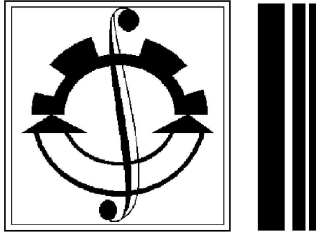


ISSN 1992-2752



Серия 1:

Математика

Механика

Информатика

Вестник Сыктывкарского университета

3(32) ВЫПУСК **19**

ВЕСТНИК СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	СЕРИЯ 1: <i>Математика</i> <i>Механика</i> <i>Информатика</i>	12+ ISSN 1992-2752 ВЫПУСК 3 (32) 2019
--	--	--

Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. — Выпуск 3 (32). 2019. — 120 с.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

д.п.н., и.о. ректора ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина» Сотникова О.А.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР:

Ермоленко А.В., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Асланов Р.М., к.ф.-м.н., д.п.н., профессор (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан),

Беляева Н.А., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),

Головач П.А., к.ф.-м.н., доцент (Университет Бергена, Норвегия),

Калинин С.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),

Колпак Е.П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),

Котов Л.Н., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Малоземов В.Н., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),

Одинец В.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Попов Н.И., д.п.н., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Певный А.Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Петров Н.Н., д.ф.-м.н., профессор (УдмГУ),

Петраков А.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Рудикова Л.В., к.ф.-м.н., доцент (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь),

Тихомиров А.Н., д.ф.-м.н., профессор (Коми НЦ УрО РАН),

Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕДАКЦИЯ:

Гудырева Л.В., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Котелина Н.О., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Хозяинов С.А., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Юркина М.Н. (СГУ им. Питирима Сорокина)

АДРЕС РЕДАКЦИИ

ВЕСТНИКА СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55

Тел. (8212)390-308.

Электронный адрес: https://syktsu.ru/_fac/math/vestnik/site/index.htm

Свободная цена

© ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2019.

Содержание

Хроника университетской жизни

Ермоленко А. В. *О серии конференций «Математическое моделирование и информационные технологии»* 3

Гольчевский Ю. В., Ермоленко А. В., Котелина Н. О., Осипов Д. А. *О проведении Чемпионата WorldSkills в Сыктывкарском университете* 13

Прикладная математика и механика

Беляева Н. А., Надуткина А. В. *Неизотермическое течение вязкой жидкости* 20

Чернов В. Г. *Принятие решений в условиях неопределенности при нечетких лингвистических оценках ситуации* . 31

Информатика

Гарбузов П. А., Гашин Р. А. *Проектирование, разработка и внедрение комплексной автоматизированной системы управления автохозяйством* 46

Носов Л. С., Пипуныров Е. Ю. *Устройство поточного шифрования на основе ПЛИС* 62

Методические материалы

Дорофеев С. Н., Наземнова Н. В. *Методические особенности обучения старшеклассников распознаванию геометрических образов* 77

Мансурова Е. Р., Низамова Э. Р. *Обобщение в анализе как средство повышения качества математической подготовки учащихся* 89

Наставник-ученик

Котелина Н. О., Матвийчук Б. Р. *Кластеризация изображения методом k -средних* 101

Персоналии 113

ХРОНИКА УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ЖИЗНИ

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 51

О СЕРИИ КОНФЕРЕНЦИЙ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

А. В. Ермоленко

Статья посвящена серии конференций по математическому моделированию и информационным технологиям в Сыктывкарском университете. Обосновывается значение конференции для развития науки и привлечения молодежи к научным исследованиям.

Ключевые слова: научная конференция, Сыктывкар, математическое моделирование, информационные технологии.

В период с 7 ноября по 9 ноября 2019 года Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина в третий раз провёл Национальную (Всероссийскую) научную конференцию «Математическое моделирование и информационные технологии».

Впервые данная конференция была проведена в 2017 году. Тематика I научной конференции «Математическое моделирование и инфор-

мационные технологии» [1] определена деятельностью **Евгения Ильича Михайловского** [2], являющегося ярким представителем научной школы оболочек В. В. Новожилова [3; 4]. Е. И. Михайловский проработал в Сыктывкарском университете более 30 лет, внес существенный вклад в развитие теории пластин и оболочек, принимал активное участие в информатизации как университета, так и Республики Коми, его ученики и сегодня работают в Сыктывкарском университете.

Всего в конференции 2017 года приняли участие 72 человека из ближнего зарубежья и 4-х регионов России.

II конференция 2018 года проведена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-01-20105. При этом было решено расширить тематику конференции до тематики исследований института точных наук и информационных технологий Сыктывкарского университета [5]. В работе конференции 2018 года приняли участие уже 130 человек из 14 регионов России.

В 2019 году в конференции [6] приняли участие 107 человек из 11 регионов России. III конференция была дополнена еще одной секцией, в результате текущий формат конференции предполагает работу по 9 научным секциям¹:

1. Математическое моделирование и механика (2017).
2. Математическое моделирование в физических процессах (2019).
3. Математические методы в экономике и управлении (2017).
4. Моделирование в приложениях (2017).

¹В скобках указан первый год проведения секции.

5. Информационные технологии в образовании (2017).
6. Математическое моделирование в информационной безопасности (2018).
7. Технологии создания и современные направления в развитии программного обеспечения (2017).
8. Фундаментальные проблемы математики (2017).
9. Методика преподавания математики и информатики (2018).



Пленарное заседание III научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии», 2019 год

С целью привлечения молодежи к научным исследованиям начиная с 2018 года в рамках конференции «Математическое моделирование и

информационные технологии» Сыктывкарский университет стал организовывать Молодежные научные школы. Формат школы не ограничивается только чтением лекций, он предполагает также проведение мастер-классов, круглых столов, обсуждение докладов на молодежных секциях. Так, в рамках школы в 2018 году прочитаны 3 открытые лекции:

- Предельные теоремы для случайных матриц (А. Н. Тихомиров – д.ф.-м.н., профессор).
- О публикации научных статей в изданиях, входящих в международные базы данных (С. Г. Григорьев – д.п.н., профессор).
- Применение логистической регрессии в информационной безопасности (Л. С. Носов – к.ф.-м.н., доцент).

Кроме лекций Н. О. Котелиной был проведен мастер-класс на тему «Администрирование соревнований на платформе Yandex.Contest».

В рамках Молодежной школы в 2019 году были проведены следующие мероприятия:

- Круглый стол «Подготовка будущих учителей математики и информатики в условиях реализации национального проекта "Образование"». Модераторы: Н. И. Попов – д.п.н., профессор, Е. В. Яковлева.
- Лекция «Математика футбольного мяча» (И. И. Баженов – к.ф.-м.н., доцент).

- Лекция «Docker – от контейнеров к микросервисам» (Л. С. Носов – к.ф.-м.н., доцент).
- Секция «Молодёжь науке».

Всего Молодежную школу за два года посетили более 80 человек.

Двухлетний опыт проведения данной школы показал, что молодежи интересно посещение школы, их больше интересуют практические и популярные мероприятия, чем строго научные. Участие в конференции для части студентов стало толчком к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Интерес к конференции обуславливается ее актуальностью, а именно:

- возможностью развития научных исследований в области математического моделирования и информационных технологий;
- установлением и укреплением связей между учеными различных регионов России и зарубежья;
- возможностью познакомить молодежь с современным состоянием дел в области математического моделирования и информационных технологий с последующим привлечением их к научным исследованиям.

Важно отметить, что проводимые конференции способствуют решению следующих фундаментальных научных проблем в области:

- уточненных теорий пластин и оболочек, ориентированных на решение контактных задач со свободной границей;

- теории термовязкоупругости;
- комбинаторики;
- теории нечетких множеств;
- теории случайных матриц и ее применения;
- исследования в теории полукольц;
- проектирования и разработки информационных систем.



III научная конференция «Математическое моделирование и информационные технологии», 2019 год

Конференции имеют и большую практическую направленность. Большой интерес из года в год вызывают секции «Информационные технологии в образовании», «Технологии создания и современные направления в развитии программного обеспечения», «Методика преподавания математики и информатики».

Опыт проведения конференций показал, что востребовано и неформальное общение. С этой целью в рамках конференций были организованы пешая экскурсия по Сыктывкару, поездка в Финно-угорский этнопарк, посещение Ботанического сада Сыктывкарского университета. Участники конференции всегда заинтересованы в фотосъемке, поэтому организаторы уделяют этому обстоятельству особое внимание. На фото приведены рабочие моменты пленарного заседания 2019 года.

По окончании конференции традиционно подводятся итоги, один из которых стал уже традиционным – «Конференции быть!».

Список литературы

1. Математическое моделирование и информационные технологии : материалы Международной научной конференции (10-11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар) / отв. ред. А. В. Ермоленко. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2017. 162 с.
2. **Ермоленко А. В.** Научная работа с Евгением Ильичем // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 4–10.*
3. **Михайловский Е. И.** Школа механики академика Новожилова. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2005. 172 с.
4. **Черных К. Ф., Михайловский Е. И., Никитенков В. Л.** Об одной ветви научной школы Новожилова (Новожилов – Черных –

Михайловский – Никитенков). Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2002. 147 с.

5. Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (6–8 декабря 2018 г., г. Сыктывкар) : сборник материалов / отв. ред. А. В. Ермоленко. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2018. 161 с.
6. Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (7–9 ноября 2019 г., г. Сыктывкар) : сборник материалов [Электронный ресурс] / отв. ред. А.В. Ермоленко. Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. 1 опт. компакт-диск (CD-ROM).

Summary

Yermolenko A. V. On the series of conferences «Mathematical modeling and information technology»

The article is devoted to a series of conferences on mathematical modeling and information technology at the Syktyvkar University. The significance of the conference for the development of science and the involvement of young people in scientific research is substantiated.

Keywords: scientific conference, Syktyvkar, mathematical modeling, information technology.

References

1. Matematicheskoye modelirovaniye i informatsionnyye tekhnologii : materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Mathematical modeling and information technology: materials of the International Scientific Conference), November 10-11, 2017, Syktyvkar / Ed. A. V. Yermolenko, Syktyvkar: Publishing House of SSU named after Pitirim Sorokin, 2017, 162 p.
2. **Yermolenko A. V.** Nauchnaya rabota s Yevgeniyem Il'ichem (Scientific work with Yevgeny Ilyich), *Bulletin of Syktyvkar University*, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2017, № 3 (24), pp. 4–10.
3. **Mikhailovskii E. I.** *Shkola mekhaniki akademika Novozhilova* (The Novozhilov School of Mechanics). Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2005, 172 p.
4. **Chernykh K. F., Mikhailovskii E. I., Nikitenkov V. L.** *Ob odnoy vetvi nauchnoy shkoly Novozhilova (Novozhilov – Chernykh – Mikhaylovskiy – Nikitenkov)* (About one branch of the scientific school of Novozhilov (Novozhilov – Chernykh – Mikhailovsky – Nikitenkov)). Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar University, 2002, 47 p.
5. Matematicheskoye modelirovaniye i informatsionnyye tekhnologii: Natsional'naya (Vserossiyskaya) nauchnaya konferentsiya (Mathematical modeling and information technology: materials of the International Scientific Conference), December 6-8, 2018, Syktyvkar / Ed.

A. V. Yermolenko, Syktyvkar: Publishing House of SSU named after Pitirim Sorokin, 2018, 161 p.

6. Matematicheskoye modelirovaniye i informatsionnyye tekhnologii: Natsional'naya (Vserossiyskaya) nauchnaya konferentsiya (National (All-Russian) Scientific Conference), November 7-9, 2019, Syktyvkar: a collection of materials in [Electronic resource]: a textual scientific electronic publication on a CD / rev. ed. A.V. Yermolenko, Syktyvkar: Publishing house of SSU im. Pitirim Sorokin, 2019.1 opt. compact disk (CD-ROM).

Для цитирования: Ермоленко А. В. О серии конференций «Математическое моделирование и информационные технологии» // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 3–12.*

For citation: Yermolenko A. V. On the series of conferences «Mathematical modeling and information technology», *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 3–12.

ХРОНИКА УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ЖИЗНИ

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 51

О ПРОВЕДЕНИИ ЧЕМПИОНАТА WORLDSKILLS В СЫКТЫВКАРСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

*Ю. В. Гольчевский, А. В. Ермоленко,
Н. О. Котелина, Д. А. Осипов*

Статья посвящена проведению V Открытого регионального чемпионата «Молодые профессионалы» (WorldSkills Russia) Республики Коми в Сыктывкарском университете.

Ключевые слова: WorldSkills, чемпионат.

В апреле 2019 года СГУ имени Питирима Сорокина принял участие и стал победителем Конкурсного отбора на предоставление грантов из федерального бюджета в рамках реализации мероприятия «Государственная поддержка профессиональных образовательных организаций в целях обеспечения соответствия их материально-технической базы современным требованиям» федерального проекта «Молодые профессионалы» (Повышение конкурентоспособности профессионального образования)» национального проекта «Образование» (лот «Информационно-коммуникационные технологии»).

14 Гольчевский Ю. В., Ермоленко А. В., Котелина Н. О., Осипов Д. А.

Участие в проекте «Молодые профессионалы» позволило создать в университете 5 мастерских по следующим компетенциям:

1. Программные решения для бизнеса.
2. Разработка компьютерных игр и мультимедийных приложений.
3. Сетевое и системное администрирование.
4. Веб-дизайн и разработка.
5. Машинное обучение и большие данные.

Мастерская — структурное подразделение Университета, оснащенное современной материально-технической базой, соответствующей требованиям инфраструктурных листов WorldSkills Russia¹, для обеспечения навыко-ориентированной подготовки обучающихся в соответствии с современными стандартами и передовыми технологиями, включая стандарты WorldSkills Russia.

В период с 2 декабря по 6 декабря 2019 года 15 участников из Республики Коми, 2 — из Архангельской области, 1 — из Москвы продемонстрировали свои профессиональные навыки по компетенциям «Веб-дизайн и разработка», «Сетевое и системное администрирование» на базе мастерских университета² в рамках проведения V Открытого регионального чемпионата «Молодые профессионалы» (WorldSkills Russia) Республики Коми.

Тематика заданий и инструментарий проводимых Союзом Worldskills чемпионатов постоянно актуализируются с учетом появляющихся тех-

¹Сайт WorldSkills Russia. URL: <https://worldskills.ru/>

²Авторы статьи входили в число экспертов, оценивающих навыки по представленным двум компетенциям.

нологий и потребностей рынка. Конкурсные задания с учетом отводимого участникам времени и ограничениями на использование источников информации являются заведомо сложными даже для профессионалов, работающих в данной отрасли. Как правило, задания региональных чемпионатов с необходимыми изменениями повторяют задания финала Национального чемпионата «Молодые профессионалы» (WorldSkills Russia).

Сначала остановимся более подробно на задачах и инструментарии компетенции «Веб-дизайн и разработка», где участники соревновались в течение трех дней.

Так, в первый день требовалось реализовать игру. Технологии, которые нужно было использовать в этом модуле, — HTML5, CSS3, JavaScript, jQuery, PHP и, конечно, графический дизайн на базе программ пакета Adobe. Необходимо было реализовать дизайнерское решение и функционал игры. Медиаданные и шрифты для разработки игры были предоставлены организаторами.

Во второй день от участников требовалось выполнить задания двух модулей, которые касались разработки клиентской и серверной части фотосервиса. В первой половине дня участники разрабатывали интерфейс пользователя, делали верстку, писали код на стороне клиента. Технологии этого модуля: дизайн, верстка, JavaScript. Во второй половине дня от них требовалось реализовать RESTful API для фотосервиса, который позволил бы регистрироваться, загружать фотографии, модифицировать их и делиться ими с другими пользователями. Технологии этого модуля: PHP, Python. Разрешалось использовать фреймворки Yii 2.0

16 Гольчевский Ю. В., Ермоленко А. В., Котелина Н. О., Осипов Д. А.

basic, Laravel 5, Django.

Задание третьего дня включало разработку сайта для IT-курсов на базе использования системы управления контентом WordPress. При этом требовалось разработать необходимые по условию задания плагины.

Подводя итоги, можно сказать, что наиболее хорошо участники справились с версткой в первый и второй день, неплохо также получилось создать сайт с использованием WordPress. Конкурс показал, что требуется обратить внимание на разработку и использование серверных технологий.

Распространенными недостатками, выявленными при проверке заданий, связанными с версткой и разработкой на стороне клиента, были ошибки правил написания кода, например отсутствие тега `<!DOCTYPE>`, недостатки адаптации страниц под мобильные устройства, неправильный выбор компонентов формы. По субъективным впечатлениям от дизайнерских решений участников, выигрышно смотрелись работы, которые использовали фреймворки для создания UI, например Bootstrap.

В рамках соревнований на площадке компетенции «Сетевое и системное администрирование» в ходе выполнения модулей А «Пусконаладка инфраструктуры на основе ОС семейства Linux» и В «Пусконаладка телекоммуникационного оборудования» необходимо было настроить сервисы в локальной сети на основе операционных систем семейств Windows и Linux. Задание модуля С «Пусконаладка телекоммуникационного оборудования» заключалось в настройке коммутации, маршру-

тизации и механизмов безопасности на основе оборудования компании Cisco.

Наиболее сложными для многих участников оказались задания модулей А и С. Приведем пример допущенной несколькими участниками грубой ошибки по модулю С. Недостаточно хорошо изучив схему коммуникации коммутаторов, маршрутизаторов и межсетевого экрана, блокировали подключение по протоколу telnet. Далее настроили только протокол ssh, не настроив этот протокол на устройствах, подключенных по коммутации дальше, и, соответственно, отрезали себе возможность подключения к этим устройствам. Приходилось сбрасывать устройства в первоначальные настройки, что оборачивалось потерей времени.

Причиной большого количества ошибок по компетенции «Сетевое и системное администрирование», на наш взгляд, является нехватка современного серверного и сетевого оборудования для учебных целей в образовательных организациях. Появившаяся в СГУ им. Питирима Сорокина Мастерская по компетенции «Сетевое и системное администрирование» позволит частично решить эту проблему.

К положительным моментам Чемпионата можно отнести теплую атмосферу на площадках, возможность получения нового опыта, новые знакомства как между участниками, так и экспертами.

Подводя итог, сделаем следующие выводы:

1. Требуется уделять особое внимание на приобретение практических навыков работы при подготовке к подобным Чемпионатам.
2. Подготовку обучающихся необходимо проводить с учетом ориентированных на развитие профессиональных навыков современных

18 Гольчевский Ю. В., Ермоленко А. В., Котелина Н. О., Осипов Д. А.

стандартов, включая WorldSkills. Тем более, что появившаяся материальная база позволяет это делать на самом высоком уровне.

3. Необходимо привлекать, заинтересовывать обучающихся к участию в подобных конкурсах, наращивать опыт как студентов, так и преподавателей за счет участия в подобных чемпионатах. Это требует разработки эффективной системы мотивации.



Фото участников и экспертов Чемпионата

Summary

Golchevskiy Yu. V., Yermolenko A. V., Kotelina N. O., Osipov D. A. About WorldSkills Championship at Syktyvkar University

The article describes the experience of the Komi Republic V Open Regional Championship «Young Professionals» (WorldSkills Russia) at the Syktyvkar University.

Keywords: WorldSkills, championship.

Для цитирования: Гольчевский Ю. В., Ермоленко А. В., Котелина Н. О., Осипов Д. А. О проведении Чемпионата WorldSkills в Сыктывкарском университете // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 13–19.*

For citation: Golchevskiy Yu. V., Yermolenko A. V., Kotelina N. O., Osipov D. A. About WorldSkills Championship at Syktyvkar University, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 13–19.

УДК 532

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н. А. Беляева, А. В. Надуткина

Построена математическая модель неизотермического напорного течения вязкой жидкости в круглой трубе. Численный анализ безразмерной модели основан на применении метода прогонки. Представлены графические результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: неизотермическое напорное течение, переменная вязкость, численный анализ, метод прогонки.

1. Постановка задачи

Рассматривается неизотермическое течение жидкости с постоянной вязкостью по каналу кругового сечения под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси трубы z :

$$p = p(z), \quad b = -\frac{dp}{dz} = \text{const}. \quad (1)$$

Математическая модель [1] строится при следующих предположениях: считаем отличной от нуля лишь осевую составляющую скорости, зависящую в цилиндрических координатах от удаления r от оси трубы и

времени t :

$$\vec{V} = (0, 0, V(r, t)); \quad (2)$$

зависимость вязкости от температуры $T = T(r, t)$ примем в виде

$$\mu = \mu(T) = \mu_0 \exp(-\beta(T - T_0)), \quad (3)$$

где T_0 — температура окружающей среды, μ_0 — значение вязкости при $T = T_0$; жидкость несжимаема, то есть

$$\rho = \text{const};$$

в рассматриваемом случае течения (2) условие неразрывности $\text{div } \vec{V} = 0$ очевидно выполняется.

Из уравнения движения Навье – Стокса:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} \right] = -\text{grad } p + \mu \Delta \vec{V} + 2(\text{grad } \mu, \nabla) \vec{V} + \text{grad } \mu \times \text{rot } \vec{V}$$

с учетом (1), (2) получим одну ненулевую проекцию на ось z :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r} \right) + b. \quad (4)$$

Уравнение баланса тепла с учетом диссипативного тепловыделения имеет вид:

$$c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \text{grad } T \right) = \text{div}(\kappa \text{grad } T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k}, \quad (5)$$

где параметры течения c — теплоемкость, ρ — плотность жидкости, κ — коэффициент теплопроводности, будем считать постоянными; σ'_{ik} — вязкий тензор напряжений, который имеет одну ненулевую компоненту:

$$\sigma'_{rz} = \mu(T) \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (6)$$

В проекциях на оси цилиндрической системы координат из уравнения (5) с учетом (6) получим:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu(T)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2. \quad (7)$$

Таким образом, соотношения (4) и (7), соответствующие начальные и граничные условия составят определяющую систему дифференциальных уравнений для нахождения скорости течения вязкой жидкости и температуры:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu(T)\frac{\partial V}{\partial r}\right) + b, \quad (8)$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu(T)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2, \quad (9)$$

начальные

$$t = 0 : V = 0, T = T_0 \quad (10)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad (11)$$

$$V|_{r=R} = 0, \quad T|_{r=R} = T_0. \quad (12)$$

Приведем систему (8) — (12) к безразмерному виду. Введем безразмерные параметры:

$$\theta = \beta(T - T_0); \quad x = \frac{r}{R}, \quad 0 \leq r \leq R; \quad u = \frac{V\mu_0}{bR^2};$$

$$\tau = \frac{\kappa t}{c\rho R^2}, \quad \tau \geq 0; \quad \delta = \frac{R^4\beta b^2}{\kappa\mu_0}; \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{c\mu_0};$$

тогда из уравнений (8) — (12) получим систему безразмерных уравнений:

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\exp(-\theta)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 1, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \delta \exp(-\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad (14)$$

с начальными:

$$\tau = 0 : u = 0, \theta = 0 \quad (15)$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (16)$$

$$u|_{x=1} = 0, \quad \theta|_{x=1} = 0. \quad (17)$$

Здесь u — безразмерная скорость, θ — безразмерная температура, x — безразмерная пространственная координата, τ — безразмерное время, ε и δ — безразмерные параметры жидкости.

2. Метод численного решения

Применим метод прогонки [2] для решения задачи (13) — (17). Введем пространственно-временную сетку (x_i, τ_j) :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1,$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \text{const}, \quad i \in 0..n;$$

$$\tau_j = j\Delta\tau \geq 0, \quad \Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad j \in 0..m$$

— временной шаг; заменим производные в уравнениях (13) — (17) соответствующими разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta \tau}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

из уравнения (13) получим:

$$u_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i)}{\varepsilon x_i \Delta x^2} \right] = u_{i+1,j} \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2}{\varepsilon x_i \Delta x^2} + \quad (19)$$

$$+ u_{i-1,j} \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 x_i}{\varepsilon x_i \Delta x^2} + g_{i,j-1},$$

где

$$g_{i,j-1} = u_{i,j-1} + \frac{\Delta\tau}{\varepsilon},$$

значения функции $\theta_{i,j}$ берем с предыдущего слоя $j - 1$, так как они неизвестны:

$$k_{\theta,j-1}^1 = \exp(-\theta_{i,j-1}),$$

$$k_{\theta,j-1}^2 = \Delta x - x_i \theta_{i+1,j-1} + x_i \theta_{i,j-1} + x_i.$$

Для нахождения сеточного значения функции $u_{i,j}$ по формуле (19) воспользуемся прогоночной формулой:

$$u_{i+1,j} = E_{i+1} u_{i,j} + F_{i+1,j}, \quad (20)$$

где E_{i+1} , $F_{i+1,j}$ — прогоночные коэффициенты. Подставим (20) в (19) и получим выражение для искомой функции $u_{i,j}$ в следующем виде:

$$u_{i,j} = u_{i-1,j} \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 x_i}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i) - E_{i+1} \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2} + \quad (21)$$

$$+ \frac{F_{i+1,j} \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2 + \varepsilon x_i \Delta x^2 g_{i,j-1}}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i) - E_{i+1} \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2}.$$

Воспользуемся следствием прогоночной формулы:

$$u_{i,j} = E_i u_{i-1,j} + F_{i,j}, \quad (22)$$

и из (21) получим выражения для прогоночных коэффициентов E_i , $F_{i,j}$:

$$E_i = \frac{\Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 x_i}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i) - E_{i+1} \Delta\tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2}; \quad (23)$$

$$F_{i,j} = \frac{F_{i+1,j} \Delta \tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2 + \varepsilon x_i \Delta x^2 g_{i,j-1}}{\varepsilon x_i \Delta x^2 + \Delta \tau k_{\theta,j-1}^1 (k_{\theta,j-1}^2 + x_i) - E_{i+1} \Delta \tau k_{\theta,j-1}^1 k_{\theta,j-1}^2}; \quad (24)$$

Для уравнения (14):

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} \left[1 + \frac{\Delta \tau}{x_i \Delta x^2} (\Delta x + 2x_i) \right] &= \theta_{i+1,j} \frac{\Delta \tau}{x_i \Delta x^2} (\Delta x + x_i) + \\ &+ \theta_{i-1,j} \frac{\Delta \tau}{x_i \Delta x^2} x_i + h_{i,j-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$h_{i,j-1} = \theta_{i,j-1} + \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} \delta k_{\theta,j-1}^1 (u_{i+1,j}^2 - 2u_{i+1,j} u_{i,j} + u_{i,j}^2).$$

Воспользуемся прогоночной формулой:

$$\theta_{i+1,j} = G_{i+1} \theta_{i,j} + H_{i+1,j}, \quad (26)$$

где G_{i+1} , $H_{i+1,j}$ — прогоночные коэффициенты. Подставим (26) в (25)

и получим выражение для искомой функции $\theta_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} &= \theta_{i-1,j} \frac{\Delta \tau x_i}{x_i \Delta x^2 + \Delta \tau (\Delta x + 2x_i) - G_{i+1} \Delta \tau (\Delta x + x_i)} + \\ &+ \frac{H_{i+1,j} \Delta \tau (\Delta x + x_i) + x_i \Delta x^2 h_{i,j-1}}{x_i \Delta x^2 + \Delta \tau (\Delta x + 2x_i) - G_{i+1} \Delta \tau (\Delta x + x_i)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Следствие (26):

$$\theta_{i,j} = G_i \theta_{i-1,j} + H_{i,j}, \quad (28)$$

из (27) получим выражения для прогоночных коэффициентов G_i , $H_{i,j}$:

$$G_i = \frac{\Delta \tau x_i}{x_i \Delta x^2 + \Delta \tau (\Delta x + 2x_i) - G_{i+1} \Delta \tau (\Delta x + x_i)}, \quad (29)$$

$$H_{i,j} = \frac{H_{i+1,j} \Delta \tau (\Delta x + x_i) + x_i \Delta x^2 h_{i,j-1}}{x_i \Delta x^2 + \Delta \tau (\Delta x + 2x_i) - G_{i+1} \Delta \tau (\Delta x + x_i)}. \quad (30)$$

Начальные условия (15) позволяют определить сеточные значения в нулевом слое:

$$u_{i,0} = 0, \quad \theta_{i,0} = 0.$$

В каждой точке j -го слоя, двигаясь справа налево (от i к $i - 1$), определяем прогоночные коэффициенты $(E_i, F_{i,j}), (G_i, H_{i,j})$ с учетом правого граничного условия (17), из которого получаем, что

$$u_{n,j} = 0, \theta_{n,j} = 0,$$

но, с другой стороны,

$$u_{n,j} = E_n u_{n-1,j} + F_{n,j},$$

$$\theta_{n,j} = G_n \theta_{n-1,j} + H_{n,j},$$

следовательно,

$$E_n = 0, F_{n,j} = 0,$$

$$G_n = 0, H_{n,j} = 0.$$

Затем, двигаясь слева направо, с учетом левого граничного условия (16) находим целевые функции $u_{0,j}, \theta_{0,j}$:

$$u_{1,j} = u_{0,j}, \theta_{1,j} = \theta_{0,j},$$

с другой стороны,

$$u_{1,j} = E_1 u_{0,j} + F_{1,j},$$

$$\theta_{1,j} = G_1 \theta_{0,j} + H_{1,j},$$

откуда

$$u_{0,j} = \frac{F_{1,j}}{1 - E_1},$$

$$\theta_{0,j} = \frac{H_{1,j}}{1 - G_1}.$$

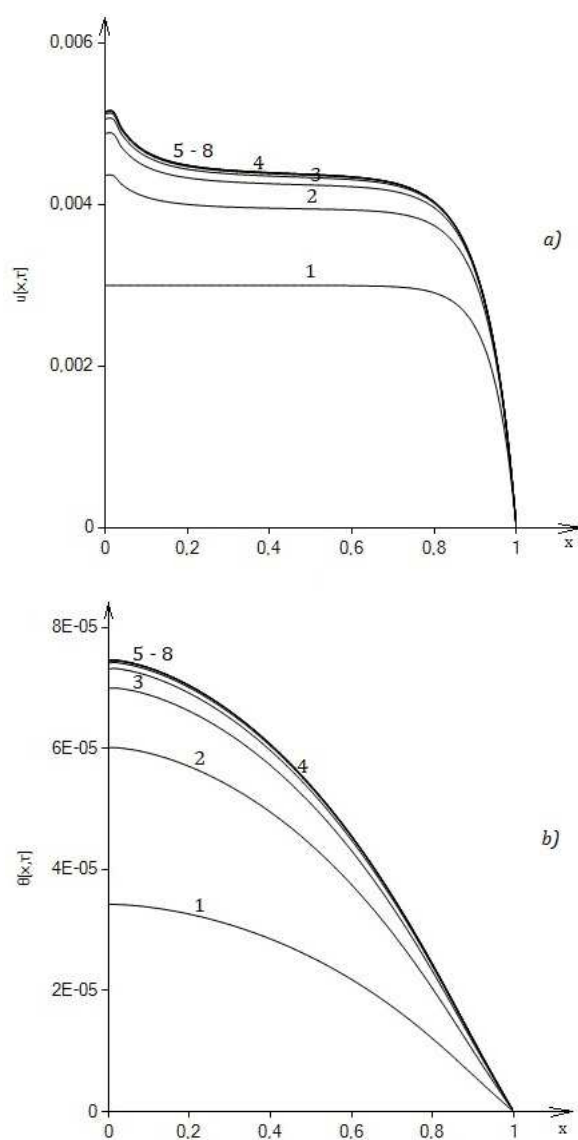


Рис. 1. Пространственно-временное распределение скорости (a) и температуры (b); $n = 50$, $\Delta\tau = 0.31$, $\varepsilon = 100$, $\delta = 0.1$; 1($\tau=0.31$), 2(0.62), 3(0.93), 4(1.24), 5(1.55), 6(1.86), 7(2.17), 8(99.82)

3. Результаты численных экспериментов

На рис. 1а изображено пространственно-временное распределение скорости $u(x, \tau)$, на рис. 1b пространственно-временное распределение температуры $\theta(x, \tau)$. Представлены (рис. 1а, b) некоторые результаты проведенного численного эксперимента при варьировании параметров задачи. В частности, варьировалось число точек разбиения пространственной оси n и временной шаг $\Delta\tau$. Установление стационарного режима при выбранных значениях параметров задачи совпадает с качественными исследованиями стационарных режимов течения, рассмотренных в работе [3].

Таким образом, в работе построена и обезразмерена математическая модель неизотермического напорного течения вязкой жидкости в круглой трубе. Составлены: алгоритм численного расчета, основанный на применении метода прогонки; программа численного анализа на языке С#. Проведен численный эксперимент при варьировании параметров задачи.

Список литературы

1. **Беляева Н. А.** Математическое моделирование : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2014. 116 с.
2. **Беляева Н. А.** Основы гидродинамики в моделях : учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского госуниверситета. 2011. 147 с.

3. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Summary

Belyaeva N. A., Nadutkina A. V. Nonisothermal flow of a viscous fluid

A mathematical model of the nonisothermal pressure flow of a viscous fluid in a round pipe is considered. The numerical analysis of the dimensionless model is based on the application of the sweep method. Graphical results of numerical experiments are presented.

Keywords: nonisothermal pressure flow, variable viscosity, numerical analysis, sweep method.

References

1. **Belyaeva N. A.** *Matematicheskoye modelirovaniye: uchebnoye posobiye* (Mathematical modeling: a training manual), Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2014, 116 p.
2. **Belyaeva N. A.** *Osnovy gidrodinamiki v modelyakh: uchebnoye posobiye* (Fundamentals of hydrodynamics in models: a training manual), Syktyvkar: Publishing House of the Syktyvkar State University, 2011, 147 p.
3. **Khudyaev S. I.** *Porogovyye yavleniya v nelineynykh uravneniyakh* (Threshold phenomena in nonlinear equations), М.: Fizmatlit, 2003, 272 p.

Для цитирования: Беляева Н. А., Надуткина А. В. Неизотермическое течение вязкой жидкости // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 20–30.*

For citation: Belyaeva N. A., Nadutkina A. V. Non-isothermal flow of a viscous fluid, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 20–30.

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 25.11.2019

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 519.816

**ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ НЕЧЕТКИХ
ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ СИТУАЦИИ**

В. Г. Чернов

Рассматривается решение задачи принятия решений в условиях неопределенности, когда элементы платежной матрицы представлены в виде нечетких лингвистических утверждений. Предлагается метод нахождения наилучшего решения на основе линейного отношения порядка на множестве нечетких интегральных оценок альтернатив, построенных из лингвистических оценок.

Ключевые слова: неопределенность, нечеткое множество, функция принадлежности, нечеткая лингвистическая оценка, линейное отношение порядка.

Неопределенность, связанная с полным отсутствием или недостаточностью информации о состояниях природы, под которой понимается комплекс внешних обстоятельств, при которых принимается решение,

называют «дурной» или «безнадежной» [1]. Формально ситуацию принятия решений в этих условиях можно представить тройкой

$$\langle R = (r_i : i = \overline{1, Q}), S = (s_j : j = \overline{1, N}), M = \|m_{ij}\| \rangle,$$

S — множество состояний природы;

R — множество стратегий лица, принимающего решение (ЛПР);

M — множество оценок выбранных решений при соответствующих состояниях природы (платежная матрица).

Традиционно в условиях неопределенности используют известные критерии: Вальда, Лапласа, Сэвиджа, Гурвица. Необходимо отметить, что в ситуации неопределенности теория не дает однозначных и математически строгих рекомендаций по выбору критериев решения. Кроме того, в практике применения указанных критериев нередки случаи, когда они не способны однозначно определить наилучший вариант возможного решения, а применение нескольких критериев к анализу одной и той же ситуации нельзя признать корректным, так как условия применения отдельных критериев противоречивы.

Относительно применения этих критериев следует также отметить определенное противоречие между заявлением о неопределенности ситуации принятия решений и числовой, точечной формой задания элементов платежной матрицы. Кроме того существуют и трудности в построении самой матрицы [2]:

1 — проблемы, связанные с оценкой репрезентативности выборочных совокупностей данных, на основе которых определяются значения элементов платежной матрицы;

2 — оценка истинности значений, полученных в результате статистиче-

ских наблюдений;

3 – статистические данные отражают прошлое состояние ситуации, требующей принятия решений, соответственно, возникает вопрос об их соответствии настоящему времени. Достаточно вспомнить о невоспроизводимости условий хозяйствования в экономических системах;

4 – экспертным оценкам принципиально свойственна неопределенность, которая не находит отражения в традиционных процедурах построения платежных матриц;

5 – множества возможных состояний природы и решений ЛПР имеют сложную структуру, и практически невозможно доказать их полноту.

Последнее обстоятельство обуславливает невозможность для ЛПР определить, какой из конкретных результатов может быть получен при выбранном решении. В распоряжении ЛПР имеется лишь ограниченное множество дискретных значений результатов. В то же время из-за невозможности доказать полноту множества состояний природы нельзя исключить возникновение состояния, ранее не включенного в это множество и которое будет сопровождаться совершенно другим результатом, который раньше никак не учитывался. Более полезным будет для ЛПР иметь не дискретный спектр возможных результатов принятого решения, а непрерывный, с информацией о распределении степени реализуемости этих результатов. Традиционно применяемые методы принятия решений в условиях неопределенности такую возможность не обеспечивают.

Поэтому более соответствующим существу задачи можно считать задание элементов платежной матрицы в нечеткой форме [3–6]. В пользу

такого представления говорит то, что это дает возможность отразить неопределенность экспертных оценок при построении платежной матрицы, а сам аппарат нечетких множеств позволяет принимать решения именно в отсутствии вероятностно-статистической информации.

Переход к нечеткой формулировке потребует решения ряда задач. Элементы платежной матрицы при нечеткой постановке задачи могут задаваться либо в форме нечетких чисел, либо лингвистических оценок. Указанные выше исследования [3–6] рассматривают вариант нечетких чисел, а при нахождении наилучшей стратегии ЛПР путем различных формальных преобразований, например заменой нечетких чисел их модальными значениями, сводят нечетко поставленную задачу к четкой. В то же время в известных исследованиях, которых значительно больше, чем указано в библиографическом списке, не рассматривается задача определения наилучшего решения из множества возможных в условиях неопределенности знаний о состоянии природы, когда элементы платежной матрицы представляются не нечеткими числами, а нечеткими лингвистическими утверждениями.

Предлагается новая модель принятия решения при недостаточной информации о состояниях природы, в которой степень неопределенности исходных данных (значений платежной матрицы) учитывается посредством перехода к нечетким лингвистическим оценкам результатов возможных решений, при этом сама процедура нахождения наилучшего решения состоит в выполнении операций над нечеткими множествами, формализующими лингвистические оценки элементов платежной матрицы.

Первым этапом решения задачи будет формирование набора лингвистических значений для элементов платежной матрицы. Обычно рекомендуется использовать нечетное число этих значений. Их количество может быть согласовано с ЛПР. Практика показывает, что для большинства подобных задач достаточно 5–7 значений [7].

Пусть сформирован следующий набор лингвистических значений (терм-множество) $\{S$ — малое, LM — ниже среднего, M — среднее, HM — выше среднего, B — большое}, на области определения платежной матрицы (x_{min}, x_{max}) определены соответствующие базовые множества (рис. 1). Выбор треугольных функций принадлежности обусловлен только простотой графики и не влияет на общность дальнейших результатов.

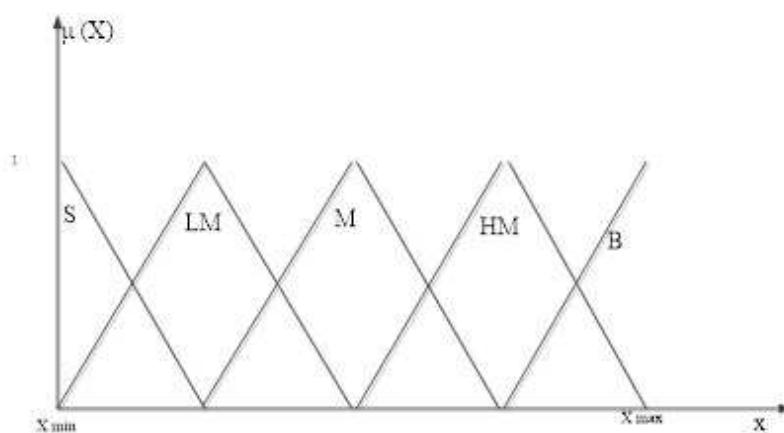


Рис. 1. Функции принадлежности элементов терм-множества

Переход от исходной платежной матрицы с числовыми элементами к лингвистической платежной матрице (фаззификация) выполняется с помощью несложной процедуры, представленной на рис. 2 [8].

В результате получим платежную матрицу с элементами в лингви-

стической форме $\widetilde{M} = \|\tilde{l}_{i,j}\|$, где $\tilde{l}_{i,j}$ — лингвистическое значение, полученное в результате фаззификации и формализуемое нечетким множеством с функцией принадлежности $\mu_{i,j}(x)$, $x \in [x_{min}, x_{max}]$.

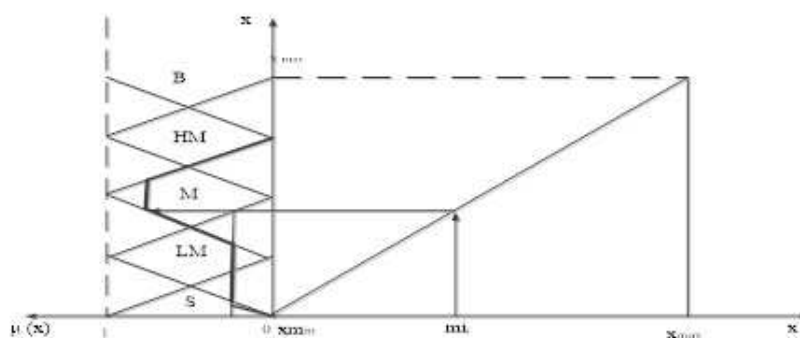


Рис. 2. Процедура фаззификации

После выполнения фаззификации для всех элементов исходной платежной матрицы будет получена лингвистическая платежная матрица, элементами которой будут нечеткие утверждения типа «LM or M» (рис. 2).

Следующим этапом решения задачи будет нахождение наилучшей стратегии для ЛПР. При переходе к нечеткому лингвистическому представлению платежной матрицы возникает ряд специфических моментов. Прежде всего, отметим, что в данной ситуации невозможно применение ни одного из известных критериев, так как все они рассчитаны на работу с числовыми данными, а к лингвистическим оценкам, формализованным нечеткими множествами, можно применять только логические операции. Вторая задача — это построение интегральной оценки стратегий, по которой можно будет принимать решение о выборе наилучшей стратегии. Независимо от выбранного варианта нахож-

дения решения, необходимой логической операцией является сравнение нечетких множеств.

Ситуация неопределенности характеризуется тем, что ЛПР не располагает информацией о вероятностно-статистических характеристиках ситуации принятия решений. Утверждение, что ЛПР не известно конкретное состояние природы, равнозначно утверждению, что может возникнуть «состояние s_1 или s_2 или ... или s_n », что эквивалентно объединению

$$\cup_j^N \tilde{m}_{kj} = \tilde{R}_k = \{\cup_{j=1}^N \mu_{kj}(x)\}, \quad (1)$$

$\mu_{kj}(x)$ — функция принадлежности нечеткой лингвистической оценки \tilde{m}_{kj} ;

k — номер некоторого решения ЛПР;

j — номер состояния природы.

В результате получим нечеткое множество, определяющее возможные результаты выбранного решения r_k при любом состоянии природы. Если выполнить преобразование (1) для всех стратегий ЛПР, то получим набор нечетких множеств

$$\tilde{R}(A) = \{\tilde{R}_k : k = \overline{1, Q}\} = \{\cup_{j=1}^N \mu_{kj}(x) : k = \overline{1, Q}\}.$$

В общем случае нечеткие множества \tilde{R}_k и соответственно $\tilde{R}(A)$ могут иметь функции принадлежности произвольного вида и определение оценки с целью выявления наилучшей стратегии будет представлять достаточно сложную задачу. Поэтому целесообразно привести вид нечетких множеств (функций принадлежности) к единому варианту. В качестве такого преобразования можно предложить операцию FztoTriangle,

используемую в нечеткой электронной таблице FuziCalc [9]. Операция FztoTriangle заменяет произвольное нечеткое множество нечетким множеством с эквивалентной треугольной функцией принадлежности, у которой левая и правая границы, а также центр тяжести совпадают с аналогичными показателями исходной функции принадлежности. Можно показать, что преобразование FztoTriangle не нарушает логику ситуации принятия решения. Таким образом, возможный результат применения ЛПР некоторой стратегии r_k , если точно не известно состояние природы, может быть представлен эквивалентным нечетким множеством \tilde{R}_k^{Tr} .

$$\left| \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_Q \end{array} \right| \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \left| \begin{array}{c} \tilde{R}_1^{Tr} \\ \tilde{R}_2^{Tr} \\ \vdots \\ \tilde{R}_Q^{Tr} \end{array} \right|$$

Для выбора наилучшей стратегии необходимо упорядочить полученные нечеткие оценки, что можно сделать путем построения для них отношения линейного порядка [10].

Рассмотрим небольшой пример. Исходные данные для принятия решения, представленные в табл. 1, были подобраны так, чтобы создать «неудобный» вариант платежной матрицы, на котором ни один из известных критериев не дал однозначного решения. В скобках указаны лингвистические значения, полученные после фаззификации. Примеры некоторых функций принадлежности приведены на рис. 3.

Таблица 1

Платежная матрица

	s_1	s_2	s_3	s_4	$CG(FztoTriangle)$
r_1	7(MorHM)	5(LMorM)	3(LM)	12(B)	6.11
r_2	5(LMorM)	3(LM)	8(MorHM)	4(LMorM)	5.85
r_3	5(LMorM)	3(LM)	4(LMorM)	2(SorLM)	4.25
r_4	8(MorHM)	5(LMorM)	3(LM)	10(HMorB)	5.99

В табл. 1 в столбце $CG(FztoTriangle)$ указаны координаты центров тяжести эквивалентных нечетких множеств, полученных в результате использования преобразования $FztoTriangle$.

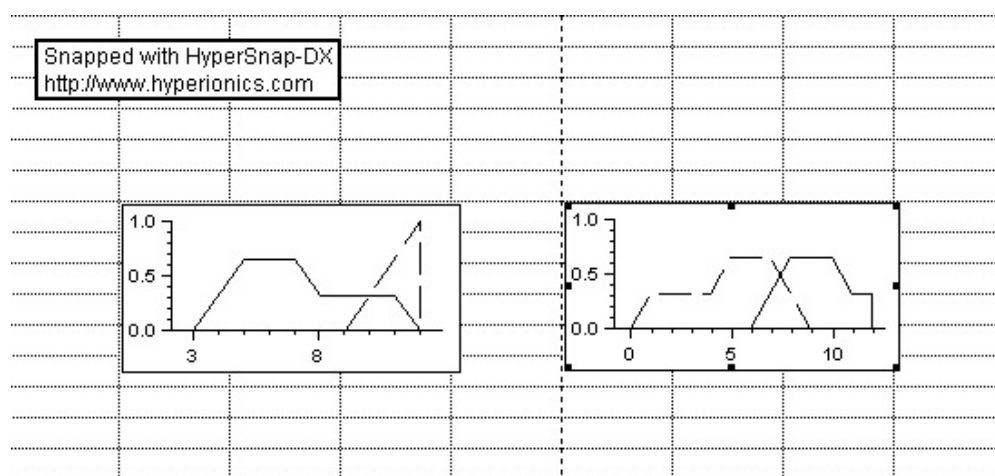


Рис. 3. Функции принадлежности лингвистических оценок: а) «MorHM» и «B»; б) «LM or M» и «HM or B»

На рис. 4 представлены ФП после преобразования (2), примененного к элементам первой строки табл. 1 (стратегия r_1) и эквивалентного нечеткого множества после преобразования $FztoTriangle$.

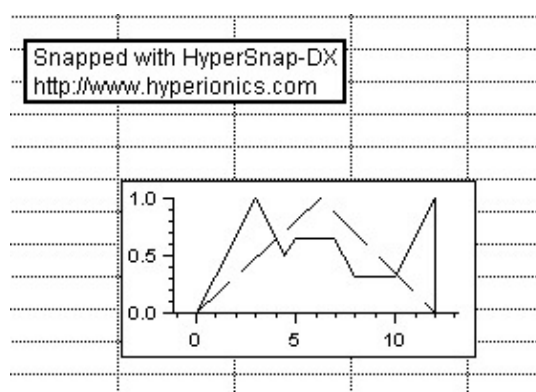


Рис. 4. Результаты обработки первой строки табл. 1

С использованием описанного в [10] метода определена наилучшая стратегия r_1 . В данном случае можно ограничиться выполнением дефазификации по максимуму или по методу центра тяжести, что также позволяет считать наилучшим решение r_1 . Если к данному примеру применить энтропийный критерий, предложенный в [11], то будет получен такой же результат. Совпадение результатов, полученных различными и независимыми методами, говорит о том, что предлагаемый вариант решения задачи принятия решений соответствует методологии теории устойчивости. Предложен новый метод принятия решений в условиях недостаточности знаний о состояниях природы, в которой неопределенность экспертных оценок значений элементов платежной матрицы отражается нечеткой лингвистической формой их представления, что позволяет использовать при нахождении наилучшего решения вместо точечной оценки все множество ожидаемых значений оценок, характеризующих ситуацию принятия решения.

Список литературы

1. **Вентцель Е. С.** Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Дрофа, 2004. 208 с.
2. **Сигал А. В.** Теоретико-игровая модель принятия инвестиционных решений // *Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского. Серия «Экономика и управление»*. Т. 24(63). № 1. 2011. С. 193–205.
3. **Вовк С. П.** Игра двух лиц с нечеткими стратегиями и предпочтениями // *Альманах современной науки и образования*. №7(85). С. 47–49.
4. **Серая О. В., Каткова Т. Н.** Задача теории игр с нечеткой платежной матрицей // *Математичні машини і системи*. 2012. № 3. С. 29–36.
5. **Зайченко Ю. П.** Игровые модели принятия решений в условиях неопределенности // *Труды V международной школы-семинара «Теория принятия решений»*. Ужгород: УжНУ, 2010. 274 с.
6. **Vector C. R., Suresh Chandra.** Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games. Springer, 2010. 236 p.
7. **Пегат А.** Нечеткое моделирование и управление : пер. с англ. [Электронный ресурс] / А. Пегат; 2-е изд. (эл.). М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 798 с.: ил. (Адаптивные и интеллектуальные системы).

8. Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1990. 272 с.
9. Чернов В. Г., Андреев И. А., Градусов Д. А., Третьяков Д. В. Решение бизнес-задач средствами нечеткой алгебры. М.: Тора-Центр, 1998. С. 87.
10. Чернов В. Г. Сравнение нечетких чисел на основе построения линейного отношения порядка // *Динамика сложных систем — XXI век. 2018. № 2. С. 81–87.*
11. Чернов В. Г. Энтропийный критерий принятия решений в условиях полной неопределенности // *Информационно-управляющие системы. 6(7). 2014. С. 51–56.*

Summary

Chernov V. G. Decision making in conditions of uncertainty with fuzzy, linguistic assessments of the situation

The solution of the decision-making problem is considered under conditions of uncertainty, when the elements of the payment matrix are presented in the form of fuzzy, linguistic statements. A method is proposed for finding the best solution based on a linear order relation on a set of fuzzy integral estimates of alternatives constructed from linguistic estimates.

Keywords: uncertainty, fuzzy set, membership function, fuzzy linguistic estimate, linear order relation.

References

1. **Ventzel E. S.** *Issledovaniye operatsiy. Zadachi, printsipy, metodologiya* (Operations research. Tasks, principles, methodology), M.: Drofa, 2004, 208 p.
2. **Seagal A. V.** Teoretiko-igrovaya model' prinyatiya investitsionnykh resheniy (Game-theoretic model of investment decision making), *Scientific notes of the Taurida National University named after V.I. Vernadsky*, a series of «Economics and Management», v. 24 (63), No. 1, 2011, pp. 193–205.
3. **Vovk S. P.** Igra dvukh lits s nechetkimi strategiyami i predpochteniyami (A game of two persons with fuzzy strategies and preferences), *Almanac of modern science and education*, No. 7 (85), pp. 47–49.
4. **Seraya O. V., Katkova T. N.** Zadacha teorii igr s nechetkoy platezhnoy matritsey (The task of the theory of games with a fuzzy payment matrix), *Mathematical Machines and Systems*, 2012, No. 3, pp. 29–36.
5. **Zaichenko Y. P.** *Igrovyye modeli prinyatiya resheniy v usloviyakh neopredelennosti* (Game models of decision making in conditions of uncertainty), Proceedings of the V international school-seminar «Theory of decision-making», Uzhgorod, UzhNU, 2010, 274 p.
6. **Bector C. R., Suresh Chandra.** *Nechetkoye matematicheskoye programmirovaniye i nechetkiye matrichnyye igry* (Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games), Springer, 2010, 236 p.

7. **Piegat A.** *Nechetkoye modelirovaniye i upravleniye* (Fuzzy modeling and control), M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2013, 798 p.
8. **Melikhov A. N., Bernshtein L. S., Korovin S. Y.** *Situacionnyye sovetuyushchie sistemy s nechetkoj logikoj* (Situational advisory systems with fuzzy logic), M.: Science, The main edition of the physical and mathematical literature, 1990, 272 p.
9. **Chernov V. G., Andreev I. A., Gradusov D. A., Tretyakov D. V.** *Resheniye biznes zadach s pomoshch'yu nechetkoy algebrы* (The solution of business problems by means of fuzzy algebra), M.: Torah-Center, 1998, 87 p.
10. **Chernov V. G.** Sravneniye nechetkikh chisel na osnove postroyeniya lineynykh otnosheniy poryadka (Comparison of fuzzy numbers based on the construction of a linear relationship order), *Dynamics of complex systems, XXI century* 2018, No. 2, pp. 81–87.
11. **Chernov V. G.** Entropiyunnyy kriteriy prinyatiya resheniy v usloviyakh polnoy neopredelennosti (Entropy criterion for decision making under conditions of complete uncertainty), *Information Management Systems*, 6 (7), 2014, pp. 51–56.

Для цитирования: Чернов В. Г. Принятие решений в условиях неопределенности при нечетких лингвистических оценках ситуации // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 31–45.*

For citation: Chernov V. G. Decision making in conditions of uncertainty with fuzzy, linguistic assessments of the situation, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 31–45.

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 21.11.2019

ИНФОРМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 004.42

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ, РАЗРАБОТКА И ВНЕДРЕНИЕ
КОМПЛЕКСНОЙ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ АВТОХОЗЯЙСТВОМ**

П. А. Гарбузов, Р. А. Гашин

В работе описан процесс проектирования, разработки и внедрения комплексной автоматизированной системы управления автохозяйством организации на территории Республики Коми. Обсуждены некоторые проблемы, с которыми встретились разработчики, и пути их решения.

Ключевые слова: комплексная автоматизированная система, автохозяйство, архитектура MVC, СУБД MySQL, PHP.

Введение

Одним из путей улучшения бизнес-процессов управления транспортом в государственных организациях, особенно с учетом территориально разбросанных структурных подразделений министерств, является разработка и внедрение информационных систем управления автохозяйством и дальнейшая их модификация до интеллектуальных транспортных систем.

Существует достаточно много подобных зарубежных решений, в том числе и для известных ERP-систем. Однако они недостаточно реализуют российскую специфику, являются дорогими, и их использование не является хорошим решением с точки зрения проблемы обеспечения независимости государственных ведомств от иностранных программных продуктов. Из отечественных разработок, которые позволяют обеспечивать высокую надежность работы, высокое быстродействие при работе по сети, обеспечивать сохранность данных, вести логирование, можно выделить «1С: Предприятие 8. Управление Автотранспортом» [1], информационную систему «Управление автотранспортом» от компании SIKE [2], информационную систему «Автобаза» [3] и некоторые другие. Существуют решения по управлению транспортом и курьерской доставкой [4], решения по автоматизации контроля за перемещением транспортных средств и дистанционному контролю состояния на основе использования различных датчиков. Однако эти предложения также либо достаточно дороги, либо обладают лишним функционалом, либо не учитывают специфику территориального распределения структурных подразделений организации и конкретные требования (например, по учету дорожно-транспортных происшествий с участием автотранспорта организации).

В январе 2019 года перед информационным центром МВД по Республике Коми была поставлена задача по автоматизации повседневной деятельности автохозяйства МВД по Республике Коми. В феврале заказчиком было составлено техническое задание с отражением ряда задач, которые должна решить проектируемая информационная система:

- 1) круглосуточный и бесперебойный доступ к сведениям, обрабатываемым программным обеспечением;
- 2) использование свободно распространяемого или лицензионного программного обеспечения, закупленного организацией в рамках действующих контрактов, для уменьшения расходов по разработке программного комплекса;
- 3) минимальные системные требования автоматизированного рабочего места сотрудника для организации взаимодействия с программным комплексом.

Проектирование, разработка и внедрение информационной системы

Разработка информационной системы осуществлялась в формате клиент-серверного web-приложения. В качестве серверной части выступает операционная система семейства UNIX Ubuntu с web-сервером Apache 2, системой управления базами данных MySQL и препроцессором гипертекста PHP 7.2.

На автоматизированном рабочем месте сотрудника предполагается наличие стандартного набора программного обеспечения: web-браузер с поддержкой JavaScript, Microsoft Office и любой редактор PDF-документов.

Программный комплекс представляет собой web-ресурс, спроектированный на основе архитектуры разделения данных MVC (Model-View-Controller, Модель-Представление-Контроллер). Подобная архитектура информационной системы позволяет разделить ее функционал на три компонента: отображение информации пользователю (View); реакция

на действия пользователя и обработка данных, введенных пользователем (Controller); взаимодействие с базой данных (Model) [5]. Такой подход позволяет равномерно распределить нагрузку между пользовательской и серверной частью. Основная вычислительная нагрузка и организация взаимодействия с базой данных возложены на серверную часть, пользовательская часть выступает только в роли отображения полученной информации и передачи серверу действий пользователя, например нажатие на кнопку. Схема MVC изображена на рис. 1.



Рис. 1. Схема MVC (Model-View-Controller)

Автоматизированная информационная система (АИС) разрабатывалась в качестве отдельных взаимосвязанных модулей. Причем нарушение работоспособности одного из модулей не приводит к выводу из строя всей системы. Всего в программном комплексе заложено свыше 20 модулей, основные из которых – это «Транспортные средства»,

«Водители», «Экзамены / зачеты», «Ремонт», «Дорожно-транспортные происшествия», «Склад», «Архив», что показано на рис. 2.



Рис. 2. Модульность АИС «Автохозяйство»

В процессе проектирования и разработки информационной системы возникли определенные специфичные проблемные моменты, которые требовали детального изучения и применения нестандартных методов решения. В рамках данной работы остановимся лишь на некоторых из них.

Так как в информационной системе предусмотрена возможность прикрепления изображений объектов учета, возникает потребность их хранения, обработки и отображения пользователю. Современные фотографии могут иметь достаточно большой объем, достигающий нескольких десятков мегабайт. Соответственно, при активном использовании информационной системы объем данных, занимаемых изображениями, будет расти значительными темпами. Решение — организовать хране-

ние изображений в виде файловой структуры на сервере, а не в виде бинарных данных, хранимых в базе данных. Это позволяет уменьшить нагрузку на систему управления базами данных (СУБД) и не тратить лишние ресурсы на перекодировку бинарных данных. Однако это влечет необходимость решения проблемы организации доступа к данным, находящимся на сервере. Проблема решается путем настройки прав доступа к директориям, в которых будут храниться изображения.

Для уменьшения размеров загружаемых изображений был разработан модуль, который производит уменьшение качества изображения, а также масштабирование фотографии, сохраняя при этом пропорции. Перечисленные действия с файлами осуществлены с использованием функций языка PHP *imagecreatefromjpeg*, *imagecreatetruecolor*, *imagecopyresampled* и *imagejpeg*.

Для отображения изображения пользователю используется способ перекодирования файла в формат base64 с указанием mime-типа. В итоге фотография преобразуется в строку следующего типа: ``. Данный подход используется для передачи бинарных данных с помощью текстового формата. Браузер благодаря mime-типу определит, что данный элемент является фотографией, и отобразит содержимое пользователю.

Другая проблема, возникшая при проектировании системы, заключалась в переводе в архив неактуальных записей. Например, если к транспортному средству будет прикреплено несколько полисов ОСАГО, то система должна в автоматическом режиме определить актуальный полис, а остальные перевести в архив. На первый взгляд, данную

проблему можно решить путем написания триггера к таблице полисов ОСАГО, который срабатывает на действия INSERT и UPDATE. В триггере необходимо найти все полисы ОСАГО, которые присоединены к транспортному средству, определить по дате выдачи полиса самый новый, проставить ему флаг актуальности, а остальные записи следует перевести в архив. Но при таком подходе возникает одна особенность СУБД — запрет на мутацию данных в триггере. То есть в триггере запрещено изменять состояние других строк таблицы, так как это вызовет мутацию данных, а соответственно, приведет в действие триггер и произойдет бесконечный вызов одного и того же триггера.

Путь решения данной проблемы заключается в создании хранимой процедуры в СУБД, которая будет вызываться после завершения изменения данных в строке таблицы. После выполнения процедуры сохранения (операции INSERT или UPDATE) срабатывает метод CALL вызова хранимой процедуры с передачей двух параметров: уникального идентификатора транспортного средства и номера операции. В хранимой процедуре используется номер операции для того, чтобы унифицировать процедуру, то есть в зависимости от кода операции будут произведены действия по перемещению в архив над той или иной подсистемой.

Такой подход позволяет обойти запрет на мутацию данных в триггерах и обеспечить перевод в архив неактуальных записей и выявление одной актуальной записи. Также использование хранимой процедуры позволяет произвести несколько операций UPDATE за одну транзакцию к базе данных.

Еще одним важным аспектом разработки и дальнейшей эксплуата-

ции информационной системы является организация резервного копирования данных. Резервная копия базы данных создается ежедневно с помощью утилиты `mysqldump`. Также ежедневно осуществляется копирование файлов исходного кода web-ресурса. Непосредственно на самом сервере хранится несколько резервных копий, что обеспечивает откат к состоянию web-ресурса на несколько дней назад. Помимо этого, ежедневно производится резервное копирование на запасной сервер.

Возможности АИС «Автохозяйство»

На сегодняшний день АИС управления автохозяйством МВД по Республике Коми обладает достаточно развитым функционалом, в частности:

- 1) ввод и корректировка текстовых данных;
- 2) формирование отчетности и выгрузка ее в формате Excel или PDF;
- 3) загрузка электронных образов документов в формате PDF;
- 4) загрузка изображений объектов учета в формате PNG, JPEG, TIFF;
- 5) разграничение прав доступа пользователей в зависимости от необходимого уровня полномочий;
- 6) логирование действий пользователя в процессе взаимодействия с информационной системой;
- 7) информирование пользователей об истекающих водительских удостоверениях, полисах ОСАГО и технических осмотрах транспортных средств.

Одним из основных достоинств является формирование различных отчетов и сверок. При этом учет и генерация отчетности происходит по различным разрезам по информации обо всем в республиканском ав-

тотранспортном парке. В будущем планируется разработать отдельный модуль, который будет включать в себя возможность формирования отчета любой сложности по запросу пользователя и выгрузки полученных данных в формат PDF или Microsoft Office Excel, для чего могут быть применены разработки, описанные в работе [6].

В целом АИС «Автохозяйство МВД по РК» должна полностью обеспечить необходимым функционалом повседневную автотранспортную деятельность МВД по Республике Коми.

Информационная безопасность

Информационная безопасность АИС реализуется с помощью организационных и технических мероприятий.

К организационным аспектам безопасности относятся ведомственный приказ о вводе в эксплуатацию разработанной системы, в котором закреплена персональная ответственность сотрудников, допущенных к работе с информационной системой, за искажение, повреждение и предоставление недостоверных данных, а также за разглашение сведений третьим лицам, не допущенным к работе в информационной системе. Наряду с приказом о вводе в эксплуатацию у сотрудников, которые взаимодействуют с информационной системой, внесены соответствующие изменения в должностные инструкции.

Для обеспечения технической безопасности серверов, на которых эксплуатируется описываемая система, используется шифрование с помощью программно-аппаратного комплекса VipNet. Серверы находятся в защищенном сегменте, доступ к которому возможен только при наличии у пользователя ключевой информации программного обеспечения

VipNet Client.

Наряду с этим на серверах информационной системы реализована настройка межсетевых экранов. Применена политика ограничения доступа к серверу по всем сетевым портам и IP-адресам с открытием только необходимых портов и доступом только разрешенных пулов IP-адресов.

Доступ к базе данных MySQL организован только по внутреннему сетевому интерфейсу с использованием пользовательской учетной записи, имеющей только необходимый уровень доступа к базе данных.

Для обеспечения контроля доступа к сведениям, содержащимся в базе данных, при каждом обращении пользователя к web-странице или выполнении запроса в базу данных осуществляется проверка учетной записи по двум критериям: авторизован ли пользователь в системе и проверка уровня прав доступа к запрашиваемым сведениям.

Данный комплекс организационных и технических мероприятий позволил создать защищенную АИС, удовлетворяющую предъявляемым требованиям информационной безопасности.

Пользовательские интерфейсы

Для создания пользовательских интерфейсов использовалась библиотека bootstrap 4.1, которая позволяет создать адаптивные шаблоны, способные корректно отображаться на различных устройствах, в том числе мобильных. При разработке интерфейсов были учтены возможности человеческого восприятия, поэтому для уменьшения нагрузки на глаза сотрудников используются текстовые шрифты размеров от 15 до 18 пикселей, а основной фон представляет собой светло-серую подложку.

ку (см. рис. 3, 4).

Транспортные средства • Водители • Экзамены • Ремонт • Складской учет • ДТП • Контакты

Меню (МВД ПО РК +

Информация о транспортном средстве

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРАНСПОРТНОМ СРЕДСТВЕ

Марка: Модель:

Гос. знак: Гос. регистрац. знак: Регион: Цвет:

Год выпуска: Год: Страна:

Район: Страна:

2. КАТЕГОРИИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

Категория ТС: Тип для страховых:

Категория ГОСТ: Категория МВД:

3. ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

VIN / авт. ИР машины (грамм): VIN / авт. ИР машины (грамм): Двигатель:

Шасси / коробка передач: Шасси / коробка передач: Крутя / мин. вращений колес (лошадь):

Крутя / мин. вращений колес (лошадь): Крутя / мин. вращений колес (лошадь):

Разр. макс. масса: Макс. масса: Масса без нагрузки: Макс. масса:

Мощность кВт: Мощность: Раб. объем двигателя куб.см: Объем:

4. НОРМЫ РАСХОДА ТОПЛИВА

Рис. 3. Интерфейс ввода данных о транспортном средстве

Транспортные средства • Водители • Экзамены • Ремонт • Складской учет • ДТП • Контакты

Меню (МВД ПО РК +

Информация о водителе

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВОДИТЕЛЕ

Фамилия: Имя:

Отчество: Мобильный телефон:

Район: Страна:

Мобильный телефон:

Страна:

Сохранить водителя | Защитить водителя | Перевести в архив | Удалить водителя

ВОДИТЕЛЬСКОЕ УДОСТОВЕРЕНИЕ | ЗАКРЕПЛЕНИЕ ЗА ТС | ДТП

2. ВОДИТЕЛЬСКОЕ УДОСТОВЕРЕНИЕ

История ВУ | Добавить ВУ

Водительское удостоверение: Серия: Номер:

Срок действия ВУ: с: Дата выдачи ВУ: по: Дата окончания ВУ:

Категория ВУ:

Веб-ресурс разработчик: Информационный центр МВД по Республике Коми по заказу Агентства ФКУ "ЦДИСО МВД по Республике Коми"

Рис. 4. Интерфейс ввода данных о водителе

Для облегчения взаимодействия пользователей с АИС и уменьшения влияния человеческого фактора на целостность данных в системе

используется большое количество полей с возможностью выбора справочных значений. Добавлять и изменять справочные значения может только зарегистрированный пользователь с уровнем прав доступа *Администратор*.

Ввод в эксплуатацию

Ввод в эксплуатацию АИС был осуществлен в два этапа: опытная эксплуатация на базе одного территориального органа и промышленная эксплуатация на территории всей Республики Коми.

На первом этапе сотрудники автохозяйства осуществили тестирование основных модулей программного комплекса. В результате завершения первого этапа внедрения в информационную систему были внесены существенные доработки: увеличено количество текстовых полей ввода, разработаны три новых модуля, произведен пересмотр уровня прав доступа пользователей разных категорий.

Второй этап включал в себя полноценное использование всех компонентов информационной системы сотрудниками территориальных органов по всей Республике Коми. В процессе второго этапа в информационную систему были внесены незначительные корректировки, касающиеся повышения эффективности работоспособности комплекса при рабочей нагрузке и отладки механизмов доступа.

Заключение

На сегодняшний день АИС управления автохозяйством функционирует в полном объеме и обрабатывает свыше двух тысяч объектов учета (не считая связанные объекты дополнительных подсистем), состоящих

на балансе организации. На данном этапе разработка информационной системы окончательно не завершена и в соответствии с требованиями заказчика в программный продукт вносятся изменения и доработки, повышающие эффективность ее использования.

Список литературы

1. 1С:Предприятие 8. Управление Автотранспортом. URL: <https://rarus.ru/1c-transport/1c8-avtotransport-standart/> (дата обращения: 11.11.2019).
2. Управление автотранспортом | Компания SIKE. URL: [http://autopark.sike.ru/Бюро спецпроектов «Борника»](http://autopark.sike.ru/Бюро_спецпроектов_«Борника») (дата обращения: 11.11.2019).
3. Программа «Автобаза» — эффективное и экономичное решение для автопредприятий. URL: <http://www.bornica.ru/autobase/> (дата обращения: 11.11.2019).
4. Управление транспортом (TMS) и курьерской доставкой | AllianceSoft. URL: <https://asoft.by/resheniya/upravlenie-transportom-tms-i-kurerskoj-dostavkoj> (дата обращения: 11.11.2019).
5. Сейдаметов Г. С., Ибраимов Р. И. Аналитический обзор шаблона MVC // *Информационно-компьютерные технологии в экономике, образовании и социальной сфере*. 2018. № 3 (21). С. 45–51.

6. **Белых Е. А., Гольчевский Ю. В.** Подход к проектированию языка подстановок для генерации электронных документов, содержащих сложные таблицы // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 422–437. DOI: 10.20537/vm190311.

Summary

Garbuzov P. A., Gashin R. A. Design, development and implementation of complex automated car fleet management system

The process of design, development and implementation of complex automated car fleet management system is described. Some problems encountered by the developers and ways to solve them were discussed.

Keywords: complex automated system, car fleet management, MVC architecture, MySQL, PHP.

References

1. *1C: Предприятије 8. Управленије Автотранспортом* (1C: Enterprise 8. Car Fleet Management), URL: <https://rarus.ru/1c-transport/1c8-avtotransport-standart/> (date of the application: 11.11.2019).
2. *Управленије автотранспортом | Компанија SIKE* (Car Fleet Management | SIKE company), URL: <http://autopark.sike.ru/> Bureau of special projects «Bornika» (date of the application: 11.11.2019).
3. *Програма «Автобаза» – ефективное и экономичное решение для автотранспортной организации* (The «Automobile depot» – an effective and

economical solution for automobile enterprises), URL: <http://www.bornica.ru/autobase/> (date of the application: 11.11.2019).

4. *Upravleniye transportom (TMS) i kur'yerskoy dostavkoy / AllianceSoft* (Transport Management (TMS) and courier delivery | AllianceSoft), URL: <https://asoft.by/resheniya/upravlenie-transportom-tms-i-kurerskoy-dostavkoy> (date of the application: 11.11.2019).
5. **Seydametov G. S., Ibraimov R. I.** Analiticheskiy obzor shablona MVC (Analytical review of the MVC template), *Informatsionno-komp'yuternyye tekhnologii v ekonomike, obrazovanii i sotsial'noy sfere*, 2018, No. 3 (21), pp. 45–51.
6. **Belykh E. A., Golchevskiy Yu. V.** Podkhod k proyektirovaniyu yazyka podstanovok dlya generatsii elektronnykh dokumentov, sodershashchikh slozhnyye tablitsy (An approach to designing a substitution language for generating electronic documents containing complex tables), *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternyye nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 422–437. DOI: 10.20537 / vm190311.

Для цитирования: Гарбузов П. А., Гашин Р. А. Проектирование, разработка и внедрение комплексной автоматизированной системы управления автохозяйством // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 46–61.*

For citation: Garbuzov P. A., Gashin R. A. Design, development and implementation of complex automated car fleet management system, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 46–61.

СГУ им. Питирима Сорокина

ИЦ МВД по РК

Поступила 10.12.2019

ИНФОРМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 004.056.55, 004.3

УСТРОЙСТВО ПОТОЧНОГО ШИФРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПЛИС

Л. С. Носов, Е. Ю. Пипуныров

Предлагается использование софт-процессора, описанного на языке Verilog, и ПЛИС для создания устройства поточного шифрования, способного к программируемости и быстрой адаптации на аппаратном уровне.

Ключевые слова: защита информации, ПЛИС, шифрование.

1. Введение

Постоянное развитие технологий приводит к повсеместному применению электронных устройств и постоянному обмену информацией между ними. Утечка данной информации может послужить источником угроз приватности и даже общественной безопасности. Важность передаваемой информации стимулирует массовое применение средств защиты. Самым распространённым средством защиты передачи данных является криптографический метод. Разработка систем защиты

для нестандартных решений «с нуля» может отнять много времени, сил, денег и других ресурсов. Помимо того, криптографические методы защиты информации (КМЗИ) хоть и повышают защищённость данных, однако требуют большого количества дополнительных вычислений, нагружающих аппаратуру. Стандартные микропроцессорные устройства имеют общий, неспециализированный набор команд, использование которых снижает скорость обработки данных.

В данной работе на основе практического примера рассматривается возможность создания универсального аппаратного средства (АС) защиты информации (ЗИ), которое можно в короткие сроки сконфигурировать для защиты данных, передаваемых по любому каналу. К разрабатываемому устройству предъявляются следующие требования:

- способность к интеграции с любыми цифровыми интерфейсами;
- возможность изменения структуры устройства на аппаратном уровне, адаптирования устройства к различным факторам;
- желательна возможность более быстрого изменения алгоритма работы устройства посредством его программирования.

В качестве удобного инструмента создания такого устройства предлагается механизм программируемых логических интегральных схем (ПЛИС). Дабы достичь максимальной гибкости конфигурирования устройства, его можно выполнить в виде ядра софт-процессора с набором только самых необходимых команд и специальным языком программирования. Тогда задачу адаптации устройства под новые условия можно будет решать одновременно на двух уровнях:

1) программном – если нужно будет изменить режим работы заданного алгоритма, то в большинстве случаев потребуется изменить небольшое количество строк кода;

2) аппаратном – если возникла необходимость использовать новый алгоритм, можно изменить тракт данных процессора, или изменится канал передачи – интерфейс к нему всегда можно скорректировать.

2. Архитектура и микроархитектура устройства

Итоговое устройство представляет собой софт-процессор со специфичным набором команд. В первую очередь необходимо определить архитектуру ядра устройства. В качестве основы для разрабатываемой архитектуры используется архитектура MIPS [1, 2]. Устройство было собрано на базе ПЛИС от Xilinx с использованием комплекта **Xilinx Spartan-3AN FPGA Starter Kit Board** [3]. При этом сам софт-процессор описан с использованием языка **Verilog** [4].

От архитектуры MIPS были унаследованы следующие основные особенности:

- форматы инструкций;
- режимы адресации.

Помимо того, были унаследованы основные команды и дополнены командами, оптимизированными для реализации алгоритма **ГОСТ Р 34.12 — 2015** с размером блока 64 бита [5].

При составлении итогового набора инструкций основными целями являлись минималистичность, простота и максимальная применимость. Всего в конечном наборе присутствует 26 инструкций: основные

арифметические, логические, условные инструкции, инструкции переходов и ввода-вывода, а также добавленные инструкции для оптимизации криптографического алгоритма.

На рис. 1 показана схема микроархитектуры разработанного устройства. В ней можно выделить 6 основных модулей:

1. Регистровый файл (**reg_file**).
2. Арифметико-логическое устройство (**ALU**).
3. Контроллер (**controller**).
4. Память инструкций (**instr_mem**).
5. Память данных (**data_mem**).
6. Счётчик команд (**PC**).

Счётчик команд и регистровый файл, содержащий 32 видимых программисту регистра, определяют архитектурное состояние. Зная текущее архитектурное состояние, процессор точно определяет, какую операцию и над какими данными надо выполнить для получения нового архитектурного состояния. Помимо того, в регистровый файл отображаются состояния периферийных устройств [2].

Арифметико-логическое устройство осуществляет выполнение всех логических и арифметических операций над входными данными. Память инструкций содержит загруженную программу, а память данных – полученные с интерфейсов и промежуточные данные. Итоговое устройство имеет гарвардскую архитектуру, а потому эти два вида памяти разделены друг от друга. Контроллер преобразует код операции и функции

в управляющие сигналы. Основной упор в процессе оптимизации был сделан на максимальное снижение взаимодействия с памятью на время выполнения алгоритма шифрования (табл. 1). Причиной этому будет то, что взаимодействие с памятью является затратным и ресурсоёмким процессом [1].

Таблица 1

Инструкции оптимизации криптоалгоритма

Инструкция	Значение
slc	инструкция циклического сдвига влево
src	инструкция циклического сдвига вправо
kxor	инструкция ИСКЛЮЧАЮЩЕГО ИЛИ с ключом
cs	инструкция подстановки из таблицы подстановок

В случае с алгоритмом «МАГМА» были оптимизированы 3 операции, входящие в него с помощью соответствующих модулей:

1. Выработка раундовых ключей (**key_gen**).
2. Операция подстановки (**subst**).
3. Сдвиговые операции (**shifter**).

Модуль генерации раундовых ключей хранит 256-битный ключ, реализованный в виде блока **ROM**. На вход модуля поступает номер раунда. Для вычисления номера подключа из номера раунда использовалось одно замеченное свойство: если начать нумерацию раундов не

с 1, а с 0, то номером ключей для первых 24 (0 – 23) раундов является значение последних 3-х бит номера раунда. Для последних же 8-ми раундов (24 – 31) для получения номера раундового ключа достаточно произвести инвертацию последних 3-х бит. Данная операция описана в

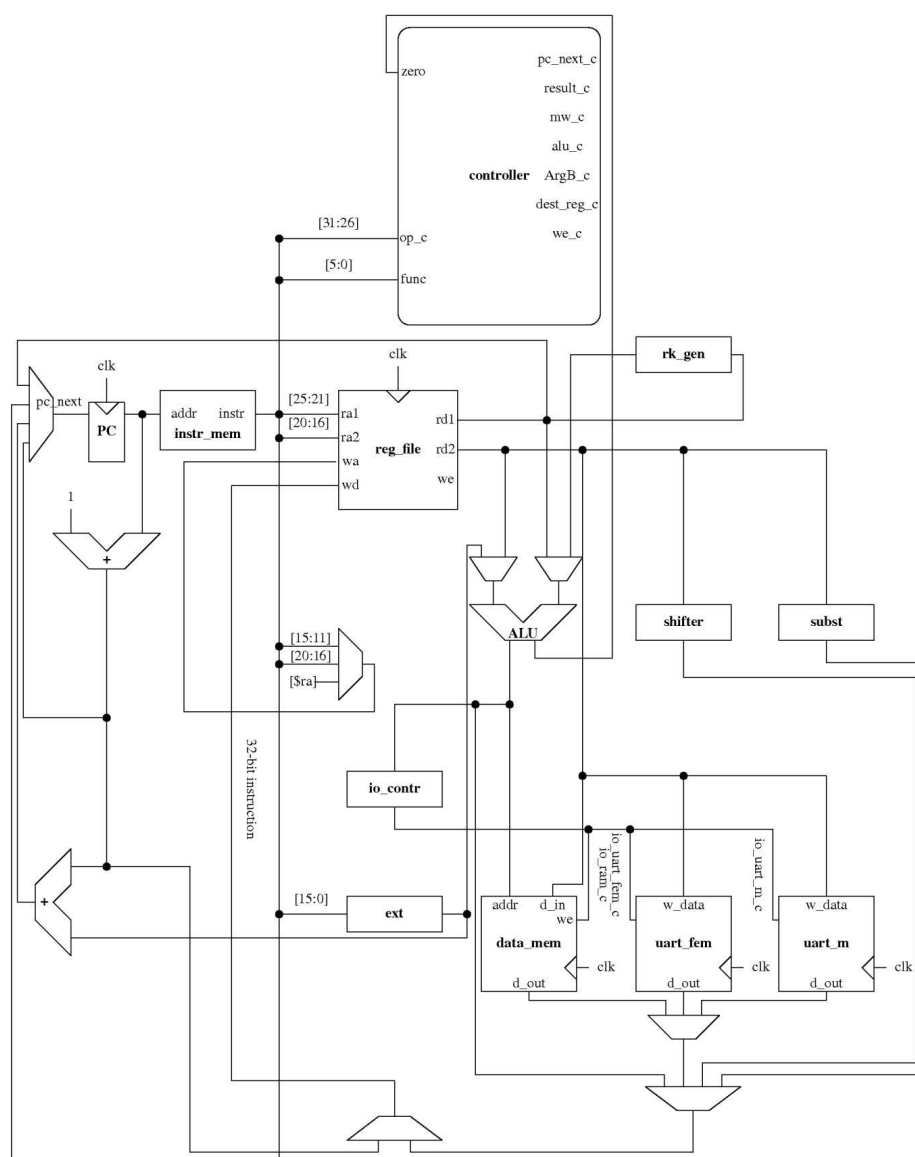


Рис. 1. Схема микроархитектуры устройства

следующей строке на языке **Verilog**:

```
assign keynum = (raund[4:3] == 2'b11)?raund[2:0]:~raund[2:0].
```

Выход данного модуля через мультиплексор подключён к первому входу **ALU**. На второй вход подаётся значение 32-битного блока. **ALU** производит операцию сложения данных значений по модулю 2. Таким образом, полностью реализовано сложение с раундовым ключом за 1 рабочий такт процессора.

Модуль, осуществляющий операцию подстановки на аппаратном уровне, реализован в виде 8-ми блоков **ROM**. На вход подаётся значение блока, для которого производится операция замены. Данное значение разбивается на 4-битные блоки, которые в дальнейшем используются в качестве адреса соответствующего им блока **ROM**. Полученные значения от каждого блока конкатенируются и подаются на выход [5].

Было расширено устройство сдвига посредством добавления в него возможности циклического сдвига. Данный вид сдвига не входит в базовую архитектуру **MIPS**-процессора. Таким образом, доля инструкций обмена данными с памятью во время выполнения основного алгоритма шифрования сведена к минимуму. Полная реализация одного раунда основного алгоритма «МАГМА» занимает всего 6 рабочих тактов процессора.

В итоговое устройство для тестирования была включена поддержка двух периферийных интерфейсов: **RS-232 DB9** и **DE9**. Передача данных поверх этого интерфейса происходит по протоколу **UART**. Конечно устройство производит шифрование и расшифрование данных, передаваемых по данным интерфейсам. Данные интерфейсы были вы-

браны по причине их изначального присутствия на тестовой плате и относительной простоты их реализации.

Оба интерфейса связаны с регистром **\$us (uart state)** в памяти. Данный регистр содержит информацию о наличии принятых данных в регистре приёмника и заполнении регистра передатчика. В случае переполнения регистра приёмника происходит соответствующее прерывание. Оба интерфейса отображаются в память данных. К ним можно обратиться на чтение или запись с помощью команд чтения и записи в память по определенным адресам [1].

3. Программируемость устройства

Последней желаемой характеристикой устройства является его программируемость. В данной работе программируемость реализована несколько нестандартным методом. Причины тому описаны ниже.

Во-первых, созданное процессорное ядро имеет гарвардскую архитектуру, это означает, что память команд и память данных физически разделены друг от друга и память команд не изменяется в процессе работы устройства.

Во-вторых, устройство реализовано на основе ПЛИС, это значит, что его структуру можно изменить в любой момент.

В результате память команд в данном случае можно реализовать в виде блока **ROM**. Программируемость же означает реконфигурацию памяти команд в соответствии с неким программным кодом во время реконфигурации всей ПЛИС. Первым преимуществом данного подхода является простота его реализации. Вторым преимуществом является то, что при синтезе нетлиста происходит оптимизация тракта данных

синтезатором, который отбрасывает незадействованную часть логики. Так, например, при реализации шифратора в конечном нетлисте не будет присутствовать таймер, описание которого, однако, присутствует в составе проекта.

Для программирования устройства выбран язык ассемблера **MIPS**. Для преобразования языка ассемблера в коды инструкций был написан скрипт на языке **AWK**.

4. Тестирование работы устройства

Производилось шифрование данных, передаваемых по тестовому каналу передачи данных с интерфейсом **RS-232**. Для реализации потокового шифратора основной алгоритм использовался в режиме гаммирования с обратной связью по выходу [6]. Данный режим позволяет использовать идентичные устройства с одинаковым алгоритмом работы как для шифрования, так и для дешифрования, необходимо лишь синхронизировать их. В общем случае защищённый канал между двумя участниками представлен на рис. 2. Результаты тестирования (исходное и зашифрованное сообщение) представлены на рис. 3.

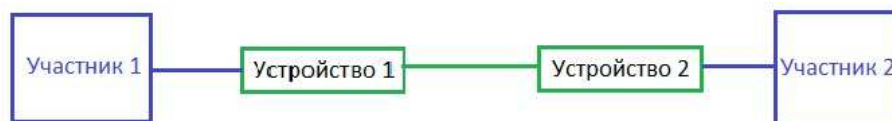


Рис. 2. Защищённый канал передачи

Общие характеристики конечного устройства приведены в табл. 2.

На основании вышеизложенных характеристик можно точно измерить возможные скорости шифрования устройства. Количество шиф-

где f – тактовая частота работы устройства при данной реализации, $N_{\text{и}}$ – количество инструкций для шифрования одного блока. Если учесть, что размер одного блока в битах $B \leq 64$, тогда максимальная скорость работы устройства:

$$V_{\text{ш}} \cdot B \leq 662251 \frac{\text{байт}}{\text{с}}.$$

Дальнейшие изменения скорости работы могут быть связаны со скоростью работы интерфейса. Устройство показало стабильную передачу зашифрованных данных по **RS-232** при передаче данных со скоростью 38400 бод. При дальнейшем увеличении скорости передачи появлялись помехи, которые «лавиной» искажали весь канал. Данные помехи связаны с несовершенством канала **RS-232**. Увеличение скорости передачи возможно при использовании порта **USB**.

5. Заключение

В работе на практике был показан метод для разработки универсального устройства поточного шифрования. Было получено устройство, представляющее собой софт-процессор с оптимизированными модулями для криптографических вычислений, описанный на языке **Verilog**. Если сравнивать полученное устройство с готовыми криптоконтроллерами, то представители данной группы обладают значительно большей производительностью по сравнению с софт-процессорами, так как являются готовыми оптимизированными аппаратными блоками, а софт-процессоры — по факту, лишь совокупностью запрограммированных ячеек. Так, например, контроллеры серии **STM32F4xx** компании **STMicroelectronics** способны работать на частоте до 168 МГц,

используя 32-битный тракт данных, что в результате приводит к скорости шифрования в разы большей, чем у получившегося устройства [7]. Однако софт-процессоры имеют гораздо большую гибкость по сравнению с готовыми аппаратными блоками. Так, например, при необходимости реализовать алгоритм «МАГМА» на базе контроллера из серии **STM32F4xx** пришлось бы реализовывать его на программном уровне, что заняло бы не меньше времени, чем описание оптимизированного модуля на **Verilog** или **VHDL** для софт-процессора, а работало бы, возможно, несколько хуже и с затратой несколько больших ресурсов. При этом намного большие проблемы возникли бы при необходимости реализовать шифрование данных, передаваемых через специфичный канал передачи.

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод о том, что представленный подход является отличным решением для защиты специфичных каналов передачи данных в случаях, не требующих большой скорости передачи.

Список литературы

1. **P. Pal Chaudhuri.** Computer organisation and design. Delhi: PHI Learning, 2014. 897 с.
2. **David M. Harris and Sarah L. Harris.** Digital Design and Computer Architecture. Boston: Morgan Kaufman, 2007. 570 с.
3. **ГОСТ Р 34.12-2015** Информационная технология. Криптографическая защита информации. Блочные шифры. М.: Стандартин-

форм, 2015. 25 с.

4. **IEEE 1364-2001** IEEE Standard Verilog Hardware Description Language. USA: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2001 778 с.
5. **Pong P. Chu.** FPGA prototyping by Verilog examples Xilinx Spartan-3 Version. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. 488 с.
6. Spartan-3A/3AN FPGA Starter Kit Board User Guide. v. 1.1. XILINX, 2008. 140 с.
7. **Самоделов А.** Криптография в отдельном блоке: криптографический сопроцессор семейства STM32F4xx. Официальный сайт компании «Компэл». URL: <http://www.compel.ru/lib/ne/2012/6/4-kriptografiya-v-otdelnom-bloke-kriptograficheskiy-so-protsessor-semeystva-stm32f4xx>. (дата обращения 03.12.2016).

Summary

Nosov L. S., Pipunyorov E. Y. Stream encryption based on FPGA

It is proposed to use a soft-processor, which described in Verilog language, and FPGA to create a universal stream cipher, which could be programmed and quickly adapted at the hardware level.

Keywords: information security, FPGA, stream cipher.

References

1. **P. Pal Chaudhuri.** *Computer organisation and design*, Delhi: PHI Learning, 2014, 897 p.

2. **David M. Harris and Sarah L. Harris.** *Digital Design and Computer Architecture*, Boston: Morgan Kaufman, 2007, 570 p.
3. **GOST R 34.12-2015** *Informatsionnaya tekhnologiya. Kriptograficheskaya zashchita informatsii. Blochnyye shifry* (Information technology. Cryptographic information security. Block ciphers), М.: Standartinform, 2015, 25 p.
4. **IEEE 1364-2001** IEEE Standard Verilog Hardware Description Language. USA: The Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2001, 778 p.
5. **Pong P. Chu.** FPGA prototyping by Verilog examples Xilinx Spartan-3 Version. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, 488 p.
6. Spartan-3A/3AN FPGA Starter Kit Board User Guidei. v. 1.1. XILINX, 2008, 140 p.
7. **Samodelov A.** Kriptografiya v otдел'nom bloke: kriptograficheskiy soprotsessor semeystva STM32F4xx. Ofitsial'nyy sayt kompanii «Kompel» (Cryptography in a separate block: cryptographic coprocessor STM32F4xx family. The official website of the company «Kompel»), URL: <http://www.compel.ru/lib/ne/2012/6/4-kriptografiya-v-otdelnom-bloke-kriptograficheskiy-so-protssessor-semeystva-stm32f4xx>. (date of the application: 03.12.2016).

Для цитирования: Носов Л. С., Пипуныров Е. Ю. Устройство поточного шифрования на основе ПЛИС // *Вестник Сыктывкарского*

университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 62–76.

For citation: Nosov L. S., Pipunurov E. Y. Stream encryption based on FPGA, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 62–76.

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 21.10.2019

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 372.851

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ
СТАРШЕКЛАССНИКОВ РАСПОЗНАВАНИЮ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ**

С. Н. Дорофеев, Н. В. Наземнова

В статье изучается проблема обучения школьников распознаванию геометрических образов. Отмечается, что это качество в процессе обучения геометрии носит личностно ориентированный характер, обосновывается тот факт, что обучение распознаванию геометрических образов будет наиболее эффективным, если использовать деятельностный подход.

Ключевые слова: обучение математике, распознавание геометрических образов, деятельностный подход, векторно-координатный метод, обучение школьников открытию «нового» знания.

На современном этапе развития образовательного пространства как никогда обострилась проблема формирования у обучающихся такой системы знаний, умений и навыков, которые способствуют их самоопределению, становлению каждого из обучающихся как личности, реали-

зации условий, обеспечивающих жизнедеятельность; достижению мирового уровня общей профессиональной культуры общества; формированию адекватной современному уровню знаний и уровню общеобразовательной программы интеграции личности в научную и мировую культуру. Человечество значительно расширило свои познания о скрытых от внешнего взгляда механизмах функционирования человеческого организма, доказательно представило концепцию о значительных его резервах и возможностях каждой личности в самосовершенствовании, в овладении современной наукой и техникой [1; 2]. Ознаменовано время всеобщего осознания того, что уровень самореализации своих способностей каждой личностью определяет масштабы достижения человечества в обретении материальных и духовных благ, сбережения окружающей природной среды. В сферу интересов личности современного общества входит умение адаптироваться к новым условиям жизни; критически оценивать и находить пути решения возникающих проблем, анализировать ситуацию, адекватно изменять организацию своей деятельности. Усвоенные обучающимися знания, умения и навыки должны быть такими, чтобы каждый выпускник школы на завершающем этапе обучения мог применять их в конкретной реальной ситуации с целью ее распознавания, исследования и определения направления развития и прогнозирования всех возможных исходов как позитивного, так и негативного характера [3]. Верно определенный исход ситуации позволяет в будущем избежать его негативных воздействий. Из сказанного следует, что школа должна предоставить учащимся возможность самоопределения, самообучения и самовоспитания. В то же время в массовой

школе все еще преобладают традиционные модели обучения, ориентация на усвоение знаний с ее неизменным атрибутом — классно-урочной формой обучения, без учета личностных особенностей обучающихся. В тоже время современные технологии обучения по своей сути являются личностно ориентированными, направленными на развитие личности в процессе обучения [4].

Решению означенных проблем в значительной степени способствуют идеи деятельностного подхода к обучению школьников математическим знаниям. Как известно, деятельностный подход к обучению учащихся математическим знаниям предполагает как реализацию личностно ориентированной парадигмы образования, так и использование различных видов учебной деятельности, наиболее рациональных способов усвоения знаний, позволяющих проектировать качественное содержание математического образования. Согласно действующей программе геометрической подготовки учащихся общеобразовательных учреждений, одним из важных ее тем является векторный и координатный метод на плоскости и в пространстве. Контролю над качеством усвоения этой темы посвящены задачи как ОГЭ, так и ЕГЭ. Обладая достаточно высоким потенциалом, позволяющим практически решать любую геометрическую задачу, этот метод в школьном курсе геометрии используется крайне ограниченно. Необходимое условие изучения этого метода на завершающем этапе обучения старшеклассников геометрическим методам познания окружающего мира состоит именно в том, чтобы обучить школьников универсальным способам разрешения проблемных геометрических ситуаций, познания окружающих их объектов. Как показывают наши

наблюдения, многие учащиеся, к сожалению, не владеют умением задавать декартову систему координат наиболее рациональным способом, связанную с данным геометрическим объектом, не умеют применять скалярное произведение векторов к доказательству перпендикулярности прямых, к вычислению величин углов, к нахождению углов между прямыми и плоскостями, к вычислению длин отрезков и т. д. Наличие противоречия между достаточно высоким научным и математическим потенциалом векторно-координатного метода и крайне низким уровнем его использования в школьном курсе геометрии обуславливает разработку методических основ использования векторно-координатного метода в распознавании образов геометрических фигур на плоскости и геометрических тел в пространстве [5]. В обучении школьников это предполагает выполнение трех этапов:

1. Перевод задачи на векторный, координатный язык или векторно-координатный язык.
2. Преобразование векторного, аналитического или векторно-координатного выражения.
3. Обратный перевод с векторного, аналитического или векторно-координатного языка на язык, в терминах которого сформирована исходная задача.

Поэтому при решении таких задач учащиеся должны овладеть следующими умениями:

- а) строить точку по ее координатам;
- б) вычислять координаты заданных точек;
- в) уметь вводить систему координат, что является одним из основ-

ных этапов;

- г) вычислять расстояние между точками, заданными координатами;
- д) составлять уравнение фигур по их свойствам;
- е) видеть за уравнениями конкретный геометрический образ;
- ж) преобразовывать алгебраические равенства.

Наиболее эффективным средством формирования действия по распознаванию геометрических образов является использование специальных геометрических задач или их систем, которые мы предлагаем в качестве входных тестов для учащихся с инструкциями по решению.

Каждая из этих задач ориентирована на формирование умений:

- 1) выделять простые многоугольники из состава чертежа;
- 2) решать задачи на построение и распознавание образа по определению;
- 3) решать задачи на нахождение пересечения фигур;
- 4) решать задачи на оптимальный выбор системы координат;
- 5) устанавливать сходства и различия между изображениями;
- 6) решать задачи на построение точек по их координатам;
- 7) решать задачи на вычисление и доказательство векторным, координатным или векторно-координатным способом;
- 8) видеть эвристические задачи;
- 9) определять взаимоположения элементов чертежа;
- 12) сопоставлять изображения на основе мысленного поворота одного из них;
- 13) распознавать объект на основе сопоставления его различных изображений;

14) мысленно конструировать фигуры на основе заданных элементов.

Разберем некоторые задачи, способствующие формированию этих умений.

1. Нахождение симметричных точек.

а) Выберите на плоскости начало отсчета, единичные и взаимно перпендикулярные отрезки и направления отсчета. Постройте точки $A(1, 3)$, $A_1(-1, 3)$, $A_2(1, -3)$, $A_3(3, 1)$. Найдите образы данных точек при осевой симметрии: а) относительно оси Oy , относительно оси Ox , относительно биссектрисы первого и второго координатного углов.

Задача предполагает формирование действия по определению расположения прямоугольной системы координат на плоскости, по построению точек на координатной плоскости, если известны их координаты и перемещения. Сначала представьте объект, его расположение относительно прямоугольной системы координат.

б) В некоторой системе координат заданы точки $A(7, 2)$, $B(-7, 2)$. Восстановите эту систему координат.

При решении этой задачи ученики должны хорошо знать расположение точек, представлять их расположение на координатной плоскости, применять свойства симметрии относительно прямой. Задание напоминает собой по форме обычное школьное упражнение. Ученик чертит систему координат, а не располагает точки, а потом думает о ее расположении.

в) Постройте на координатной плоскости любую прямую и найдите ее уравнение. Решение: изобразите координатную плоскость. Посмотрите

те внимательно и выберите такую систему отсчета, чтобы можно было, не решая на бумаге, найти уравнение прямой $x = 0$, $y = 0$. Это задание хорошо дифференцирует испытуемых по их умению преобразовывать заданный чертеж, перекодировать точки на плоскости, используя для этого чувственные и понятийные критерии анализа.

2. Задачи на построение и распознавание образа по определению.

а) Выберите систему координат, постройте точки по их координатам, составьте развертку одной грани данной фигуры, определите площадь поверхности тела. К каким геометрическим телам оно относится (платоновым, архимедовым). Координаты скольких точек надо знать, чтобы определить площадь ее поверхности?

На изображении додекаэдра можно выделить 12 граней, каждая из которых представляет собой правильный пятиугольник, имеющий ось симметрии. Достигается это методом представления, с применением различных понятийных критериев анализа пространственных изображений геометрических тел. При решении учащиеся применяют кодирование точек путем помещения их в прямоугольную систему координат.

б) Какую фигуру образует множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств: $2 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq -1$. Дайте ее определение. Найдите координаты ее вершин.

Решение: как найти множество точек плоскости, являющегося решениями первого и второго неравенств? Как найти пересечение этих геометрических фигур? Заштрихуйте его карандашом, обозначьте буквами. Определите координаты вершин способом, который вам хорошо

известен. $ABCD$ — это прямоугольник с вершинами в точках $A(2, -1)$, $B(2, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, -1)$.

В процессе выполнения этого задания у школьников формируется представление о возможности перекодирования геометрической фигуры в систему неравенств и, наоборот, умение перекодирования системы алгебраических условий в некоторую геометрическую фигуру.

3. Задачи на нахождение пересечения фигур.

Задания этого типа предполагают мысленное совмещение фигур как на координатной плоскости, так и в пространстве в прямоугольной джекартовой системе координат путем наложения и определения на этой основе их взаимного пространственного расположения. При решении таких задач можно варьировать сложность задания по числу входящих в них объектов. Правильность определяется путем анализа заштрихованной фигуры. Примером таких заданий может служить задача: даны изображения некоторых плоских или пространственных фигур. Посмотрите внимательно на чертеж и найдите пересечение всех фигур. Заштрихуйте его карандашом. Что это за фигура? Дайте ее определение.

4. Задачи на оптимальный выбор системы координат.

1. Длина отрезка $MN = 7$ см. Выберите на плоскости систему координат, в которой можно было бы наиболее просто определить координаты концов отрезка. Выберите систему координат так, чтобы координаты концов отрезка MN были бы $M(3; 0)$, $N(-3; 0)$.

2. Дан равносторонний треугольник. Задайте длину его стороны. Выберите на плоскости систему координат так, чтобы можно было про-

ще определить координаты его вершин.

3. Равнобедренная трапеция имеет координаты вершин нижнего основания $A(-3, 0)$ и верхнего основания $C(2, 2)$. Выберите на плоскости систему координат так, чтобы наиболее простым способом определить длину средней линии трапеции.

Подходы ученых методистов, педагогов и психологов к обучению школьников распознаванию образов различны, но есть одно общее — это деятельность, направленная на усвоение более эффективных средств и методов обучения старшекласников усвоению новой, более полной информации об исследуемом геометрическом образе. Распознавание геометрического образа — процесс творческий, требующий более тщательного анализа исследуемого объекта, и связан с формированием умения делать новое открытие в исследуемой ситуации. Обучение школьников открытию «нового» в методике обучения математике всегда представляет собой труднейшую задачу [3]. В связи с этим актуальной становится проблема разработки таких заданий, которые наиболее эффективным образом способствуют формированию умения составлять и решать эвристические задачи. Предложенные выше задачи могут быть обобщены на случай пространства, например:

1. Длина отрезка $MN = 7$ см. Выберите в пространстве систему координат, в которой можно было бы наиболее просто определить координаты концов отрезка. Выберите систему координат так, чтобы координаты концов отрезка MN были бы $M(3; 0; 1)$, $N(-3; 0; 1)$.

2. Дан равносторонний треугольник. Задайте длину его стороны. Выберите в пространстве систему координат так, чтобы можно было

проще определить координаты его вершин.

3. Равнобедренная трапеция имеет координаты вершин нижнего основания $A(-3; 0; -1)$ и верхнего основания $C(2; 2; -1)$. Выберите в пространстве систему координат так, чтобы наиболее простым способом можно было определить длину средней линии трапеции.

Таким образом, обучение школьников распознаванию геометрических образов на основе деятельностного подхода связано с формированием умений применять векторно-координатный метод к решению геометрических задач, обобщением конкретной задачной ситуации и поиском ее оптимальных решений, способствует формированию потребности в ее творческом преобразовании.

Список литературы

1. **Ананьев Б. Г.** Психология чувственного познания. М., 1960. 488 с.
2. **Ананьев Б. Г.** Новое в учении о восприятии пространства // *Вопросы психологии*. 1960. №1. С. 18–29.
3. **Борадай Ю. М.** Воображение и теория познания. М., 1966. 192 с.
4. **Дорофеев С. Н.** Трудности методики обучения решению задач векторным методом и пути их преодоления // *Материалы межрегиональной научно-практической конференции*. Пенза, 1997. С. 389–390.
5. **Наземнова Н. В.** Многокомпонентное упражнение как средство формирования у учащихся действия по распознаванию образа //

Университетское образование : сб. науч. работ, представленных на Междунар. науч.-метод. конф. Пенза: Приволжский дом знаний, МКУО, 2004. С. 326–329.

Summary

Dorofeev S. N., Nazemnova N. V. Methodological features of teaching high school students to recognize geometric images

The article deals with the problem of teaching students to recognize geometric images. It is noted that this quality in the process of learning geometry has a personality-oriented character, the fact that learning to recognize geometric images will be most effective if you use the activity approach is substantiated.

Keywords: teaching mathematics, recognition of geometric images, activity approach, vector-coordinate method, teaching students the discovery of «new» knowledge.

References

1. **Ananyev B. G.** *Psikhologiya chuvstvennogo poznaniya* (Psychology of sensory cognition), M, 1960, 488 p.
2. **Ananyev B. G.** *Novoye v uchenii o vospriyatii prostranstva* (New in the doctrine of perception of space), *Questions of psychology*, 1960, No 1, pp. 18–29.
3. **Borodai Yu. M.** *Voobrazheniye i teoriya poznaniya* (Imagination and theory of knowledge), M, 1966, 192 p.

4. **Dorofeev S. N.** Trudnosti metodiki obucheniya resheniyu zadach vektornym metodom i puti ikh preodoleniya (Difficulties of teaching methods to solve problems by vector method and ways to overcome them), *Materials of interregional scientific and practical conference*, Penza, 1997, pp. 389–390.
5. **Nazemnova N. V.** Mnogokomponentnoye uprazhneniye kak sredstvo formirovaniya u uchashchikhsya deystviya po raspoznavaniyu obraza (Multicomponent exercise as a means of forming students' actions on image recognition), *University education: sat. nauch. works submitted to the international exhibition. science.-method.Conf. Penza: Privolzhsky house of knowledge*, MKUO, 2004, pp. 326–329.

Для цитирования: Дорофеев С. Н., Наземнова Н. В. Методические особенности обучения старшеклассников распознаванию геометрических образов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 77–88.*

For citation: Dorofeev S. N., Nazemnova N. V. Methodological features of teaching high school students to recognize geometric images, *Bulletin of Syktывkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 77–88.

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 372.851

ОБОБЩЕНИЕ В АНАЛИЗЕ КАК СРЕДСТВО
ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ

Е. Р. Мансурова, Э. Р. Низамова

В статье на примере темы «Первообразная и интеграл» рассматривается роль обобщения в анализе в повышении уровня математической подготовки учащихся общеобразовательной школы. Представлены задания по теме из учебных пособий по алгебре и началам анализа, используемых в настоящее время в школьном курсе математики, а также из дидактических материалов для профильных классов и материалов ЕГЭ.

Ключевые слова: обобщение, анализ, школа, профиль, интеграл, первообразная, производная, функция, ЕГЭ.

Известна [1–3] роль обобщений в математике в активизации мыслительной деятельности, развитии интеллектуальных способностей учащихся, повышении их уровня знаний и математической культуры.

В [4] рассматривается роль обобщений в формировании основных понятий по математическому анализу в вузе.

Рассмотрим обобщающие задания по теме «Первообразная и интеграл» в учебных пособиях по алгебре и анализу, рекомендованных общеобразовательной школе, а также из дидактических материалов для профильных классов и материалов ЕГЭ.

Задания на обобщение интеграла от непрерывной функции по конечному промежутку:

[5, с. 183] Вычислить $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Данная функция определена на полуинтервале $(-1; 0]$. Используя понятие интеграла от непрерывной функции на отрезке, рассматриваем интеграл на промежутке $[-1 + \varepsilon; 0]$ при $\varepsilon > 0$. Тогда определённым интегралом от функции f от a до b назовём число $F(b) - \lim_{x \rightarrow a} F(x)$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(\varepsilon - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

[5, с. 207] X.24 а) Найдите $\int_{-1}^1 x^2 R(x) dx$, где $R(x)$ — функция Римана, равная 0 во всех иррациональных точках и равная $\frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}$ во всех рациональных точках указанного отрезка.

Функция Римана не является непрерывной функцией и функцией с конечным числом точек разрыва на промежутке, поэтому интеграл вычисляется с помощью сумм Дарбу по аналогии с доказательством интегрируемости функции $R(x)$ на отрезке $[0; 1]$ [5, с. 186]. Заметим, что интеграл можно вычислить и с использованием теории меры множеств и

эквивалентности функции $R(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ нулевой функции [6].

[5, с. 207] X.24 б) Существует ли $\int_0^1 \min\{1-R(x); D(x)\} dx$ (где $R(x)$ — функция Римана, $D(x)$ — функция Дирихле)?

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

$$\min\{1-R(x); D(x)\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q}, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Рассуждаем, как в [5, с. 186]. Так как не выполняется необходимое и достаточное условие интегрируемости функции, то есть для любого $\varepsilon > 0$ не существует разбиений τ_1 и τ_2 , таких, что $S_{\tau_1} - s_{\tau_2} < \varepsilon$, где S_{τ_1} и s_{τ_2} — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, следовательно, интеграл $\int_0^1 \min\{1-R(x); D(x)\} dx$ не существует.

Заметим, что рассматривая интеграл как интеграл Лебега и учитывая эквивалентность подынтегральной функции нулю на $[0; 1]$, получим, что интеграл существует и равен нулю.

Задание на обобщение интеграла по конечному промежутку:

[5, с. 184] Найдём $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Интегралы с параметрами, в том числе на наименьшее и наибольшее значения интеграла, представлены в [7–9]:

[9, с. 28] $f(x) = \int_0^x (1-t^2) dt$. Найдите $\int f(x) dx$.

$$\int_0^x (1 - t^2) dt = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3}.$$

$$\int \left(x - \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C, \quad C - \text{const.}$$

[7] 26.12. При каком положительном значении a определённый интеграл $\int_0^a (6 - 2x) dx$ принимает наибольшее значение?

$\int_0^a (6 - 2x) dx = 6a - a^2$. Функция $f(a)$ с учётом условия задачи определена на \mathbb{R}_+ , где $f(a) = 6a - a^2$.

Находим стационарные точки функции $f(a)$.

$$f'(a) = 6 - 2a = 0, \text{ отсюда, } a = 3.$$

При $a < 3$ $f'(a) > 0$, при $a > 3$ $f'(a) < 0$. Отсюда следует, что $a = 3$ — точка максимума. Так как на \mathbb{R}_+ $a = 3$ — единственная критическая точка (максимума), то [10, с. 373] при $a = 3$ интеграл принимает наибольшее значение.

[8] № 270. Найдите наименьшее и наибольшее значения интеграла:
 $\int_0^a \sin \frac{x}{2} dx$.

$\int_0^a \sin \frac{x}{2} dx = -2(\cos \frac{a}{2} - 1)$. Областью значений функции $\cos x$ является промежуток $[-1; 1]$, тогда $0 \leq 1 - \cos \frac{a}{2} \leq 2$ и наибольшее значение интеграла равно 4, а наименьшее значение равно 0.

[9, с. 30] $f(y) = ky^2 - y + k$. При каких значениях k при любом a и при любом b , большем, чем a , выполняется неравенство $\int_a^b f(y) dy > 0$?

По свойствам определённого интеграла $f(y) \geq 0$ на $[a; b]$, тогда $ky^2 - y + k \geq 0$ на этом промежутке. По свойству квадратичной функции:

$$\begin{cases} k > 0, \\ D = 1 - 4k^2 \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем $k \geq 0,5$.

Связь понятий «интеграл», «производная», «геометрический смысл интеграла» просматривается, например, в заданиях [7–8].

[8] № 269. При каких значениях k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, будет наименьшей?

При использовании геометрического смысла интеграла площадь фигуры будет равна $\int_{x_1}^{x_2} (kx + 1 - x^2 - 2x + 3) dx$, где x_1, x_2 — точки пересечения параболы и прямой. Точка, в которой площадь фигуры будет наименьшей, будет критической для первообразной и нулём для подынтегральной функции, то есть одной из точек пересечения параболы и прямой. Учитывая, что подынтегральная функция положительна на указанном промежутке, имеем, что x_1 — точка, в которой площадь фигуры будет наименьшей. Точки пересечения линий определяются по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{k - 2 \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{где } D = (k - 2)^2 + 16.$$

Учитывая, что корни симметричны относительно прямой $x = \frac{k-2}{2}$ и хорда прямой, заключённой внутри параболы, делится точкой $(0; 1)$ пополам, будем иметь, что $k = 2$.

[7] 26.14. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, равна 8?

Используя геометрический смысл интеграла, будем иметь, что $S = \int_0^a 2x^3 dx = 8$. Решая уравнение, получим $a = \pm 2$.

Использование геометрического смысла интеграла для вычисления определённого интеграла представлено, например, в [8].

[8] 26.28. Вычислить, используя геометрический смысл интеграла:

$$\int_{-5}^5 \sqrt{25 - x^2} dx.$$

Подынтегральная функция $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Получаем полуокружность с радиусом, равным 5, и центром в начале координат. По формуле площади круга найдём $S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$.

Аналогично решается следующая задача.

[11] № 1044. Вычислить, используя геометрический смысл интеграла:

$$\int_0^4 \sqrt{4x - x^2} dx.$$

Получим уравнение окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Тогда искомая площадь равна 2π .

[12] 6.35. а) Вычислить, пользуясь геометрическим смыслом интеграла: $\int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx$.

Учитывая, что $y = \sin x < 0$ на $[-\pi; 0]$, $\int_{-\pi}^0 \sin x dx = -S$. Тогда $S = \int_0^{\pi} \sin x dx$. Отсюда имеем $\int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = -S + S = 0$.

В материалах ЕГЭ также встречаются задания, где используются понятия и «производная», и «первообразная», например:

[13] (Задание 7 № 323077). На рис. 1 изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.

По определению первообразной, на интервале $(-3; 5)$ справедливо равенство $f(x) = F'(x)$. Следовательно, решениями уравнения $f(x) = 0$

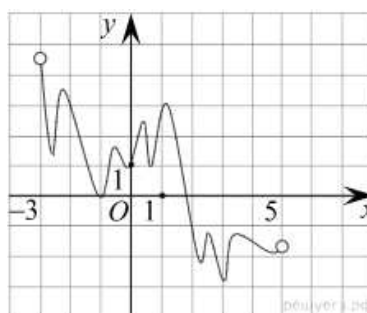


Рис. 1. График первообразной функции $f(x)$

являются стационарные точки; по геометрическому смыслу производной — это точки, в которых касательная к графику функции $F(x)$ параллельна оси Ox . Таким образом, на отрезке $[-2; 4]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет 10 решений.

[14] (Задание 7 № 323381). На рис. 2 изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 20x^2 + 201x - \frac{5}{9}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

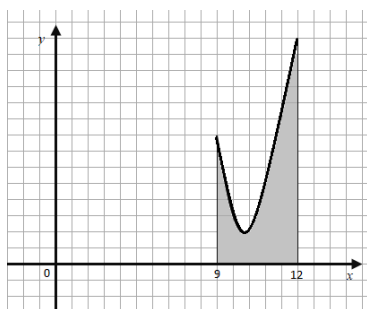


Рис. 2. График функции $f(x)$

По формуле Ньютона-Лейбница площадь фигуры $S = F(b) - F(a)$, получаем $S = F(12) - F(9) = 9$.

Выполнение таких заданий исключает формализм в усвоении материала и способствует повышению уровня математической подготовки

учащихся по изучаемой теме.

Список литературы

1. **Давыдов В. В.** Виды обобщения в обучении. М.: Педагогическое общество России, 2000. С. 157–173.
2. **Колягин Ю. М.** Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2009. С. 86–95.
3. **Сойер У. У.** Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972. С. 37–47.
4. **Прозоровская С. Д., Филлипова Т. И., Кропачева Н. Ю.** Формирование основных понятий математического анализа на основе теоретического обобщения // *Сибирский педагогический журнал*. 2012. № 8. С. 88–92.
5. **Пратусевич М. Я.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Просвещение, 2010. 463 с.
6. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. СПб.: Лань, 2018. 560 с.
7. **Мерзляк А. Г.** Алгебра. 11 класс. Харьков: Гимназия, 2011. 431 с.
8. **Муравин Г. К.** Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. М.: Дрофа, 2013. 253 с.

9. **Рыжик В. И.** Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу для 10–11 классов. М.: Просвещение, 1997. 144 с.
10. **Мордкович А. Г.** Алгебра и начала анализа. 10 кл. М.: Мнемозина, 2009. 434 с.
11. **Мордкович А. Г.** Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. М.: Мнемозина, 2003. Ч. 2. 315 с.
12. **Никольский С. М.** Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. М.: Просвещение, 2009. 464 с.
13. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=183> (дата обращения: 15.11.19).
14. ALEXLARIN.NET [Электронный ресурс]. URL: <http://alexlarin.net/ege20.html> (дата обращения: 15.11.19).

Summary

Mansurova E. R., Nizamova E. R. Generalization in analysis as a means of improving the quality of mathematical preparation of students

The article considers the role of generalization in analysis in improving the level of mathematical training of secondary school students on the example of the topic «Primitive and integral». Tasks on the topic are presented from textbooks on algebra and the principles of analysis currently used in the school course in mathematics, as well as from didactic materials for specialized classes and materials of the exam.

Keywords: generalization, analysis, school, profile, integral, antiderivative, derivative, function, USE.

References

1. **Davydov V. V.** *Vidy obobshcheniya v obuchenii* (Types of generalization in learning), M.: Pedagogical Society of Russia, 2000, pp. 157–173.
2. **Kolyagin Yu. M.** *Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obshchaya metodika* (Methods of teaching mathematics in high school), General technique. Cheboksary: Publishing house of Chuvash. Univ., 2009, pp. 86–95.
3. **Sawyer W. W.** *Prelyudiya k matematike* (Prelude to mathematics), M.: Education, 1972, pp. 37–47.
4. **Prozorovskaya S. D., Filipova T. I., Kropacheva N. Yu.** Formirovaniye osnovnykh ponyatiy matematicheskogo analiza na osnove teoreticheskogo obobshcheniya (Formation of the basic concepts of mathematical analysis based on theoretical generalization), *Siberian Pedagogical Journal*, 2012, № 8, pp. 88–92.
5. **Pratusevich M. Ya.** *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass* (Algebra and the beginning of mathematical analysis, Grade 11), M.: Education, 2010, 463 p.
6. **Nathanson I. P.** *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* (The theory of functions of a real variable), St. Petersburg: Doe, 2018, 560 p.

7. **Merzlyak A. G.** *Algebra. 11 klass* (Algebra. Grade 11), Kharkov: Gymnasium, 2011, 431 p.
8. **Muravin G. K.** *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 kl* (Algebra and the beginning of mathematical analysis. 11 cl), M.: Bustard, 2013, 253 p.
9. **Ryzhik V. I.** *Didakticheskiye materialy po algebre i matematicheskoy analizu dlya 10-11 klassov* (Didactic materials on algebra and mathematical analysis for grades 10-11), M.: Education, 1997, 144 p.
10. **Mordkovich A. G.** *Algebra i nachala analiza. 10 kl* (Algebra and the beginning of analysis. 10 cl), M.: Mnemosina, 2009, 443 p.
11. **Mordkovich A. G.** *Algebra i nachala analiza. 10-11 kl* (Algebra and the beginning of analysis. 10-11 cl), Ch. 2, M.: Mnemosina, 2003, 315 p.
12. **Nikolsky S. M.** *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass* (Algebra and the beginning of mathematical analysis, Grade 11), M.: Education, 2009, 446 p.
13. Reshu YEGE (I will solve the Unified State Exam) [Electronic resource]. URL: <https://math-ege.sdangia.ru/test?theme=183> (accessed 11.15.19).
14. ALEXLARIN.NET [Electronic resource]. URL: <http://alexlarin.net/ege20.html> (accessed 11.15.19).

Для цитирования: Мансурова Е. Р., Низамова Э. Р. Обобщение в анализе как средство повышения качества математической подготовки учащихся // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 89–100.*

For citation: Mansurova E. R., Nizamova E. R. Generalization in analysis as a means of improving the quality of mathematical preparation of students, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 89–100.

Марийский государственный университет

Поступила 19.11.2019

НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.

Серия 1: Математика. Механика. Информатика.

Выпуск 3 (32). 2019

УДК 004.8

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ МЕТОДОМ K-СРЕДНИХ

Н. О. Котелина, Б. Р. Матвийчук

В работе рассматривается задача кластеризации данных методом k -средних на примере растрового изображения. Решением задачи будет служить программа, реализующая метод k -средних и в качестве результата работы выдающая изображения, разбитые на k кластеров. Оценивается качество кластеризации.

Ключевые слова: метод k -средних, кластеризация, кластер.

1. Введение

1.1. Основные определения

Кластеризация — это разбиение элементов некоторого множества на группы по принципу схожести. Эти группы принято называть *кластерами*.

Объект — элементарная группа данных, с которой оперируют алгоритмы кластеризации.

Каждый объект описывается *вектором характеристик* [1]:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Компоненты x_i являются отдельными характеристиками объекта. Как правило, это количественные признаки (координаты для точки, цветовые компоненты для цвета, пол, возраст для человека), но существуют алгоритмы, которые работают с качественными признаками (цвет, статус, воинское звание и т. д.).

Количество характеристик m определяет размерность пространства характеристик. Множество, состоящее из всех векторов характеристик, будем обозначать :

$$A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Отметим, что для корректной работы алгоритмов кластеризации характеристики следует нормализовать, то есть привести к одному диапазону.

Кластер — подмножество близких друг к другу объектов из A .

Расстояние $\rho(x_i, x_j)$ между объектами x_i и x_j — результат применения выбранной метрики в пространстве характеристик [1].

Для ускорения процесса кластеризации можно уменьшить размерность пространства характеристических векторов (например, методом главных компонент), то есть выделить наиболее важные свойства объектов. Уменьшение размерности в ряде случаев позволяет визуально оценивать результаты кластеризации.

1.2. Виды метрик

Метрика выбирается в зависимости:

- 1) от пространства, в котором расположены объекты;
- 2) неявных характеристик кластеров.

Евклидово расстояние

$$\rho(x_i, y_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (1)$$

Одна из наиболее известных и часто применяемых метрик. Представляет собой расстояние между точками в n -мерном пространстве.

Квадрат евклидова расстояния

$$\rho(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2. \quad (2)$$

Для придания больших весов более отдаленным друг от друга объектам можно воспользоваться квадратом евклидова расстояния [2].

Манхеттенское расстояние или «расстояние городских кварталов»

$$\rho(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \quad (3)$$

В большинстве случаев эта мера расстояния приводит к результатам, подобным расчетам расстояния Евклида. Однако для этой меры влияние отдельных выбросов меньше, чем при использовании евклидова расстояния, поскольку здесь координаты не возводятся в квадрат [2].

Расстояние Чебышева

$$\rho(x_i, y_i) = \max |x_i - y_i|. \quad (4)$$

Это расстояние стоит использовать, когда необходимо определить два объекта как «различные», если они отличаются хотя бы по одному измерению [2].

Степенное расстояние

$$\rho(x_i, y_i) = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p}. \quad (5)$$

Применяется в случае, когда необходимо увеличить или уменьшить вес, относящийся к размерности, для которой соответствующие объекты сильно отличаются. Здесь r и p — параметры, определяемые пользователем. Параметр p ответствен за постепенное взвешивание разностей по отдельным координатам, параметр r ответствен за прогрессивное взвешивание больших расстояний между объектами. Если оба параметра r и p равны двум, то это расстояние совпадает с расстоянием Евклида [2], [3].

2. Метод k -средних

Метод k -средних — один из популярных итеративных методов кластеризации данных. Он быстр и эффективен в применении.

Рассмотрим алгоритм на примере растрового изображения. В качестве объектов будут выступать пиксели изображения, а в качестве характеристик — их цвет.

Описание алгоритма:

1. Выбирается число k — количество кластеров.
2. Далее случайным образом из заданного изображения выбирается k точек. На первом шаге эти точки будут считаться «центрами» кластеров. Каждому кластеру соответствует один центр.
3. Все точки изображения распределяются по кластерам. Вычисляется расстояние от точки до каждого центра кластера, и точку

относят к тому кластеру, расстояние до центра которого будет наименьшим.

4. Когда все точки изображения распределены по кластерам, происходит пересчет центров кластеров. В качестве нового центра кластера берется среднее арифметическое всех точек, принадлежащих кластеру [4].

Пункты 3 и 4 повторяются до тех пор, пока не будет выполнено условие в соответствии с некоторым критерием останковки:

- кластерные центры стабилизировались, то есть все наблюдения принадлежат кластеру, которому принадлежали до текущей итерации;
- число итераций равно максимальному числу итераций.

В методе k -средних ставится цель минимизировать *полную внутри-классовую дисперсию*:

$$V = \sum_{i=0}^k \sum_{X_j \in C_i} (X_j - \mu_i)^2, \quad (6)$$

где X_j — векторы характеристик, k — количество кластеров, C_i — кластеры, μ_i — центры кластеров. Описанный выше алгоритм не гарантирует нахождения наилучшего решения. Чтобы уменьшить зависимость от неудачного выбора центров, алгоритм часто прогоняют несколько раз с различными начальными центрами, а затем выбирают решение с наименьшей дисперсией V [5].

3. Постановка задачи

Дано произвольное растровое изображение формата *bmp*. Задается количество кластеров, на которые будет разбито данное изображение. Требуется произвести кластеризацию заданного изображения методом *k*-средних.

Поскольку поставлена задача кластеризации изображения, то объектами кластеризации будут пиксели изображения, а вектором характеристик будет выступать цвет пикселя в трехмерном пространстве RGB. В качестве метрики возьмем евклидово расстояние.

Решением задачи служит программа, реализованная на языке программирования C++ в среде программирования CodeGear RAD Studio 2007. Визуализация кластеров в трехмерном пространстве RGB реализована при помощи языка программирования Python.

4. Результаты

В качестве исходного изображения возьмем стандартное изображение «Лена». «Лена» — название стандартного тестового изображения, широко используемого в научных работах для проверки и иллюстрации алгоритмов обработки изображений (сжатия, шумоподавления и т. д.).

1. Дано стандартное изображение «Лена» в градациях серого, формата *bmp*, размером 512x512 пикселей (рис. 1). Количество кластеров $k = 5$. Поскольку изображение в градациях серого, то все компоненты R, G, B равны и в качестве метрики можно выбрать $|V_1 - V_2|$, где V_1 и V_2 — яркости пикселей.

Как показано на рис. 2, в качестве результата работы программа

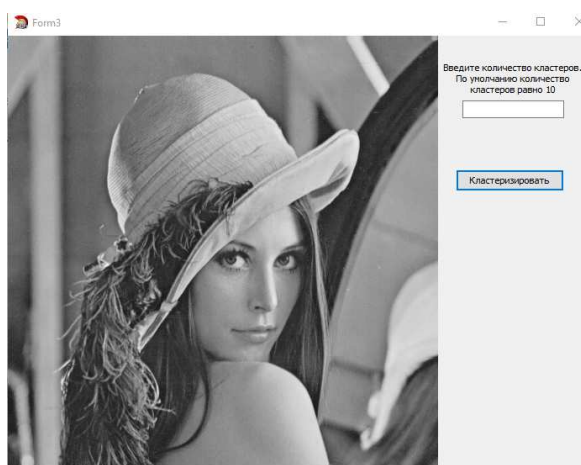


Рис. 1. Демонстрация входных данных программы

выдает:

- кластеризованное изображение;
 - первые k центров в формате (RGB), которые были выбраны случайным образом;
 - новые центры в формате (RGB), которые были получены в результате кластеризации.
2. Дано стандартное цветное изображение «Лена» формата bmp, размером 220x220 пикселей (рис. 3). Количество кластеров $k = 10$.

Как показано на рис. 4, в качестве результата работы программа выдает:

- кластеризованное изображение;
- первые k центров в формате (RGB), которые были выбраны случайным образом;

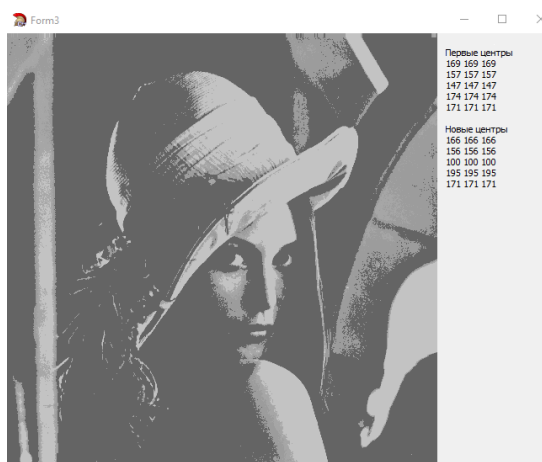


Рис. 2. Демонстрация выходных данных программы

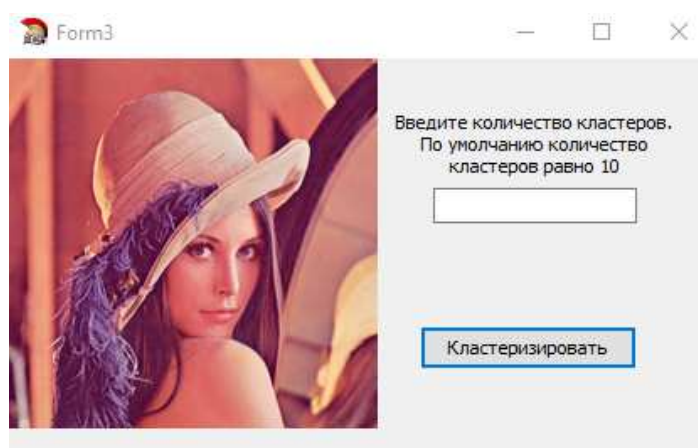


Рис. 3. Демонстрация входных данных программы

- новые центры в формате (RGB), которые были получены в результате кластеризации.

На рис. 5 приведен график, демонстрирующий представление объектов исходного изображения в пространстве RGB до кластеризации.

На рис. 6 показан график, демонстрирующий представление объ-

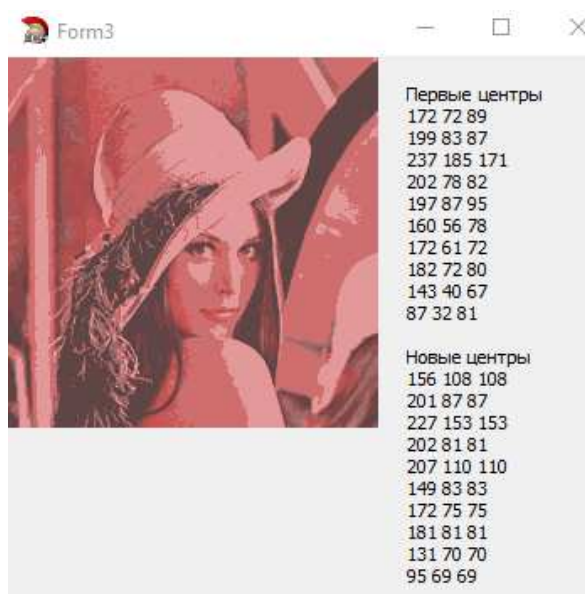


Рис. 4. Демонстрация выходных данных программы

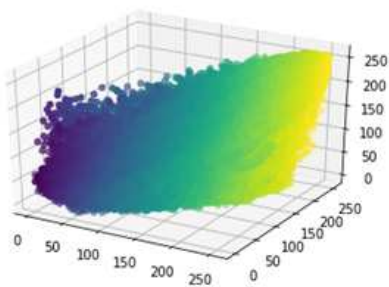


Рис. 5. График объектов в пространстве RGB до кластеризации

ектов исходного изображения в пространстве RGB после кластеризации.

5. Анализ результатов

Метод кластеризации данных k -средних является эффективным и быстрым методом. Однако у него есть свои недостатки. Одним из недостатков метода k -средних является необходимость задавать количество

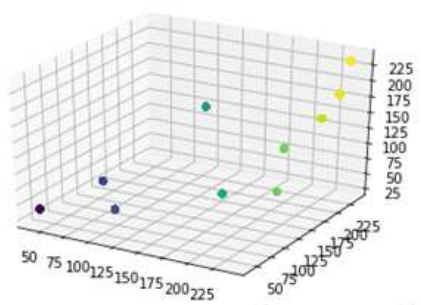


Рис. 6. График объектов в пространстве RGB после кластеризации

кластеров.

Однако главным недостатком данного метода является выбор центров кластеров случайным образом. Поскольку центры кластеров выбираются случайным образом, то результаты работы программы, запущенной несколько раз для одного и того же изображения, будут отличаться.

Так, например, для изображения с рис. 3 программа была запущена несколько раз, и в результате были получены соответствующие внутриклассовые дисперсии: 1504941; 1418464; 1561644; 1386604. Таким образом, наилучшее решение было получено при четвертом запуске программы.

Результаты алгоритма изменятся, если вместо выбора центров кластеров случайным образом предпочтительнее находить наиболее удаленные друг от друга центры.

Список литературы

1. Котов А., Красильников Н. Кластеризация данных. М., 2006.

16 с.

2. **Чубукова И. А.** Data Mining. М.: Бином, 2008. 326 с.
3. Обзор алгоритмов кластеризации данных. URL: <https://habr.com/ru/post/101338/> (дата обращения: 02.12.2019).
4. **Тюрин А. Г., Зуев И. О.** Кластерный анализ, методы и алгоритмы кластеризации // *Вестник МГТУ МИРЭА №12*. М.: Изд-во МГТУ, 2014. 12 с.
5. **Ян Эрик Солем.** Программирование компьютерного зрения на языке Python / пер. с англ. А. А. Слинкин М.: ДМК Пресс, 2016. 312 с.

Summary

Kotelina N. O., Matwiichuck B. R. Image clustering by k -means

The paper deals with the problem of data clustering by the k -means method on the example of a raster image. The solution of the problem will be a program that implements the k -means method and as a result of the work, produces images divided into k clusters. The quality of clustering is estimated.

Keywords: k -means method, clustering, cluster.

References

1. **Kotov A., Krasilnikov N.** *Klasterizatsiya dannykh* (Data clustering), М., 2006, 16 p.

2. **Chubukova I. A.** *Data Mining*, М.: Binom, 2008, 326 p.
3. *Obzor algoritmov klasterizatsii dannykh* (Overview of data clustering algorithms), URL: <https://habr.com/en/post/101338/> (date of the application: 12.02.2019).
4. **Tyurin A. G., Zuev I. O.** *Klasternyy analiz, metody i algoritmy klasterizatsii* (Cluster analysis, methods and algorithms of clustering), *Vestnik MGTU MIREA*, No 12, М.: Publishing house of MSTU, 2014, 12 p.
5. **Ian Eric Solem** *Programmirovaniye komp'yuternogo zreniya na yazyke Python* (Programming computer vision in Python), М.: DMK Press, 2016, 312 p.

Для цитирования: Котелина Н. О., Матвийчук Б. Р. Кластеризация изображения методом k -средних // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3 (32). С. 101–112.*

For citation: Kotelina N. O., Matwiichuck B. R. Image clustering by k -means, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, 3 (32), pp. 101–112.

ПЕРСОНАЛИИ

Беляева Надежда Александровна – д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математического моделирования и кибернетики, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: kmmik@syktsu.ru

Гарбузов Павел Александрович – главный инженер-программист, Вычислительный центр Информационного центра МВД по Республике Коми, e-mail: vestnik-mmi@syktsu.ru

Гашин Ростислав Алексеевич – инженер-программист, Вычислительный центр Информационного центра МВД по Республике Коми, e-mail: vestnik-mmi@syktsu.ru

Гольчевский Юрий Валентинович – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой информационных систем, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: yurygol@mail.ru

Дорофеев Сергей Николаевич – д.п.н., профессор, Тольяттинский государственный университет, e-mail: komrad.dorofeev2010@yandex.ru

Ермоленко Андрей Васильевич – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Котелина Надежда Олеговна – к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Соро-

кина, e-mail: nkotelina@gmail.com

Мансурова Елена Рашидовна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры методики преподавания математики, информатики и естественно-научных дисциплин, Марийский государственный университет, e-mail: mansurovka@mail.ru

Матвийчук Богдан Русланович – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: nkotelina@gmail.com

Надуткина Анастасия Васильевна – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: kmmik@syktsu.ru

Наземнова Наталья Владимировна – к.п.н., старший преподаватель, Пензенский государственный университет, e-mail: komrad.dorofeev2010@yandex.ru

Низамова Энжэ Рифатовна – студент, Марийский государственный университет, e-mail: enizamova907@gmail.com

Носов Леонид Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: nosovvv@yandex.ru

Осипов Дмитрий Анатольевич – преподаватель колледжа экономики, права и информатики, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

Пипуныров Егор Юрьевич – студент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, e-mail: nosovvv@yandex.ru

Чернов Владимир Георгиевич – д.э.н., профессор кафедры «Вычислительная техника и системы управления», Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, e-mail: vladimir.chernov44@mail.ru

AUTHORS

Belyaeva Nadezhda – Ph.D. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Cybernetics, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: kmmik@syktsu.ru

Garbuzov Pavel – chief software engineer, Computer center of the MIA Information center in the Republic of Komi, e-mail: vestnik-mmi@syktsu.ru

Gashin Rostislav – chief software engineer, Computer center of the MIA Information center in the Republic of Komi, e-mail: vestnik-mmi@syktsu.ru

Golchevsky Yuri – Ph. D., associate Professor, head of the Department of information systems, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: yurygol@mail.ru

Dorofeev Sergey – doctor of pedagogical Sciences, Professor, Togliatti state University, e-mail: komrad.dorofeev2010@yandex.ru

Yermolenko Andrey – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: ea74@list.ru

Kotelina Nadezhda – Ph.D., associate professor of the Department of

Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: nkotelina@gmail.com

Mansurova Elena – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Mari State University, e-mail: mansurovka@mail.ru

Matwiichuck Bogdan – student, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: nkotelina@gmail.com

Nadutkina Anastasia – student, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: kmmik@syktsu.ru

Nazemnova Natalia – candidate of pedagogical Sciences, senior lecturer, Penza state University, e-mail: komrad.dorofeev2010@yandex.ru

Nizamova Anghe – student, Mari State University, e-mail: enizamova907@gmail.com

Nosov Leonid – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of information security, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: nosovvv@yandex.ru

Osipov Dmitry – lecturer of the College of Economics, law and Informatics, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: ea74@list.ru

Pipunurov Egor – student, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: nosovvv@yandex.ru

Chernov Vladimir – Doctor of Economics, Professor of Computer Engineering and Management Systems, Vladimir Grigorievich State University and Nikolai Grigorievich Stoletov Vladimir State University, e-mail: vladimir.chernov44@mail.ru

Contents

Chronicle of the university life

Yermolenko A. V. *On the series of conferences «Mathematical modeling and information technology»* 3

Golchevskiy Yu. V., Yermolenko A. V., Kotelina N. O., Osipov D. A. *About WorldSkills Championship at Syktyukar University*
13

Applied mathematics and mechanics

Belyaeva N. A., Nadutkina A. V. *Nonisothermal flow of a viscous fluid* 20

Chernov V. G. *Decision making in conditions of uncertainty with fuzzy, linguistic assessments of the situation* 31

Computer sciences

Garbuzov P. A., Gashin R. A. *Design, development and implementation of complex automated car fleet management system* 46

Nosov L. S., Pipunyorov E. Y. *Stream encryption based on FPGA* 62

Methodical materials

Dorofeev S. N., Nazemnova N. V. *Methodological features of teaching high school students to recognize geometric images* 77

Mansurova E. R., Nizamova E. R. *Generalization in analysis as a means of improving the quality of mathematical preparation of students* 89

Tutor-follower

Kotelina N. O., Matwiichuck B. R. *Image clustering by k-means* 101

Authors

113

Для заметок

Научное периодическое издание

Вестник Сыктывкарского университета
Серия 1: Математика. Механика. Информатика
Выпуск 3 (32) 2019

Гл. редактор О.А. Сотникова

Отв. редактор А.В. Ермоленко

Редактор Е.М. Насирова

Компьютерный макет М.Н. Юркина

Корректор Л.Н. Руденко

Подписано в печать 12.12.2019. Дата выхода в свет 31.12.2019.

Формат $70 \times 108\frac{1}{8}$. Бумага офсетная.

Гарнитура Computer Modern. Печать ризографическая. Усл. печ. л. 13,9.

Тираж 500 экз. Заказ № 172.

Отпечатано в соответствии с предоставленными
материалами в ООО «Амирит»

410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88

Тел. 8-800-700-86-33 | (845-2)24-86-33

E-mail: zakaz@amirit.ru

Сайт: amirit.ru