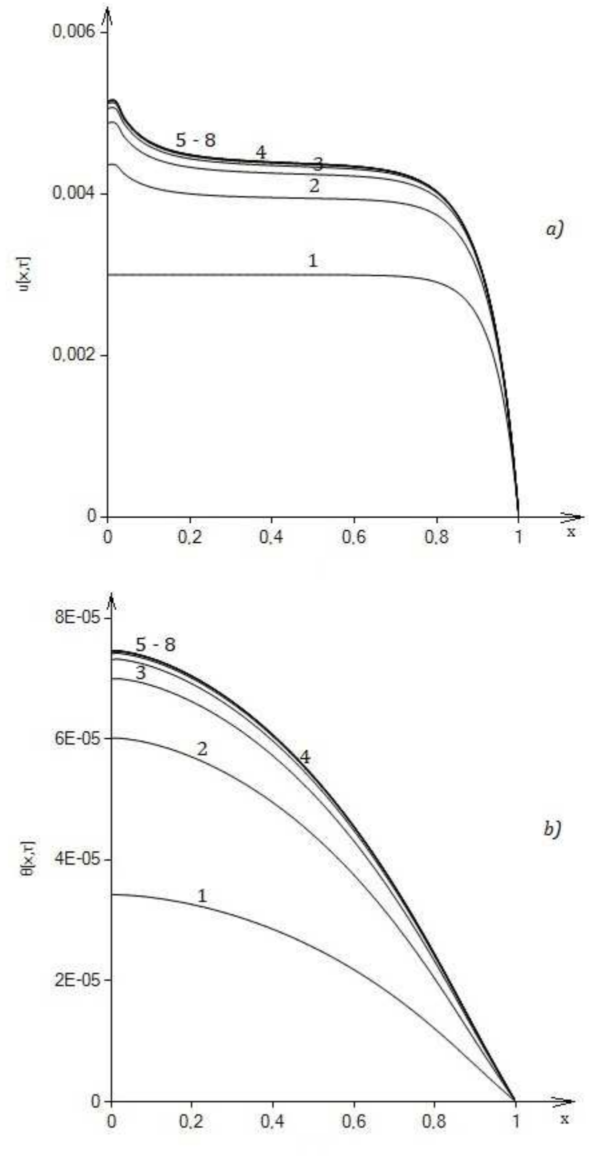

Рис. 1. Пространственно-временное распределение скорости (a) и температуры (b); $n = 50$, $\Delta\tau = 0.31$, $\varepsilon = 100$, $\delta = 0.1$; 1(τ=0.31), 2(0.62), 3(0.93), 4(1.24), 5(1.55), 6(1.86), 7(2.17), 8(99.82)

3. Результаты численных экспериментов

На рис. 1a изображено пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$, на рис. 1b пространственно-временное распределение температуры $\theta(x, \tau)$. Представлены (рис. 1a, b) некоторые результаты проведенного численного эксперимента при варьировании параметров задачи. В частности, варьировалось число точек разбиения пространственной оси n и временной шаг $\Delta\tau$. Установление стационарного режима при выбранных значениях параметров задачи совпадает с качественными исследованиями стационарных режимов течения, рассмотренных в работе [3].

Таким образом, в работе построена и обезразмерена математическая модель неизотермического напорного течения вязкой жидкости в круглой трубе. Составлены: алгоритм численного расчета, основанный на применении метода прогонки; программа численного анализа на языке C#. Проведен численный эксперимент при варьировании параметров задачи.

Список литературы

1. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2014. 116 с.

2. **Беляева Н. А.** Основы гидродинамики в моделях : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2011. 147 с.

3. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Summary

Belyaeva N. A., Nadutkina A. V. Nonisothermal flow of a viscous fluid

A mathematical model of the nonisothermal pressure flow of a viscous fluid in a round pipe is considered. The numerical analysis of the dimensionless model is based on the application of the sweep method. Graphical results of numerical experiments are presented.

Keywords: nonisothermal pressure flow, variable viscosity, numerical analysis, sweep method.

References

1. **Belyaeva N. A.** *Matematicheskoye modelirovaniye: uchebnoye posobiye* (Mathematical modeling: a training manual), Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2014, 116 p.

2. **Belyaeva N. A.** *Osnovy gidrodinamiki v modelyakh: uchebnoye posobiye* (Fundamentals of hydrodynamics in models: a training manual), Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2011, 147 p.

3. **Khudyaev S. I.** *Porogovyye yavleniya v nelineynykh uravneniyakh* (Threshold phenomena in nonlinear equations), M.: Fizmatlit, 2003, 272 p.

Для цитирования: Беляева Н. А., Надуткина А. В. Неизотермическое течение вязкой жидкости // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 20–30.*

For citation: Belyaeva N. A., Nadutkina A. V. Non-isothermal flow of a viscous fluid, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 20–30.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 25.11.2019*